

ラプラス変換と常微分方程式

メモ

由良忠義

2006 年版

これは大阪工業大学,「応用数学 I」の講義を補うために書いたメモです。講義は 05 年度で終了しました。学生の自主学習に寄与したいとの思いで公開を続けます
力学系をはじめ,多くの点で物理研究室の奥田先生,林先生の御助言を頂きました。(2006,4,1 改訂)

このメモについて

はじめに常微分方程式の一般的な基礎を要約します。講義はラプラス変換が中心であったため、常微分方程式の基礎や個別の求積法に深入りせず、ラプラス変換の応用の一部としてのみ定数係数の常微分方程式を取り上げたからです。

常微分方程式は解くことだけでなく、解の定性的な振る舞いを知ることも大切です。特に解析的に解けない多くの非線形の系では定性的解析が数値解法とともに主要な解析法になります。力学系について、付録で簡単にふれます。

ラプラス変換の存在定理とその他の定理を少し補足します。ラプラス変換の基礎的な定理は「区分的に連続で、指数位の関数」に限定すれば、すべて簡単に証明できます。

ラプラス変換は自ずと対象を通常の関数の枠を広げた超関数の世界にも踏み込みます。当面の学習では超関数の考えなしに取り扱えないものはほとんどありませんが、その考え方に少し触れておきます。

ラプラス変換およびその逆変換は表を使って簡便に行いますが、フーリエ変換の場合と同様にラプラス逆変換も積分変換になっています。ラプラス変換の統一的な理解に必要な事項を説明します。

ラプラス変換の応用は専攻する分野によって違いますが、梁の問題を付録に追加しておきます。各境界条件を見通しよく取り扱えることがわかります。

標準的なラプラス変換の学習でも慣れない関数や積分公式がいくつか出てきます。円滑な学習の進行のために必要ないくつかの関数を整理しておきます。

付録の FORTRAN ソースプログラムは FORTRAN コンパイラ「ff90」で翻訳できます。また、このライブラリーにはいくつかの力学系にたいする JAVA アプレットを用意しました。参照して下さい。

またこのメモは PDF file で提供しています。無駄なプリントは避けて環境保全に貢献しよう。

目次

第 1 章	常微分方程式—要約	4
1.1	常微分方程式の基本定理	4
1.2	線形常微分方程式	8
第 2 章	ラプラス変換	15
2.1	ラプラス変換の存在定理	15
2.2	逆ラプラス変換	16
2.3	ラプラス変換の公式一覧	16
2.3.1	合成積 (たたみこみ)	17
2.3.2	ラプラス変換の公式	19
2.4	簡単なラプラス変換, 逆ラプラス変換の練習問題	23
2.5	主な関数のラプラス変換一覧	25
2.5.1	周期関数の取り扱い	27
2.6	定数係数線形常微分方程式への適用 (問題のみ)	28
2.7	ラプラス変換の物理系への応用	30
2.7.1	撃力	30
2.7.2	入力と応答	31
2.7.3	電気回路系	33
2.8	その他の方程式への適用	37
2.8.1	簡単な変数係数の常微分方程式	37
2.8.2	積分方程式	39
2.8.3	差分方程式	40
2.8.4	偏微分方程式	42
第 3 章	超関数のラプラス変換	44
3.1	超関数の定義	44
3.2	超関数のラプラス変換	46
第 4 章	複素反転公式	47
4.1	複素関数論の要約	47
4.2	ブロムウィッチ積分公式	49
4.3	積分定理によるラプラス逆変換の例	51
第 5 章	2 階の線形微分方程式	55
5.1	2 階の線形微分方程式	55
5.2	確定特異点と級数解法	56
5.3	Riemann の微分方程式と Gauss の微分方程式	58

5.4	超幾何級数	59
5.5	Legendre の微分方程式	61
5.6	ベッセルの微分方程式	63
第 6 章	付録 1 – 授業で用いる特殊関数と積分	66
6.1	誤差関数, ガンマ関数, ベータ関数	66
6.2	ベッセル関数のラプラス変換	71
6.3	無理関数を含む積分 楕円積分	73
6.4	その他の公式	75
第 7 章	付録 2 – 梁 (はり) の問題	77
7.1	梁の方程式	77
7.2	梁のたわみの例	78
第 8 章	付録 3 – 2 元連立常微分方程式	81
8.1	定数係数同次線形常微分方程式	81
8.2	非線形問題	85
8.2.1	非線形問題の方法	85
8.2.2	振り子の運動	87
8.2.3	電気回路の問題	89
8.2.4	捕食者被食者の問題	91

第1章 常微分方程式一要約

工学系の学生は、通常、ラプラス変換の学習を通じて、定数係数の常微分方程式の解法を学ぶことが多いが、本来手法にそれほど差があるわけではない。ここではその基礎となる線形常微分方程式の一般的な特性を証明なしで整理しておく。

1.1 常微分方程式の基本定理

単独の常微分方程式

簡単な例から議論を始めよう。

[一元の例 放射能の減衰]

「放射能 I はその放射能に比例して減衰する」というモデルを解いてみよう。

放射能とは物質を構成する原子核が α , β , γ 線などの放射線を自発的に放出して放射性崩壊を行うことであり、その量は単位時間に崩壊する粒子の数で表され、単位はキュリー Ci (毎秒 3.7×10^{10} 個の崩壊) が用いられる。

仮定は、放射能 I のその放射能に対する変化の割合が一定 ($-k$) であることを意味しており、これは極めて高い精度で成立することが知られている。

$$\frac{dI}{dt} = -kI, \quad (k > 0)$$

変数分離し、両辺を積分して

$$\frac{dI}{I} = -k dt, \quad \log I = -kt + c, \quad c \text{ は積分定数}$$

e^c をあらためて c とおいて

$$I = ce^{-kt}$$

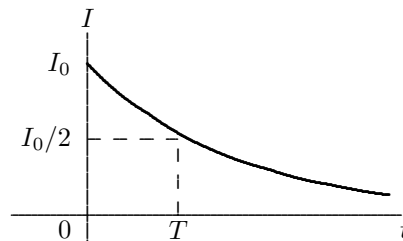
$t = 0$ のとき、 $I = I_0$ (初期条件) とすると、 $c = I_0$ より

$$I = I_0 e^{-kt}$$

放射能の半減期 T は

$$I = \frac{1}{2} I_0, \quad I_0 e^{-kT} = \frac{1}{2} I_0, \quad e^{-kT} = \frac{1}{2}, \quad e^{kT} = 2$$

$$T = \frac{1}{k} \log 2 = \frac{0.693}{k}$$



ラジウムでは、 $k = 1.4 \times 10^{-11} \text{sec}^{-1}$ より $T = 1590$ 年。
ラジオカーボンデーティング (radiocarbon dating) では ^{14}C の半減期...5730 年を用いて年代測定をする。宇宙線が大気に衝突し中性子 (n) を生成する。中性子は大気中の ^{14}N と反応して放射性元素 ^{14}C になる ($^{14}\text{N} + n \rightarrow ^{14}\text{C} + p$)。この ^{14}C は地域的にも、経年的にもほぼ

一定の濃度で大気中の二酸化炭素に含まれていると考えられる。 ^{14}C は生きている生物の有機物にそのときの大気中の濃度で取り込まれる。このときを $t = 0, I = I_0$ とすると、生物が死に年代がたつと、 ^{14}C が崩壊 ($^{14}\text{C} \rightarrow ^{14}\text{N} + e + \nu, \beta^-$ 崩壊) し、 ^{14}C の濃度が下がる。この全炭素にたいする濃度を測定すれば、その生物が死んでからの年数がわかることになる。これは木片、泥炭、貝殻、骨などの約4万年前までの年代測定に利用される。ただし、大気中の ^{14}C 濃度が一定であるという仮定はそれほど正確ではなく、最近では年輪測定などの暦年確定法などによって修正され、たとえば1万2千年前だと思われていた縄文土器が1万6千5百年前のものであったことがわかってきている。 ^{14}C 濃度は放射能の測定に替わって、加速器粒子測定法 (AMS法) で極微量の試料を千倍から1万倍の精度で測定されるようになった。さらに、'03年になって、弥生時代が従来の説より500年ほどさかのぼって始まったと報告されている。地球の歴史などのより長期の億年の単位ではウランなどが用いられる。

上の例のように、初等的な求積法によって一意的に解が得られるとは限らない。次の例を解いてみよう。

[解が一意的には存在しない例]

つぎの常微分方程式を考えてみよう。

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0$$

変数分離し、積分することによって

$$\frac{dx}{3x^{2/3}} = dt, \quad x^{1/3} = t + c, \quad c \text{ は積分定数}$$

$$\therefore x = (t + c)^3$$

初期条件より $c = 0$ 。よって

$$x = t^3$$

が得られる。ところが直接代入によって、任意の定数 $c \geq 0$ に対して

$$x(t) = \begin{cases} 0 & (t \leq c) \\ (t - c)^3 & (t > c) \end{cases}$$

はすべて解であることがわかる。すなわちこの場合解の一意性は破られたことになる。

したがって、つぎの単独の常微分方程式にたいする「解の存在と一意性」の定理が重要となる。

$$\dot{x} = f(t, x) \tag{1.1}$$

において関数 $f(t, x)$ は $t - x$ 平面 P のある領域 Γ で定義されている。さらに関数 $f(t, x)$ は偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial x}$ とともに領域 Γ で連続であると仮定する。このとき

(a) Γ の任意の点 (t_0, x_0) にたいして、条件

$$\phi(t_0) = x_0 \tag{1.2}$$

を満たす (1.1) の解 $x = \phi(t)$ が存在する。

(b) もし (1.1) の2つの解 $x = \phi(t)$ と $x = \psi(t)$ とが少なくとも1つの値 $t = t_0$ で一致すれば、即ち

$$\phi(t_0) = \psi(t_0) \tag{1.3}$$

であれば、この2つの解は双方の定義域の共通部分において恒等的に等しい。
この証明は省略するがおよそ次のような議論で証明される。

$x = \phi(t)$ を区間 $t_1 < t < t_2$ で定義された方程式 (1.1) の1つの解とする、即ち

$$\dot{\phi}(t) = f(t, \phi(t)), \quad \phi(t_0) = x_0$$

このとき関数 $\phi(t)$ は区間 $t_1 < t < t_2$ において積分方程式

$$\phi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(\tau, \phi(\tau)) d\tau$$

をみます。微分方程式 (1.1) と積分方程式は同値である。この積分方程式の右辺の $\phi(t)$ に x_0 を代入して $\phi_1(t)$ を、 $\phi_1(t)$ を代入して $\phi_2(t)$ をと順次 $\phi_n(t)$ を求める。この関数列 $\{\phi_n(t)\}$ は収束し、条件 (1.2) を満たす (1.1) の解となる。例によって証明の流れを見ておく。

[例 逐次近似法]

$$\dot{x} = x, \quad t_0 = 0, \quad x_0 = x(t_0) = 1$$

を解いてみよう。求める解を $x = \phi(t)$ として、方程式の両辺を積分して

$$\phi(t) - \phi(t_0) = \int_{t_0}^t \phi(\tau) d\tau, \quad \therefore \phi(t) = 1 + \int_{t_0}^t \phi(\tau) d\tau$$

$$\begin{aligned} \phi_0(t) &= 1 \\ \phi_1(t) &= 1 + \int_{t_0}^t \phi_0(\tau) d\tau = 1 + t \\ \phi_2(t) &= 1 + \int_{t_0}^t \phi_1(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 \\ \phi_3(t) &= 1 + \int_{t_0}^t \phi_2(\tau) d\tau = 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 \\ &\dots \quad \dots \\ \phi_n(t) &= 1 + t + \frac{1}{2!} t^2 + \frac{1}{3!} t^3 + \dots + \frac{1}{n!} t^n \end{aligned}$$

この関数列 $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n, \dots$ は数直線上の任意の区間において一様収束し、その極限は

$$\phi(t) = e^t$$

である。

正規形の常微分方程式

正規形の常微分方程式

$$\dot{x}_i = f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

ベクトル記法で $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$

を考える。 $(t, x_1, x_2, \dots, x_n)$ の空間 (実 $n+1$ 次元空間) のある部分空間領域 Γ について、つぎの存在と一意性の定理が成り立つ。

(1.4) の右辺は領域 Γ で定義され、かつ次の条件を満たすとす。

$$f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n); \quad \frac{\partial f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial x_j}; \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad \text{は} \Gamma \text{ において連続である} \quad (1.5)$$

このとき領域 Γ の各点 (t_0, \mathbf{a}) にたいして, t_0 を含むある区間で定義された (1.4) の解

$$\mathbf{x} = \phi(t) \quad (1.6)$$

で, 条件

$$\phi(t_0) = \mathbf{a} \quad (1.7)$$

を満たすものが存在する。さらにまた, 方程式 (1.4) の 2 つの解

$$\mathbf{x} = \phi(t), \quad \mathbf{y} = \psi(t)$$

がそれぞれ点 t_0 を含む区間で定義され, かつ

$$\phi(t_0) = \psi(t_0) = \mathbf{a}$$

ならば, この 2 つの解は双方の定義区間の共通部分で恒等的に一致する。

以上の証明には, つぎの「Lipschitz 条件」が用いられる。

「関数 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}), (f_i(t, x_1, x_2, \dots, x_n); i = 1, 2, \dots, n)$ がある定数 L があって, 領域 Γ 内のすべての $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y})$ にたいして

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x})\| \leq L\|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| \quad (1.8)$$

が成り立つ。」

ノルム $\|\mathbf{x}\|$ は $\|\mathbf{x}\| = \max\{|x_1|, \dots, |x_n|\}$ とする。このとき L を Lipschitz 定数という。 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ が (t_0, \mathbf{a}) をふくむ領域で Lipschitz 条件をみたす連続写像だとすると, 初期条件を (t_0, \mathbf{a}) とする解がただ一つ存在する (局所解の存在と一意性の定理)。

また Γ 内の各点 (t_0, \mathbf{a}) において, $r > 0, L > 0$ が存在して, その近傍 ($Q_r^{n+1}(t_0, \mathbf{a}) = \{(t, \mathbf{x}); \|(t, \mathbf{x}) - (t_0, \mathbf{a})\| \leq r, r > 0\}$) において Lipschitz 条件をみたすとき, これを「局所 Lipschitz 条件」という。次の定理が成り立つ。

「 $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ が領域 Γ 内で関数および導関数が連続であれば, $\mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ は局所 Lipschitz 条件を満たす」

条件 (1.5) を満たす微分方程式 (1.4) は局所 Lipschitz 条件をみたし, (t_0, \mathbf{a}) について最大存在区間 (開区間) に対応した解が存在し, 他の解は共通区間でそれに一致する (大域解の存在と一意性の定理), という筋書きである。

Lipschitz 条件を満たさない例として先に挙げた

$$\dot{x} = 3x^{2/3}, \quad x(0) = 0$$

を考える。

$f(x) = 3x^{2/3}$ は Lipschitz 条件を満たさない。なぜなら Lipschitz 条件を満たすとすると $|3x^{2/3} - 3y^{2/3}| \leq L|x - y|$, $(x, y \geq 0)$ を満たす $L > 0$ が存在する。 $y = 0, x \neq 0$ とすると, $|3x^{-1/3}| \leq L$ となる。 $x \rightarrow 0$ とすると左辺は無限大となり矛盾する。

同様に次の「初期条件に関する解の連続性」が成り立つ。

$f(t, \mathbf{x})$ が Lipschitz 定数 L をもつとする。 $\mathbf{y}(t), \mathbf{x}(t)$ が閉区間 $[t_0, t_1]$ で方程式 (1.4) の解ならば, $t_0 \leq t \leq t_1$ にたいして

$$\|\mathbf{y}(t) - \mathbf{x}(t)\| \leq \|\mathbf{y}(t_0) - \mathbf{x}(t_0)\| \exp(L(t - t_0)) \quad (1.9)$$

が成り立つ。

これは, 現実の通常の現象に対して解が意味のある記述になる必要条件となっている。

この「初期条件に関する解の連続性」は「初期条件とパラメーターに関する解の連続性」の定理に拡張される。

パラメーター \mathbf{u} を含んだ正規形方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) \quad (1.10)$$

について, $(t_0, \mathbf{a}, \mathbf{u}_0)$ を含むある領域にたいして,

$$\|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y}, \mathbf{v})\| \leq k\|(\mathbf{x}, \mathbf{u}) - (\mathbf{y}, \mathbf{v})\| \quad (1.11)$$

を満たすとする。適当な ρ が存在して, $\|\mathbf{x}_0 - \mathbf{a}\| \leq \rho, \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_0\| \leq \rho$ を満たす \mathbf{x}_0, \mathbf{u} にたいして, (t_0, \mathbf{x}_0) を初期条件とする解が存在し, $(t, \mathbf{x}_0, \mathbf{u})$ に関して連続である。

これは通常, 微分方程式が何らかの現象をモデル化したものと考え, そのとき方程式の解がもとの現象の近似的表現であるための必要条件である。

これらの常微分方程式の基本定理とその証明は多くのテキストに書かれているので, それらを参照されたい。

1.2 線形常微分方程式

線形常微分方程式の一般的性質を要約しておく。

正規形の線形方程式

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j + b_i(t); \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.12)$$

方程式 (1.12) の係数 $a_{ij}(t)$ と自由項 $b_i(t)$ とが区間 $t_1 < t < t_2$ で定義され, かつこの区間で連続であれば, (1.12) の任意の解の最大存在区間もやはり区間 $t_1 < t < t_2$ である。

同次方程式系

$$\dot{x}_i = \sum_{j=1}^n a_{ij}(t)x_j; \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.13)$$

ベクトル記法で

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} \quad (1.14)$$

(a) 解 $\mathbf{x} = \phi(t)$ がある値 t_0 に対して 0 になれば, 即ち

$$\phi(t_0) = 0 \quad (1.15)$$

ならば、この解は恒等的に 0 に等しい。即ち

$$\phi(t) \equiv 0 \quad , \quad t_1 < t < t_2 \quad (1.16)$$

(b) ベクトル関数

$$\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_r(t) \quad (1.17)$$

が方程式 (1.14) の解であれば、任意の定数 c_1, c_2, \dots, c_r に対して

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_r\phi_r(t) \quad (1.18)$$

もまた方程式 (1.14) の解である。

1 次従属とは

$$\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_r(t) \quad (1.19)$$

を方程式 (1.14) の解の系とすると、同時には 0 でないような定数 c_1, c_2, \dots, c_r が存在して、

$$c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_r\phi_r(t) \equiv 0 \quad (1.20)$$

となることである。そうでない場合、系 (1.19) は 1 次独立という。このとき少なくとも 1 つの値 $t = t_0$ に対してベクトル

$$\phi_1(t_0), \phi_2(t_0), \dots, \phi_r(t_0) \quad (1.21)$$

が 1 次従属であれば、解 (1.19) は 1 次従属である。いいかえれば、解 (1.19) の系が 1 次独立の場合には t のどんな値に対してもベクトル (1.19) は 1 次従属になり得ない。

解の基本系

方程式 (1.14) の解の系

$$\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t) \quad (1.22)$$

が 1 次独立の場合、これを解の基本系という。このとき

(a) 方程式 (1.14) に対して常に解の基本系が存在する。

(b) (1.22) が (1.14) の基本系であれば、方程式 (1.14) の任意の解 $\phi(t)$ は、 c_1, c_2, \dots, c_n を定数として

$$\phi(t) = c_1\phi_1(t) + c_2\phi_2(t) + \dots + c_n\phi_n(t) \quad (1.23)$$

と表される。

非同次方程式

$$\dot{\mathbf{x}} = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t) \quad (1.24)$$

の 1 つの解 (特解) を $\mathbf{x} = \psi(t)$ とすると、(1.24) の任意の解は

$$\mathbf{x} = \phi(t) + \psi(t) \quad (1.25)$$

と表せる。ただし $\mathbf{x} = \phi(t)$ は (1.14) の一般解である。則ち (1.24) を解くことは、この方程式の特解を求めることと、付随する同次方程式の一般解を求めることに帰着する。

[例 雨滴の落下]

「雨滴の体積はその表面積に比例して増大する」というモデルを解いてみよう。

(この例は、元学長 青井先生の名著「応用数学」から拝借した。青井先生は99年他界された。)

雨滴の半径を $r = r(t)$, 体積を $V = \frac{4}{3}\pi r^3$, 表面積を $S = 4\pi r^2$ とすると,

$$\frac{dV}{dt} = kS, \quad k \text{ は比例定数}$$

$$\therefore \frac{dr}{dt} = k$$

$t = 0$ のとき $r = r_0$ とすると

$$r = kt + r_0$$

質量 $m = \rho V$ の雨滴の速度 v を支配する運動方程式は, m が変化することを考慮して

$$\frac{d(mv)}{dt} = mg, \quad m \frac{dv}{dt} + \frac{dm}{dt} \cdot v = mg, \quad \frac{dv}{dt} + \frac{1}{m} \frac{dm}{dt} \cdot v = g$$

ここで

$$\frac{1}{m} \frac{dm}{dt} = \frac{1}{V\rho} \frac{d\rho V}{dt} = \frac{1}{V} \cdot kS = \frac{3k}{r}, \quad \frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dr} \cdot \frac{dr}{dt} = k \frac{dv}{dr}$$

を代入すると

$$\frac{dv}{dr} + \frac{3}{r}v = \frac{g}{k}$$

を得る。

これは変数分離では解けない。非同次方程式の一般論に戻って式 (1.25)

(非同次線形微分方程式の一般解; v)

$$= (\text{同次方程式の一般解; } v_1) + (\text{非同次方程式の特解; } v_2)$$

を使う。まず同次方程式の一般解を求めよう。

$$\frac{dv}{dr} + \frac{3}{r}v = 0, \quad \frac{dv}{v} = -\frac{3}{r}dr, \quad \text{変数分離}$$

$$\log v = -3 \log r + c' = \log r^{-3} + c'$$

$$\therefore v_1 = c \frac{1}{r^3}, \quad c \text{ は積分定数}$$

特解を求めよう。解を

$$v = Ar^\lambda, \quad A, \lambda \text{ は定数}$$

として求めてみよう。非同次方程式に代入して

$$A\lambda r^{\lambda-1} + 3Ar^{\lambda-1} = \frac{g}{k}, \quad A(\lambda + 3)r^{\lambda-1} = \frac{g}{k}$$

$A \neq 0$ として, 恒等的に成り立つためには

$$\lambda = 1, \quad A = \frac{g}{4k} \quad \therefore v_2 = \frac{g}{4k}r$$

よって求める一般解は

$$v = c \frac{1}{r^3} + \frac{g}{4k}r$$

初期条件 $t = 0, r = r_0, v = 0$ を代入して

$$0 = c \frac{1}{r_0^3} + \frac{g}{4k} r_0, \quad c = -\frac{g}{4k} r_0^4$$

$$\therefore v = \frac{g}{4k} r \left\{ 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right\}$$

定数変化法

同次方程式 (1.14) の基本系を (1.22) としたとき, (1.24) の解を

$$\boldsymbol{x} = c_1(t)\boldsymbol{\phi}_1(t) + c_2(t)\boldsymbol{\phi}_2(t) + \cdots + c_n(t)\boldsymbol{\phi}_n(t) \quad (1.26)$$

の形で求める。ただし係数は t の未知関数である。この \boldsymbol{x} を (1.24) に代入して

$$\dot{c}_1(t)\boldsymbol{\phi}_1(t) + \dot{c}_2(t)\boldsymbol{\phi}_2(t) + \cdots + \dot{c}_n(t)\boldsymbol{\phi}_n(t) = \boldsymbol{b}(t) \quad (1.27)$$

$\boldsymbol{\phi}_1(t), \boldsymbol{\phi}_2(t), \dots, \boldsymbol{\phi}_n(t)$ は各点 t において 1 次独立なベクトルだから, (1.27) から値 $\dot{c}_1(t), \dot{c}_2(t), \dots, \dot{c}_n(t)$ は一意的に決まり, 結局 $c_1(t), c_2(t), \dots, c_n(t)$ は求積法で求められる。これは正規形の非同次線形常微分方程式の 1 つの解法となっている。

[定数変化法 (1 元の場合)]

方程式

$$\dot{y} = a(t)y + b(t) \quad (1.28)$$

を定数変化法で解いてみよう。

同次方程式

$$\dot{x} = a(t)x$$

の一般解は

$$x = ce^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

である。求める解を

$$y = c(t)e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

として, 非同次方程式に代入して

$$\dot{c} = b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau}$$

この右辺は t のみの関数だから, 直ちに積分でき,

$$y = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \int b(t)e^{-\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} dt \quad (1.29)$$

具体例として, 再度雨滴の落下を解いてみよう。

$$\frac{dv}{dr} + \frac{3}{r}v = \frac{g}{k}$$

同次方程式の一般解は

$$v = \frac{c}{r^3}, \quad c \text{ は積分定数}$$

$c = c(t)$ とみなして非同次方程式に代入すると

$$\frac{\dot{c}}{r^3} + \frac{-3c}{r^4} + \frac{3c}{r^4} = \frac{g}{k}, \quad \dot{c} = \frac{g}{k}r^3$$

積分して

$$c = \frac{g}{k} \cdot \frac{r^4}{4} + c', \quad c' \text{ は積分定数}$$

したがって一般解は

$$v = \frac{g}{4k}r + \frac{c'}{r^3}$$

$r = r_0$ のとき $v = 0$ とすると,

$$0 = \frac{g}{4k}r_0 + \frac{c'}{r_0^3}, \quad c' = -\frac{g}{4k}r_0^4$$

$$\therefore v = \frac{g}{4k}r \left\{ 1 - \left(\frac{r_0}{r} \right)^4 \right\}$$

高階線形方程式

$$y^{(n)} + a_1(t)y^{(n-1)} + \dots + a_n(t)y = b(t) \quad (1.30)$$

を考える。係数 $a_i(t)$ 及び自由項 $b(t)$ は区間 $t_1 < t < t_2$ で定義され、かつ連続とする。

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}, \dots, x_n = y^{(n-1)} \quad (1.31)$$

によって新しい未知関数 x_1, x_2, \dots, x_n を定義すると、つぎの n 元の正規線形系となる。

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_2 \\ \dot{x}_2 &= x_3 \\ &\dots \\ \dot{x}_{n-1} &= x_n \\ \dot{x}_n &= -a_n(t)x_1 - a_{n-1}(t)x_2 - \dots - a_1(t)x_n + b(t) \end{aligned} \quad (1.32)$$

方程式 (1.30) の解 $y = \psi(t)$ には、方程式 (1.32) の解

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\psi}(t) = (\psi(t), \dot{\psi}(t), \dots, \psi^{(n-1)}(t)) \quad (1.33)$$

が対応し、逆に方程式 (1.32) の任意の解

$$\mathbf{x} = \boldsymbol{\phi}(t) = (\phi_1(t), \phi_2(t), \dots, \phi_n(t)) \quad (1.34)$$

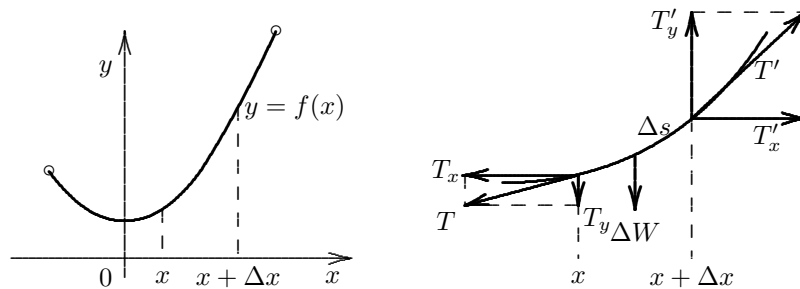
には方程式 (1.30) の解

$$y = \phi_1(t) \quad (1.35)$$

が対応する。すなわち、方程式 (1.30) と方程式 (1.32) は同値である。

[懸垂線 (catenary)]

下図のようなロープがぶら下がっているとす。



図のようなロープの微小部分 Δs について、両端の張力 T, T' と自重 ΔW の力の釣り合いを考える。

$$\text{水平方向} \cdots T_x = T'_x = T_0 \quad (\text{一定})$$

$$\text{鉛直方向} \cdots T_y + \Delta W = T'_y$$

張力の鉛直成分は x の関数だから $T_y = T_y(x)$.

$$T'_y = T_y(x + \Delta x) = T_y + \frac{dT_y}{dx} \Delta x + O(\Delta x^2)$$

$$T'_y - T_y = \frac{dT_y}{dx} \Delta x$$

また張力 T が水平方向となす角を θ とすると、

$$T_y = T_x \tan \theta = T_0 \frac{dy}{dx}, \quad \text{よって } T'_y - T_y = T_0 \frac{d^2y}{dx^2} \Delta x$$

一方、ロープの線密度を ρ とすると

$$\Delta W = \rho g \Delta s = \rho g \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} = \rho g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Delta x$$

したがって

$$T_0 \frac{d^2y}{dx^2} \Delta x = \rho g \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \Delta x$$

よってロープの形状を決める方程式は

$$\frac{d^2y}{dx^2} = k \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}, \quad \text{但し } k = \frac{\rho g}{T_0}$$

となる。これは2階非線形の方程式であるが、未知関数 y を陽に含んでいない。

$$\frac{dy}{dx} = u(x)$$

と置くことによって

$$\frac{du}{dx} = k \sqrt{1 + u^2}$$

と一階の微分方程式になる。

変数分離して積分すると

$$\int \frac{du}{\sqrt{1 + u^2}} = k \int dx$$

$$\log(u + \sqrt{1 + u^2}) = kx + c, \quad (c \cdots \text{積分定数})$$

境界条件 I... 曲線の最下点で接線が水平である。

$$x = 0; \quad \frac{dy}{dx} = u = 0$$

したがって $c = 0$ 。よって

$$u + \sqrt{1 + u^2} = e^{kx}$$

また

$$e^{-kx} = \frac{1}{u + \sqrt{1 + u^2}} = -u + \sqrt{1 + u^2}$$

したがって

$$\frac{dy}{dx} = u = \frac{e^{kx} - e^{-kx}}{2}$$

積分して

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx}) + c'$$

境界条件 II... $x = 0$; $y = \frac{1}{k}$ より $c' = 0$ 。よって

$$y = \frac{1}{2k}(e^{kx} + e^{-kx})$$

一般に、双曲線関数 (hyperbolic function) は

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

で定義される。よって懸垂曲線は

$$y = \frac{1}{k} \cosh kx$$

となる。ロープの長さは ds を $-a \leq x \leq a$ にわたって積分して

$$\begin{aligned} s &= \int_{-a}^a \sqrt{(y')^2 + 1} dx = \int_{-a}^a \sqrt{\sinh^2 kx + 1} dx = \int_{-a}^a \cosh kx dx \\ &= 2 \left[\frac{\sinh kx}{k} \right]_0^a = \frac{2}{k} \sinh ka \end{aligned}$$

ここまでの学習に対する演習問題

1 $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0, \quad x(0) = a, x'(0) = b$

振動の基本方程式である。 $x = Ae^{\lambda t}$ を仮定して、一般解を求めよう。

$$(x = a \cos \omega t + \frac{b}{\omega} \sin \omega t)$$

2 $\frac{dx}{dt} + x = e^t, \quad x(0) = 1$

特解 $x = \frac{1}{2}e^t$ が知られている、とする。

$$(x = \frac{1}{2}(e^{-t} + e^t))$$

3 $2t \frac{dx}{dt} + x = 2t^2, \quad x(1) = 1$

定数変化法で解いてみよう。これは正規形に変形すると

$\frac{dx}{dt} = -\frac{1}{2t}x + t$ となり、 $t = 0$ に不連続がある。解は $t > 0$ として求めよう。

$$(x = \frac{2}{5}t^2 + \frac{3}{5} \frac{1}{\sqrt{t}})$$

第2章 ラプラス変換

ラプラス変換の基本事項はテキストで学習するが、一部を補足しておきます。

2.1 ラプラス変換の存在定理

$[0, \infty)$ で定義された関数 $f(t)$ について、次の積分が存在するとき、これを $f(t)$ のラプラス変換といい

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (2.1)$$

と表す。

次の性質を持つ関数 $f(t)$ を区間 $[a, b]$ について「区分的に連続」という。

(1) $f(t)$ が区間 $[a, b]$ の有限個の点を除いて連続である。

(2) $f(t)$ の不連続点 t では、左極限 $f(t-0)$ 、右極限 $f(t+0)$ が存在する。

また、すべての $t > N$ に対して、

$$|f(t)| < Me^{\gamma t} \quad (2.2)$$

となる定数 $M > 0$ と γ が存在するとき、 $f(t)$ は $t \rightarrow \infty$ のとき指数位 γ の関数、あるいは指数位数という。次の指数位数についてのラプラス変換の存在定理が成り立つ。

「 $f(t)$ が任意の有限な区間 $0 \leq t \leq N$ で区分的に連続で、 $t > N$ で指数位 γ ならば、そのラプラス変換 $F(s)$ がすべての $s > \gamma$ に対して存在する。」

証明

任意の数 $N > 0$ にたいして

$$\int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt = \int_0^N e^{-st} f(t) dt + \int_N^{\infty} e^{-st} f(t) dt$$

右辺第1項の積分は存在する。第2項は

$$\begin{aligned} \left| \int_N^{\infty} e^{-st} f(t) dt \right| &\leq \int_N^{\infty} |e^{-st} f(t)| dt \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt \\ &\leq \int_0^{\infty} e^{-st} M e^{\gamma t} dt = \frac{M}{s - \gamma} \end{aligned}$$

となり、 $s > \gamma$ でラプラス変換が存在する。

これはラプラス変換が存在する1つの十分条件であり、この条件を満たさない場合でもラプラス変換が存在しうる。

つぎのラプラス変換の存在範囲についての定理が成り立つ。

「関数 $f(t) (t > 0)$ のラプラス変換 $\mathcal{L}[f] = F(s)$ が $s = s_0$ に対して存在すれば、任意の $s > s_0$ にたいして存在する。」

ここでは積分を絶対収束（可積分性）に限定して議論する。

$s = s_0 + \Delta s$, $\Delta s > 0$ とおけば $|e^{-st}f(t)| \leq |e^{-s_0t}f(t)|$ だから $s \geq s_0$ で可積分となる。 s, s_0 が複素数の時は, $Re(s) > Re(s_0)$ とすればよい。

この定理によって $\mathcal{L}[f]$ が $s > \alpha$ で存在し, $s < \alpha$ で存在しない α が一意的に決まる。実際, $|e^{-st}f(t)|$ が可積分である s の下限を α とする。 $s > \alpha$ のとき, α の定義から $|e^{-s't}f(t)|$ が可積分であるような s' が α と s の間に存在する。したがって $|e^{-st}f(t)|$ も可積分である。また $s < \alpha$ のとき, s' は s と α の間にあるとすると, $|e^{-st}f(t)|$ は可積分でない。もしそうでないならば, $|e^{-s't}f(t)|$ も可積分となるが, これは α の定義に反する。この分かれ目の数 α を収束座標という。収束座標が有限値の時, ラプラス変換が存在すると言える。また収束座標が $-\infty$ の時は, すべての s について, ラプラス変換が存在することになる。

2.2 逆ラプラス変換

$f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とする, すなわち $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ ならば, $f(t)$ を $F(s)$ の逆ラプラス変換といい, $f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ と表す。関数の範囲を広くとると, 逆ラプラス変換は一意性を失う。

すべての $t > 0$ に対して,

$$\int_0^t \mathcal{N}(u)du = 0 \quad (2.3)$$

となる関数 $\mathcal{N}(t)$ を零関数 (null function) という。可算無限個の点を除いて 0 となる関数は零関数となる。定義から $\mathcal{L}[\mathcal{N}(t)] = 0$ となり, $F(s)$ の 1 つの逆ラプラス変換を $f(t)$ とすると, $f(t) + \mathcal{N}(t)$ も $F(s)$ の逆ラプラス変換となる。こうした任意性を排除すれば逆ラプラス変換の一意性が保証される。

逆ラプラス変換の一意性 (レルヒの定理)

「どの有限な区間 $0 \leq t \leq N$ でも区分的に連続で, $t > N$ にたいし指数位数である関数 $f(t)$ に限定すれば, $F(s)$ の逆ラプラス変換, すなわち $\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$ は一意的である。」

区分的に連続な 2 つの関数 $f(t), g(t)$ が存在し, その収束域においてラプラス変換が一致すれば, 関数 $f(t), g(t)$ はそれらの連続点において一致するからそれを簡単に $\mathcal{L}^{-1}[F(s)]$ と表記しようというものである。

2.3 ラプラス変換の公式一覧

よく使うラプラス変換の公式をまとめておく。

$$F(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^{\infty} e^{-st}f(t)dt$$

	法則	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$
1	線形	$\lambda F(s) + \mu G(s)$	$\lambda f(t) + \mu g(t)$
2	相似	$F(\lambda s)$ $F\left(\frac{s}{\lambda}\right)$	$\frac{1}{\lambda} f\left(\frac{t}{\lambda}\right)$ $\lambda f(\lambda t)$
3	第1移動	$e^{-\lambda s} F(s)$	$f(t - \lambda) U(t - \lambda) \quad : \lambda > 0$
4	第2移動	$e^{\lambda s} F(s) - e^{\lambda s} \int_0^\lambda f(t) e^{-st} dt$	$f(t + \lambda) \quad : \lambda > 0$
5	像の移動	$F(s - \lambda)$	$e^{\lambda t} f(t)$
6	積分	$\frac{1}{s} F(s)$ $\frac{1}{s^n} F(s)$	$\int_0^t f(\tau) d\tau$ $\int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}$ $= \int_0^t \frac{(t - \tau)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau$
7	微分	$sF(s) - f(+0)$ $sF(s) - f(+0) - e^{-as} \{f(a+) - f(a-)\}$ $s^n F(s) - f(0)s^{n-1} - f'(0)s^{n-2} - \cdots$ $-f^{(n-1)}(0)s - f^{(n-1)}(0)$	$f'(t) \quad : f(t) \text{ は連続}$ $f'(t) \quad : f(t) \text{ は } t = a \text{ で不連続}$ $f^{(n)}(t)$ $: f(t), f'(t), \dots, f^{(n-1)}(t) \text{ は連続}$
8	像の微分	$F^{(n)}(s)$	$(-t)^n f(t)$
9	像の積分	$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$ $\int_s^\infty \int_{\sigma_{n-1}}^\infty \cdots \int_{\sigma_1}^\infty F(\sigma) d\sigma d\sigma_1 \cdots d\sigma_{n-1}$	$\frac{1}{t} f(t)$ $\frac{1}{t^n} f(t)$
10	合成積	$F(s)G(s)$	$f(t) * g(t)$
11	周期関数	$\frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$	$f(t) = f(t + T)$
12	分数関数	$\frac{P(s)}{Q(s)}$ $P(s) : n - 1 \text{ 次以下の多項式}$ $Q(s) = (s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n) : \text{各 } \alpha_i \text{ は異なる}$	$\sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t}$ ヘビサイドの展開公式
13	極限定理	初期値定理 終期値定理	$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0$ $\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$ $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) \quad : f(t) \text{ は連続}$
14	その他	$F(\log s)$ $\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-s^2/4u} F(u) du$ $\frac{F(\sqrt{s})}{\sqrt{s}}$ $\frac{F(1/s)}{s^{n+1}}$	$\int_0^\infty \frac{t^{u-1} f(u)}{\Gamma(u)} du$ $f(t^2)$ $\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-u^2/4t} f(u) du$ $t^{n/2} \int_0^\infty u^{-n/2} J_n(2\sqrt{ut}) f(u) du$

ただし $U(t) = 0(t \leq 0), 1(t > 0)$ はヘビサイドの単位関数

2.3.1 合成積 (たたみこみ)

関数 $f(t), g(t)$ に対して t の関数

$$f * g = \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \quad (t > 0) \quad (2.4)$$

を $f(t), g(t)$ の「合成積」あるいは「たたみこみ」という。

合成積には次の性質がある。

- (1) $f * g = g * f$ (交換法則)
- (2) $f * (g_1 + g_2) = f * g_1 + f * g_2$ (分配則)
- (3) $(f * g) * h = f * (g * h)$ (結合則)

証明

$$\begin{aligned} f * g &= \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = \int_t^0 f(t')g(t-t')(-dt') \quad (t-\tau=t') \\ &= \int_0^t g(t-t')f(t')dt' = g * f \end{aligned}$$

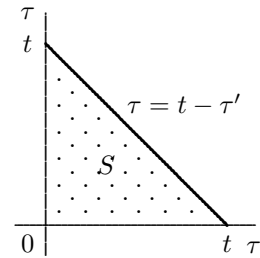
$$\begin{aligned} f * (g_1 + g_2) &= \int_0^t f(t-\tau)(g_1(\tau) + g_2(\tau))d\tau \\ &= \int_0^t f(t-\tau)g_1(\tau)d\tau + \int_0^t f(t-\tau)g_2(\tau)d\tau = f * g_1 + f * g_2 \end{aligned}$$

また

$$(f * g)_t = \int_0^t f(t-\tau)g(\tau)d\tau = F(t)$$

とおくと

$$\begin{aligned} (f * g) * h &= \int_0^t F(t-\tau')h(\tau')d\tau' \\ &= \int_0^t \int_0^{t-\tau'} f(t-\tau'-\tau)g(\tau)d\tau h(\tau')d\tau' \\ &= \int \int_S f(t-\tau'-\tau)h(\tau')g(\tau)d\tau d\tau' \\ &= \int_0^t \int_0^{t-\tau} f(t-\tau'-\tau)h(\tau')d\tau' g(\tau)d\tau \\ &= (f * h) * g \end{aligned}$$



したがって

$$(f * g) * h = (g * f) * h = (g * h) * f = f * (g * h)$$

「合成積定理」を先に証明しておくとし、「結合則」は $\mathcal{L}[(f * g) * h] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] \cdot \mathcal{L}[h] = \mathcal{L}[f * (g * h)]$ を逆変換して証明できる。

つぎの「合成積定理」が成り立つ。

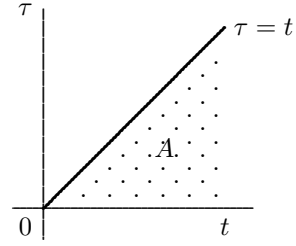
$$\mathcal{L}[f * g] = \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] \tag{2.5}$$

証明

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] &= \int_0^\infty e^{-su} f(u)du \int_0^\infty e^{-sv} g(v)dv \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-s(u+v)} f(u)g(v)dudv \end{aligned}$$

ここで $u + v = t, v = \tau$ の変数変換をおこなう。 $u = t - \tau \geq 0, v \geq 0$ だから (t, τ) の変域は図の領域 A となる。

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[f] \cdot \mathcal{L}[g] &= \int \int_A e^{-st} f(t - \tau) g(\tau) dt d\tau \\ &= \int_0^\infty e^{-st} \left\{ \int_0^t f(t - \tau) g(\tau) d\tau \right\} dt \\ &= \mathcal{L}[f * g]\end{aligned}$$



合成積の例は

$$t * e^t = e^t - t - 1, \cos \lambda t * \sin \lambda t = \frac{t}{2} \sin \lambda t, 1 * f(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$$

などであるが、ラプラス変換全体の世界が合成積定理によって飛躍的に広がる。

合成積定理によって

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s^2(s^2 + \lambda^2)} \right] &= t * \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t = \frac{1}{\lambda^2} (t - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda t) \\ \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \lambda^2)^2} \right] &= \frac{1}{2\lambda^2} (\frac{1}{\lambda} \sin \lambda t - t \cos \lambda t), \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \lambda^2)^2} \right] = \frac{1}{2\lambda} t \sin \lambda t\end{aligned}$$

および、順次

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s^2 + \lambda^2)^n} \right], \quad \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{s}{(s^2 + \lambda^2)^n} \right]$$

がもとまる。

微分方程式

$$x' \lambda x = f(t), x(0) = a \longrightarrow x(t) = a e^{-\lambda t} + \int_0^t e^{-\lambda(t-\tau)} f(\tau) d\tau$$

$$x'' + \lambda^2 x = f(t), x(0) = a, x'(0) = b \longrightarrow x(t) = a \cos \lambda t + \frac{b}{\lambda} \sin \lambda t + \frac{1}{\lambda} \int_0^t \sin \lambda(t - \tau) f(\tau) d\tau$$

などが関数 $f(t)$ のままで解ける。

2.3.2 ラプラス変換の公式

ここでは表に掲げたラプラス変換の公式のいくつかについて説明しておく。他は各自自分で確認しておいて欲しい。

微分、積分に関する次の定理が成り立つ。

$f(t)$ が $(0, \infty)$ で連続で $f(+0)$ が存在し、指数位の関数であり、 $f'(t)$ が $[0, \infty)$ で区分的に連続で、指数位の関数の時、

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(+0) \tag{2.6}$$

$$\mathcal{L}[f^{(n)}(t)] = s^n F(s) - f(+0)s^{n-1} - f'(+0)s^{n-2} - \dots - f^{(n-1)}(+0) \tag{2.7}$$

$f(t)$ が $[0, \infty)$ で区分的に連続で、指数位 α の関数である時、

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s} \mathcal{L}[f(t)], \quad (s > \alpha) \tag{2.8}$$

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \dots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \dots d\tau_{n-1} \right] = \mathcal{L} \left[\int_0^t \frac{(t - \tau)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau \right] = \frac{1}{s^n} F(s) \tag{2.9}$$

証明

はじめに微分法則を証明しておく。

$f(0) = f(+0)$ と定義すると, $f(t)$, e^{-st} は $[0, \eta]$ で連続, $f'(t)$, $-se^{-st}$ は $[0, \eta]$ で区分的に連続より, 部分積分の公式が成り立ち,

$$\begin{aligned} \int_0^\eta e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} f(t)]_0^\eta - \int_0^\eta (-se^{-st}) f(t) dt \\ &= e^{-s\eta} f(\eta) - f(+0) + s \int_0^\eta e^{-st} f(t) dt \end{aligned}$$

仮定から $|f(\eta)| \leq Me^{\alpha\eta}$ ($0 < \eta < \infty$) となる M と α が存在する。よって右辺第1項は $|f(\eta)e^{-s\eta}| \leq Me^{-(s-\alpha)\eta}$ 。よって $\eta \rightarrow \infty$ で零に, 第3項はラプラス変換の存在定理により $s\mathcal{L}[f(t)]$ になる。また (2.7) は (2.6) を繰り返せばよい。

不連続があるとき, 例えば $f(t)$ が $t = a$ で不連続の時

$$\begin{aligned} \int_0^\eta e^{-st} f'(t) dt &= [e^{-st} f(t)]_0^{a-0} + [e^{-st} f(t)]_{a+0}^\eta - \int_0^\eta (-se^{-st}) f(t) dt \\ &= e^{-s\eta} f(\eta) - f(+0) + s \int_0^\eta e^{-st} f(t) dt - \{f(a+0) - f(a-0)\}e^{-as} \end{aligned}$$

したがって

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t)] - f(+0) - \{f(a+0) - f(a-0)\}e^{-as}$$

となる。

積分法則は微分法則を用いて証明できる。

$g(t) = \int_0^t f(\tau) d\tau$ とおくと, $g(t)$ は $(0, \infty)$ で連続で

$$|g(t)| \leq \int_0^t |f(\tau)| d\tau \leq M \int_0^t e^{\alpha\tau} d\tau = \frac{M}{\alpha}(e^{\alpha t} - 1) \leq \frac{M}{\alpha}e^{\alpha t}$$

だから $g(t)$ は指数位。また $g(+0) = 0$, さらに $g'(t) = f(t)$ は $[0, \infty)$ で区分的に連続。よって微分法則より

$$\mathcal{L}[f(t)] = \mathcal{L}[g'(t)] = s\mathcal{L}[g(t)] - g(+0) = s\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right]$$

また (2.9) は

$$g(t) = \int_0^t \int_0^{\tau_{n-1}} \cdots \int_0^{\tau_1} f(\tau) d\tau d\tau_1 \cdots d\tau_{n-1}$$

に繰り返し (2.8) を適用すればよい。後述する合成積定理を用いると

$$\mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{(t-\tau)^{(n-1)}}{(n-1)!} f(\tau) d\tau\right] = \mathcal{L}\left[\frac{t^{(n-1)}}{(n-1)!} * f(t)\right] = \frac{1}{s^n} F(s)$$

となり, n 重積分は1重積分に還元できる。

像の微分, 積分定理は簡単である。

$$F'(s) = \frac{d}{ds} \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt = \int_0^\infty (-t)e^{-st} f(t) dt = -\mathcal{L}[tf(t)]$$

$$\int_s^\infty F(\sigma) d\sigma = \int_s^\infty \int_0^\infty e^{-\sigma t} f(t) dt d\sigma = \int_0^\infty f(t) \left[\int_s^\infty e^{-\sigma t} d\sigma \right] dt = \int_0^\infty e^{-st} \frac{f(t)}{t} dt = \mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right]$$

ヘビサイドの展開公式

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{P(s)}{Q(s)} \right] = \sum_{k=1}^n \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} e^{\alpha_k t} \quad (2.10)$$

が成立する。ただし $P(s)$: $n-1$ 次以下の多項式, $Q(s) = (s - \alpha_1) \cdots (s - \alpha_n)$: 各 α_i は異なるとする。

証明

部分分数分解は

$$\frac{P(s)}{Q(s)} = \frac{A_1}{s - \alpha_1} + \frac{A_2}{s - \alpha_2} + \cdots + \frac{A_n}{s - \alpha_n}$$

となるが, 両辺に $s - \alpha_k$ をかけて $s \rightarrow \alpha_k$ とすると

$$\begin{aligned} A_k &= \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \frac{P(s)}{Q(s)} (s - \alpha_k) = \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \left\{ \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right\} \\ &= \lim_{s \rightarrow \alpha_k} P(s) \lim_{s \rightarrow \alpha_k} \left\{ \frac{s - \alpha_k}{Q(s)} \right\} = \frac{P(\alpha_k)}{Q'(\alpha_k)} \end{aligned}$$

となる。

周期関数については次の定理が成り立つ。

周期 T の周期関数 $f(t)$ のラプラス変換は

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt, \quad f(t) = f(t + T) \quad (2.11)$$

証明

$f(t - T) = f(t)$ より

$$f(t) - f(t - T)U(t - T) = f(t)\{U(t) - U(t - T)\}$$

両辺をラプラス変換して

$$F(s) - e^{-Ts}F(s) = \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

したがって

$$F(s) = \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} f(t) dt$$

となる。これはまた次のようにも証明できる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_T^{2T} e^{-st} f(t) dt + \cdots + \int_{nT}^{(n+1)T} e^{-st} f(t) dt + \cdots \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + \int_0^T e^{-s(\tau+T)} f(\tau + T) d\tau \\ &\quad + \cdots + \int_0^T e^{-s(\tau+nT)} f(\tau + nT) d\tau + \cdots \\ &= \int_0^T e^{-st} f(t) dt + e^{-Ts} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \cdots + e^{-nTs} \int_0^T e^{-s\tau} f(\tau) d\tau + \cdots \\ &= \int_0^T f(t) dt \{1 + e^{-Ts} + \cdots + e^{-nTs} + \cdots\} = \int_0^T f(t) dt \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \end{aligned}$$

展開の各項は, 各 1 周期の寄与に対応している。

極限定理を調べる。

$\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とすると、つぎの定理が成り立つ

$$\lim_{s \rightarrow \infty} F(s) = 0 \quad (2.12)$$

また、つぎの「初期値定理」が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow +0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s) \quad (2.13)$$

証明

$f'(t)$ が区分的に連続で指数位ならば

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt = 0$$

よって

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(+0)$$

の両辺の $s \rightarrow \infty$ の極限をとればよい。 $f'(t)$ が $t = t_0$ で不連続であっても、 $(f(t_0+0) - f(t_0-0))e^{-t_0s}$ が現れるが、これは $s \rightarrow \infty$ で 0 となる。

さらにつぎの「終期値定理」が成り立つ。

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s), \quad f(t) \text{ は連続} \quad (2.14)$$

証明

$s \rightarrow 0$ のときラプラス変換 $\mathcal{L}[f'(t)]$ の極限は

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \int_0^{\infty} e^{-st} f'(t) dt &= \int_0^{\infty} f'(t) dt = \lim_{P \rightarrow \infty} \int_0^P f'(t) dt \\ &= \lim_{P \rightarrow \infty} (f(P) - f(+0)) = \lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(+0) \end{aligned}$$

よって $\mathcal{L}[f'(t)] = sF(s) - f(+0)$ の両辺の $s \rightarrow 0$ の極限より

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) - f(+0) = \lim_{s \rightarrow 0} sF(s) - f(+0)$$

となる。

役立つ公式を証明しておこう。

$$F(\log s) = \int_0^{\infty} e^{-\log s \cdot t} f(t) dt = \int_0^{\infty} s^{-t} f(t) dt$$

より

$$\mathcal{L} \left[\int_0^{\infty} \frac{t^{u-1} f(t)}{\Gamma(u)} dt \right] = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-st} t^{u-1} dt \frac{f(t)}{\Gamma(u)} dt = \int_0^{\infty} \frac{f(t)}{s^u} dt = F(\log s) \quad (2.15)$$

後で証明するように

$$\mathcal{L} \left[\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} \right] = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \quad (2.16)$$

が成り立つ。いま $t^2 = u$ とおくと

$$\mathcal{L}[f(t^2)] = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t^2) dt = \int_0^{\infty} e^{-s\sqrt{u}} f(u) \frac{du}{2\sqrt{u}} = \int_0^{\infty} \frac{e^{-s\sqrt{u}} f(u)}{2\sqrt{u}} du$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-s^2/4u} F(u) du &= \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-s^2/4u} \int_0^\infty e^{-ut} f(t) dt du \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty f(t) \int_0^\infty e^{-tu} \frac{e^{-s^2/4u}}{\sqrt{\pi u}} du dt = \int_0^\infty \frac{e^{-s\sqrt{t}} f(t)}{2\sqrt{t}} dt = \mathcal{L}[f(t^2)] \end{aligned} \quad (2.17)$$

また

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^\infty e^{-u^2/4t} f(u) du\right] &= \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-st} \frac{e^{-u^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} dt f(u) du \\ &= \int_0^\infty \frac{e^{-u\sqrt{s}} f(u)}{\sqrt{s}} du = \frac{1}{\sqrt{s}} F(\sqrt{s}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

ベッセル関数を含む公式は 第 6.2 小節に記す。

2.4 簡単なラプラス変換, 逆ラプラス変換の練習問題

はじめに, ラプラス変換の練習問題。

- 1 線形性 $\mathcal{L}[af(t) + bg(t)] = a\mathcal{L}[f(t)] + b\mathcal{L}[g(t)]$ の確認
 $f(t) = 3t^2 + 2t + 5, \quad f(t) = \cosh at$
- 2 $\mathcal{L}[e^{at} f(t)] = F(s - a)$ の確認
 $\mathcal{L}[e^{at} \cos \omega t] = \frac{s - a}{(s - a)^2 + \omega^2}$
- 3 $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f] - f(0+), \quad \mathcal{L}[f''(t)] = s^2\mathcal{L}[f] - sf(0+) - f'(0)$ の確認
 $f(t) = t^2$ のとき, $\mathcal{L}[t''] = s^2\mathcal{L}[t^2] - sf(0) - f'(0)$
 $f'(t) = 2t, f'' = 2$ だから $\mathcal{L}[2] = s^2\mathcal{L}[t^2] - s \cdot 0 - 0, \quad \mathcal{L}[t^2] = \frac{1}{s^2} \cdot \frac{2}{s} = \frac{2}{s^3}$
 $f(t) = \cos \omega t$ のとき, $f''(t) = -\omega^2 \cos \omega t$
 $s^2\mathcal{L}[\cos \omega t] - s \cdot f(0) - f'(0) = -\omega^2 [\cos \omega t], \quad (s^2 + \omega^2)\mathcal{L}[\cos \omega t] = s, \quad \mathcal{L}[\cos \omega t] = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$
- 4 $\mathcal{L}\left[\int_0^t f(\tau) d\tau\right] = \frac{1}{s} F(s)$ の確認
 $\mathcal{L}\left[\int_0^t \cos \lambda \tau d\tau\right] = \frac{1}{s} \frac{s}{s^2 + \lambda^2} = \frac{1}{s^2 + \lambda^2}$
 $(= \mathcal{L}\left[\frac{\sin \lambda t}{\lambda}\right] = \frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2})$
- 5 $\mathcal{L}[-tf(t)] = \frac{d}{ds} F(s), \quad \mathcal{L}[(-t)^n f(t)] = \frac{d^n}{ds^n} F(s)$
 $f(t) = \sin \lambda t, \quad \mathcal{L}[f(t)] = \frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}$
 $\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{d}{ds} \left(\frac{\lambda}{s^2 + \lambda^2}\right) = \frac{-2\lambda s}{(s^2 + \lambda^2)^2}, \quad \mathcal{L}[t^2 f(t)] = \frac{2\lambda(3s^2 - \lambda^2)}{(s^2 + \lambda^2)^3}$
- 6 $te^t \sin 2t \rightarrow \frac{4(s-1)}{(s^2 - 2s + 5)^2}$
- 7 $\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_s^\infty F(\sigma) d\sigma$ の確認
 $\mathcal{L}\left[\frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{t}\right] = \int_s^\infty \left(\frac{1}{\sigma - \lambda} - \frac{1}{\sigma - \mu}\right) d\sigma = \log \frac{s - \mu}{s - \lambda}$

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin \omega t}{t}\right] = \int_s^\infty \frac{\omega}{\sigma^2 + \omega^2} d\sigma = \left[\tan^{-1} \frac{\sigma}{\omega}\right]_s^\infty = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} \frac{s}{\omega} = \tan^{-1} \frac{\omega}{s}$$

$\mathcal{L}\left[\frac{\cos \omega t}{t}\right]$ は存在しない。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{2(1 - \cos \omega t)}{t}\right] &= 2 \int_s^\infty \left(\frac{1}{\sigma} - \frac{\sigma}{\sigma^2 + \omega^2}\right) d\sigma = [2 \log \sigma - \log \sigma^2 + \omega^2]_s^\infty \\ &= \log \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \omega^2} = \log\left(1 + \frac{\omega^2}{s^2}\right) \end{aligned}$$

8 $\mathcal{L}[f(t-a)U(t-a)] = e^{-as}F(s)$ の確認

$$f(t) = \begin{cases} 2 & (0 < t < \pi) \\ 0 & (\pi < t < 2\pi) \\ \sin t & (t > 2\pi) \end{cases} = 2\{U(t) - U(t-2\pi)\} + \sin(t-\pi)U(t-2\pi)$$

$$\mathcal{L}[f(t)] = \frac{2}{s} - \frac{2e^{-2\pi s}}{s} + \frac{e^{-2\pi s}}{s^2 + 1}$$

また、簡単な逆ラプラス変換の練習問題も掲げておこう。

1 $\frac{s+3}{2s^2+4s+20} \rightarrow \frac{1}{2}e^{-t}\left(\cos 3t + \frac{2}{3}\sin 3t\right)$

2 $\frac{e^{-2s}}{s+3} \rightarrow e^{-3(t-2)}U(t-2)$

3 $\frac{1}{(s-1)^2(s+2)} \rightarrow \frac{1}{9}(e^t(3t-1) + e^{-2t})$

4 $\frac{s}{(s^2+4)^2}$ に合成法則を適用せよ。 $\rightarrow \frac{1}{4}t \sin 2t$

5 $\frac{1}{s(s^2+\lambda^2)^2} \rightarrow \frac{1}{\lambda^4}\left(1 - \cos \lambda t - \frac{1}{2}t \sin \lambda t\right)$

6 $\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s^4+4a^4}\right] = \frac{1}{4a^3}(\sin at \cosh at - \cos at \sinh at)$

$$\frac{1}{s^4+4a^4} = \frac{1}{(s-a)^2+a^2} \cdot \frac{1}{(s+a)^2+a^2} = \frac{1}{8a^3} \left\{ \frac{-s+2a}{(s-a)^2+a^2} + \frac{s+2a}{(s+a)^2+a^2} \right\} \text{ を用いる。}$$

また $\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f] - f(0)$ より

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^4+4a^4}\right] = \frac{1}{2a^2} \sin at \sinh at$$

2.5 主な関数のラプラス変換一覧

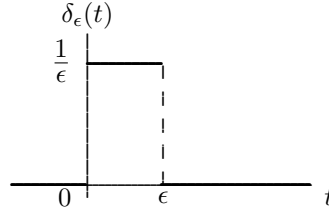
よく使う関数のラプラス変換を示しておく。

	$F(s) = \mathcal{L}[f(t)]$	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(s)]$	収束座標
0	0	$\mathcal{N}(t)$: 零関数	$-\infty$
1	1	$\delta(t)$	$-\infty$
2	$\frac{1}{s}$	$U(t) = 1$	0
3	$\frac{1}{s^n} (n = 1, 2, \dots)$	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$	0
4	$\frac{1}{s^\lambda} (\lambda > 0)$	$\frac{t^{\lambda-1}}{\Gamma(\lambda)}$	0
5	$\frac{1}{s-a}$	e^{at}	a
6	$\frac{s}{s^2+a^2}$	$\cos at$	0
7	$\frac{a}{s^2+a^2}$	$\sin at$	0
8	$\frac{s}{s^2-a^2}$	$\cosh at$	$ a $
9	$\frac{1}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{1}{2a^3}(\sin at - at \cos at)$	0
10	$\frac{s}{(s^2+a^2)^2}$	$\frac{t}{2a} \sin at$	0
11	$\frac{a}{s^2-a^2}$	$\sinh at$	$ a $
12	$e^{-\lambda s} (\lambda > 0)$	$\delta(t - \lambda)$	$-\infty$
13	$\frac{1}{s} e^{-a\sqrt{s}}$	$\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)$	0
14	$\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$	$\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}$	0
15	$e^{-a\sqrt{s}}$	$\frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}$	0
16	$\frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{s^2/4} \operatorname{erfc}(s/2)$	e^{-t^2}	$-\infty$
17	$\frac{e^{s^2/4}}{s} \operatorname{erfc}\left(\frac{s}{2}\right)$	$\operatorname{erf}(t)$	0
18	$\frac{1}{s\sqrt{s+1}}$	$\operatorname{erf}(\sqrt{t})$	0
19	$\frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$	$\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}$	0
20	$\frac{e^{-a/s}}{s^{3/2}}$	$\frac{\sin 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi a}}$	0
100	$\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}}$	$J_0(at)$	0
101	$\frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+1}} (\nu > -1, s > 0)$	$J_\nu(t)$	0
102	$\frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$tJ_0(at)$	0
103	$\frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$	$tJ_1(at)$	0

ただし $U(t) = 0(t \leq 0), 1(t > 0)$ はヘビサイドの単位関数

いくつかの公式の説明をしておこう。はじめにデルタ関数の説明をしておく。図のような関数 $\delta_\epsilon(t)$ を考える。

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & \epsilon < 0 \\ \frac{1}{\epsilon} & 0 < t < \epsilon \\ 0 & \epsilon < t \end{cases}$$



$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta_\epsilon(t) dt = 1$$

連続な関数 $f(t)$ について

$$\begin{aligned} \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta_\epsilon(t) dt - f(0) \right| &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(t) - f(0)) \delta_\epsilon(t) dt \right| = \left| \int_0^\epsilon (f(t) - f(0)) \delta_\epsilon(t) dt \right| \\ &\leq \max_{0 \leq t \leq \epsilon} (|f(t) - f(0)|) \left| \int_0^\epsilon \delta_\epsilon(t) dt \right| = \max_{0 \leq t \leq \epsilon} (|f(t) - f(0)|) \rightarrow 0 \quad (\epsilon \rightarrow 0) \end{aligned}$$

が成り立つ。そこで

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \delta_\epsilon(t)$$

と定義すると、連続な関数 $f(t)$ にたいして

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t) dt = f(0), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - a) dt = f(a)$$

となる。 $\delta(t)$ はディラックのデルタ関数と呼ばれる。 $\delta(t)$ は通常の間数ではなく、後で述べる超関数によって厳密に定義される。また単位関数 $U(t)$ とは

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) U(t - \tau) d\tau = U(t), \quad U'(t) = \delta(t)$$

の関係にある。よって

$$\mathcal{L}[\delta(t - a)] = \int_0^\infty e^{-st} \delta(t - a) dt = e^{-as}$$

となる。

$$\begin{aligned} \mathcal{L}\left[\frac{e^{-1/t}}{\sqrt{t}}\right] &= \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} \exp(-st - \frac{1}{t}) dt = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \exp(-\tau^2 - \frac{s}{\tau^2}) d\tau = \frac{2}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \exp\{-(\tau - \sqrt{s}/\tau)^2 - 2\sqrt{s}\} d\tau \\ &= \begin{cases} \frac{2 \exp(-2\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \exp\{-(\tau - \sqrt{s}/\tau)^2\} d\tau \\ \frac{2 \exp(-2\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \int_0^\infty \frac{\sqrt{s}}{\sigma^2} \exp\{-(\sqrt{s}/\sigma - \sigma)^2\} d\sigma, \quad (\sigma = \frac{\sqrt{s}}{\tau}) \end{cases} \\ &= \frac{\exp(-2\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \int_0^\infty (1 + \frac{\sqrt{s}}{\sigma^2}) \exp\{-(\sqrt{s}/\sigma - \sigma)^2\} d\sigma = \frac{\exp(-2\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \int_{-\infty}^\infty \exp(-\xi^2) d\xi = \frac{\sqrt{\pi} \exp(-2\sqrt{s})}{\sqrt{s}} \end{aligned}$$

相似法則を用いて

$$\mathcal{L}\left[\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}}\right] = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}}$$

また、両辺を a で微分したもの、また結果の原像の積分などから

$$\mathcal{L}\left[\frac{ae^{-a^2/4t}}{2\sqrt{\pi t^3}}\right] = e^{-a\sqrt{s}}, \quad \mathcal{L}\left[\operatorname{erfc}\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right)\right] = e^{-a\sqrt{s}}/s$$

が得られる。 $f(t) = e^{-t}$ に $f(t^2)$ の変換の公式を適用して

$$\mathcal{L}[e^{-t^2}] = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{u}} e^{-s^2/4u} \frac{1}{u+1} du = \frac{s}{2\sqrt{\pi}} \int_0^\infty \frac{e^{-x^2} dx}{x^2 + (s/2)^2}$$

ここで (6) 節の公式 を用いると

$$\mathcal{L}[e^{-t^2}] = \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{s^2/4} \operatorname{erfc}(s/2)$$

また

$$\mathcal{L}[\operatorname{erf}(t)] = \mathcal{L}\left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t e^{-\tau^2} d\tau\right] = \frac{2}{s\sqrt{\pi}} \mathcal{L}[e^{-t^2}] = \frac{e^{s^2/4}}{s} \operatorname{erfc}(s/2)$$

$$\mathcal{L}[\operatorname{erf}(\sqrt{t})] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau dt$$

ここで $\frac{d}{dt} \int_0^{\sqrt{t}} e^{-\tau^2} d\tau = e^{-t}/2\sqrt{t}$ を考慮し、部分積分を適用すると、

$$\mathcal{L}[\operatorname{erf}(\sqrt{t})] = \frac{1}{\sqrt{\pi}s} \int_0^\infty e^{-st} \frac{e^{-t}}{\sqrt{t}} dt = \frac{1}{s\sqrt{s+1}}$$

$\sqrt{t} = x$ とおき、Laplace の積分 (6 節参) を用いると

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}}\right] = \int_0^\infty e^{-st} \frac{\cos \sqrt{t}}{\sqrt{t}} dt = 2 \int_0^\infty e^{-sx^2} \cos x dx = \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} e^{-1/4s}$$

したがって相似法則により

$$\mathcal{L}\left[\frac{\cos 2\sqrt{at}}{\sqrt{\pi t}}\right] = \frac{e^{-a/s}}{\sqrt{s}}$$

また

$$\mathcal{L}[\sin \sqrt{t}] = \mathcal{L}\left[\int_0^t \frac{\cos \sqrt{\tau}}{2\sqrt{\tau}} d\tau\right] = \frac{1}{2} \frac{\sqrt{\pi} e^{-1/4s}}{s^{3/2}}$$

が成り立つ。

2.5.1 周期関数の取り扱い

いくつかの周期関数

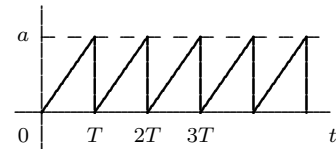
1 ノコギリ型周期関数

$$f(t) = \frac{a}{T}t \quad (0 < t < T), \quad f(t) = f(t + nT) \quad (2.19)$$

とする。
そのラプラス変換は

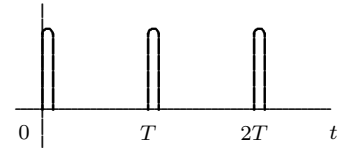
$$F(s) = \int_0^\infty e^{-st} \left(\frac{a}{T}t\right) dt = a \frac{1}{Ts^2} - a \frac{e^{-sT}}{s(1 - e^{-Ts})} \quad (2.20)$$

となる。



2 パルス型周期関数

$$f(t) = A \sum_{n=0}^{\infty} \delta(t - nT) \quad (2.21)$$

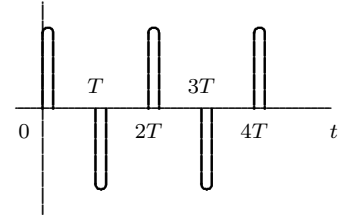


とする。
そのラプラス変換は

$$F(s) = \frac{A}{1 - e^{-Ts}} \quad (2.22)$$

となる。同様に

$$f(t) = A \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t - nT) \quad (2.23)$$



とする。

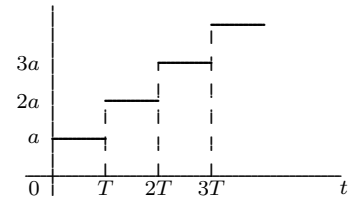
そのラプラス変換は

$$F(s) = \frac{A}{1 + e^{-Ts}} \quad (2.24)$$

となる。

3 一部に周期関数を含む関数 $f(t)$ を

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{a}{T}t + a + g(t) \\ g(t) &= -\frac{a}{T}t \quad (0 < t < T), \quad g(t) = g(t + nT) \end{aligned} \quad (2.25)$$



とする。

そのラプラス変換は

$$\begin{aligned} F(s) &= \int_0^{\infty} e^{-st} \left(\frac{a}{T}t + a \right) dt + \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \int_0^T e^{-st} \left(-\frac{a}{T}t \right) dt \\ &= \frac{a}{s(1 - e^{-Ts})} \end{aligned} \quad (2.26)$$

となる。

2.6 定数係数線形常微分方程式への適用 (問題のみ)

1 $x' + 2x = e^{-t}, x(0) = 3 \rightarrow x = 2e^{-2t} + e^{-t}$

2 $x'' - x' - 6x = 0, x(0) = 1, x'(0) = -1 \rightarrow x = \frac{1}{5}(4e^{-2t} + e^{3t})$

3 $x'' - 5x' + 6x = e^t, x(0) = x'(0) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{2}(e^{3t} - 2e^{2t} + e^t)$

4 $x'' + 6x' + 10x = 0, x(0) = x'(0) = 2 \rightarrow x = 2e^{-3t}(\cos t + 4 \sin t)$
 $x'' + 4x' + 5x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 0 \rightarrow x = e^{-2t}(\cos t + 2 \sin t)$

- 5 $x'' + 3x' + 2x = 2te^{-t}$, $x(0) = x'(0) = 1 \rightarrow x = e^{-t}(5 - 2t + t^2) - 4e^{-2t}$
- 6 $x'' + 4x = U(t - 3)$, $x(0) = x'(0) = 0 \rightarrow x = \frac{1}{4}(1 - \cos 2(t - 3))U(t - 3)$
- 7 $x'' + 4x' + 5x = 40 \cos 5t$, $x(0) = 0, x'(0) = 1 \rightarrow x = e^{-2t}(\cos t - 2 \sin t) - \cos 5t + \sin 5t$
- 8 $x'' + 4x = I\delta(t - a)$, $x(0) = x'(0) = 0 \rightarrow x = \frac{I}{2} \sin 2(t - a)U(t - a)$
- 9 $x'' + 4x = F \cdot U(t - a)$, $x(0) = x'(0) = 0 \rightarrow x = \frac{F}{4}(1 - \cos 2(t - a))U(t - a)$
- 10 一般解
 $x'' - 3x' + 2x = 0$, $x(0) = a, x'(0) = b \rightarrow x = (5a - b)e^{2t} + (-2a + b)e^t$
- 11 境界値問題 $x'' - 3x' + 2x = 0$, $x(0) = 0, x'(1) = 1$
 $x'(0) = a$ とおく。
 $s^2X - a - 3sX + 2X = 0$, $X = \frac{a}{s-2} - \frac{a}{s-1} \rightarrow x = a(e^{2t} - e^t)$
 $x(1) = 1$ より $1 = a(e^2 - e)$, $a = \frac{1}{e^2 - e} \rightarrow x = \frac{e^{2t} - e^t}{e^2 - e}$
- 12 境界値問題 $x'' + \lambda^2x = 0$, $x(0) = 0, x'(l) = 1$
 $x'(0) = a$ とおく。 $X = \frac{a}{s^2 + \lambda^2} \rightarrow x = \frac{a}{\lambda} \sin \lambda t$
 $x' = a \cos \lambda t$ に $x'(l) = 1$ を代入して
 $\cos \lambda l \neq 0$ のとき, $a = \frac{1}{\cos \lambda l}$
 $x = \frac{1}{\lambda \cos \lambda l} \sin \lambda t$ ($\cos \lambda l \neq 0$)
- 13 連立方程式 $\begin{cases} x' - 2x - 3y = 0, & x(0) = 1 \\ x + y' + 2y = 0, & y(0) = 1 \end{cases}$
 $\begin{cases} sX - 1 - 2X - 3Y = 0 \\ X + sY - 1 + 2Y = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} (s-2)X - 3Y = 1 \\ X + (s+2)Y = 1 \end{cases}$
 $\rightarrow \begin{cases} x = -2e^{-t} + 3e^t \\ y = 2e^{-t} - e^t \end{cases}$
- 14 $\begin{cases} x' + y' + 4y = 0, & x(0) = 1 \\ x' - y' + 4x = 0, & y(0) = 0 \end{cases} \rightarrow x = e^{-2t} \cos t, y = e^{-2t} \sin t$
- 15 $\begin{cases} x' + y' + x = -e^{-1}, & x(0) = -1 \\ x' + 2y' + 3x + 2y = 0, & y(0) = 1 \end{cases} \rightarrow x = -e^{-t}(\cos t + \sin t), y = e^{-t}(1 + \sin t)$

2.7 ラプラス変換の物理系への応用

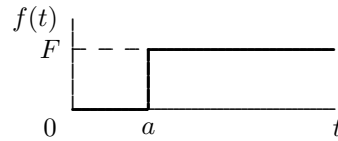
2.7.1 撃力

静止している質量 m の質点に外力 $f(t)$ が作用したとき、質点の速度 v は

$$m \frac{dv}{dt} = f(t), \quad v(0) = 0 \quad (2.27)$$

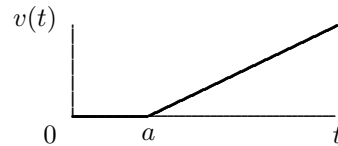
に支配される。時刻 a に大きさ F の外力のスイッチが入ったとする。すなわち静止している物体に大きさ一定の力 $f(t) = FU(t-a)$ を加えたとする。

$$m \frac{dv}{dt} = FU(t-a), \quad v(0) = 0 \quad (2.28)$$



両辺をラプラス変換して、初期条件を代入すると

$$V(s) = \frac{F e^{-as}}{m s^2}$$

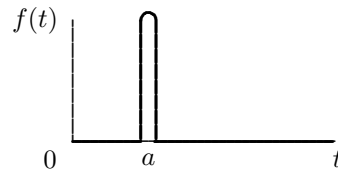


よって

$$v(t) = \frac{F}{m}(t-a)U(t-a) \quad (2.29)$$

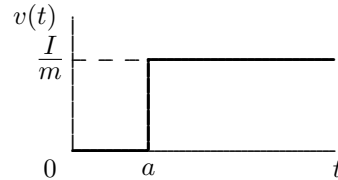
同じく静止している質量 m の質点に、時刻 t で力積 I の撃力 $f(t) = I\delta(t-a)$ が作用したとき

$$m \frac{dv}{dt} = I\delta(t-a), \quad v(0) = 0 \quad (2.30)$$



両辺をラプラス変換して、初期条件を代入すると

$$V(s) = \frac{I e^{-as}}{m s}$$



よって

$$v(t) = \frac{I}{m}U(t-a) \quad (2.31)$$

これは、通常「運動量の変化は力積に等しい」すなわち、(2.30) の両辺の $t=0$ から $t(>a)$ までの積分を用いて

$$mv(t) - mv(0) = \int_0^t I\delta(t-a)dt$$

$$v(t) = \frac{I}{m}, \quad (t > a)$$

の形で求められる。

一般に 1 次方程式

$$ax' + bx = f(t), \quad x(0) = x_0 \quad (a, b \text{ は定数}, a \neq 0) \quad (2.32)$$

の像は

$$X(s) = \frac{1}{as+b}(ax_0 + F(s)) \quad (2.33)$$

となる。これは初期条件を $x(0) = x_0$ とすることは、初期条件を $x(0) = 0$ として $F_c(s) = ax_0$ すなわち $f_c(t) = ax_0\delta(t)$ なる付加的な撃力を与えることと同等であることを意味している。

2.7.2 入力と応答

2階定数係数常微分方程式を考える。変数 t の区間 $[0, \infty)$ で定義された関数 $x(t)$ は微分方程式

$$ax'' + bx' + cx = f(t), \quad (a, b, c \text{ は定数}, a \neq 0) \quad (2.34)$$

と、初期条件

$$x(0) = x_0, \quad x'(0) = x'_0 \quad (2.35)$$

を満たしているとする。 $\mathcal{L}[x(t)] = X(s)$, $\mathcal{L}[f(t)] = F(s)$ とすると

$$a[s^2 X(s) - sx_0 - x'_0] + b[sX(s) - x_0] + cX(s) = F(s)$$

$$[as^2 + bs + c]X(s) = ax_0s + ax'_0 + bx_0 + F(s)$$

ここで

$$Z(s) = as^2 + bs + c, \quad A(s) = ax_0s + ax'_0 + bx_0 \quad (2.36)$$

とおくと、

$$X(s) = \frac{A(s)}{Z(s)} + \frac{F(s)}{Z(s)} \quad (2.37)$$

となる。また、後述の伝達関数 $W(s) = \frac{1}{Z(s)}$ を用いると、式 (2.37) は

$$X(s) = W(s)A(s) + W(s)F(s) \quad (2.38)$$

と書ける。よって解は

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A(s)}{Z(s)} \right] + \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{Z(s)} \right] \\ &= \mathcal{L}^{-1} [W(s)A(s)] + \mathcal{L}^{-1} [W(s)F(s)] \end{aligned} \quad (2.39)$$

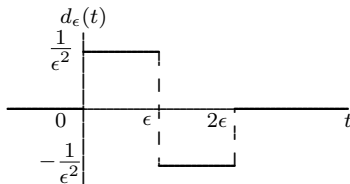
となる。

関数 $Z(s)$ は系に固有の性質を表現しており、特性関数あるいはインピーダンスとよばれる。また $A(s)$ は初期条件からきまる。したがって解 $\mathcal{L}^{-1} [W(s)A(s)]$ は外力によらず初期条件のみによって決まり、 $\mathcal{L}^{-1} [W(s)F(s)]$ は外力のみによって決まる。

式 (2.37) を式 (2.33) と同様に、初期条件 $x(0) = x_0$, $x'(0) = x'_0$ を適当な付加的な初期外力 $f_c(t)$ で置き換えた形式に変換してみよう。すなわち

$$A(s) = ax_0s + ax'_0 + bx_0 = F_c(s)$$

となる外力を求めよう。まず $\mathcal{L}^{-1} [ax_0s]$ を調べてみる。これは通常の間数ではない。いま

$$d_\epsilon(t) = \begin{cases} 0 & (t < 0) \\ \frac{1}{\epsilon^2} & (0 < t < \epsilon) \\ -\frac{1}{\epsilon^2} & (\epsilon < t < 2\epsilon) \\ 0 & (2\epsilon < t) \end{cases}$$


のラプラス変換を行うと

$$D_\epsilon(s) = \frac{(e^{-\epsilon s} - 1)^2}{\epsilon^2 s}$$

となり、 $\epsilon \rightarrow 0$ では $D_\epsilon(s) \rightarrow s$ となる。そこで

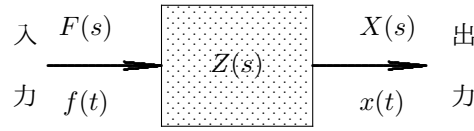
$$D(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} d_\epsilon(t)$$

と定義すれば $\mathcal{L}[D(t)] = s$ である。関数 $D(t)$ は単位ダブルレットとよばれている。単位ダブルレット $D(t)$ はデルタ関数 $\delta(t)$ と同様に超関数であり、 $D(t) = \delta'(t)$ の関係にある。したがって付加的な外力 $f_c(t) = \mathcal{L}^{-1} [F_c(s)]$ を

$$f_c(t) = ax_0D(t) + (ax'_0 + bx_0)\delta(t)$$

とすることによって初期条件 (2.35) を置き換えることができた。

一般に、初期静止条件 (quiescent condition) $x(0) = x'(0) = 0$ に対して、 $f(t)$ を入力または外力といい、その解を出力 または 応答 という。



このとき $A(s) = 0$ だから

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{Z(s)} \right] \quad (2.40)$$

とくに外力が単位インパルス、すなわち $f(t) = \delta(t)$ のときの応答を $w(t)$ とすると $\mathcal{L}[\delta(t)] = 1$ より

$$W(s) = \frac{1}{Z(s)} \quad (2.41)$$

$$w(t) = \mathcal{L}^{-1} [W(s)] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{Z(s)} \right] \quad (2.42)$$

だから、一般の外力 $f(t)$ に対する応答は

$$X(s) = W(s)F(s) \quad (2.43)$$

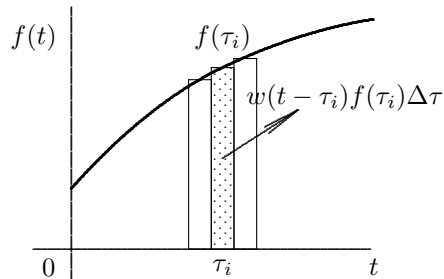
$$x(t) = w(t) * f(t) = \int_0^t w(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (\text{デュアメルの重畳定理}) \quad (2.44)$$

となる。単位インパルス $\delta(t)$ にたいする応答 $w(t)$ をインパルス応答あるいはデルタ応答、またその機能から重み関数という。また $W(s)$ は伝達関数という。式 (2.44) は次のように解釈できる。任意の外力 $f(t)$ を

$$\begin{aligned} f(t) &\approx \sum f(\tau_i)(U(t-\tau_i) - U(t-\tau_i - \Delta\tau)) \\ &= \sum \delta(t-\tau_i)f(\tau_i)\Delta\tau \quad (\Delta\tau \rightarrow 0) \end{aligned}$$

と分解すると、各時刻 τ_i におけるインパルス $\delta(t-\tau_i)$ にたいする応答は $w(t-\tau_i)$ だから、 $f(t)$ にたいする応答は、重み $f(\tau_i)\Delta\tau$ つきの和

$$x(t) \approx \sum w(t-\tau_i)f(\tau_i)\Delta\tau$$



となる。

一方、外力が単位関数 $f(t) = U(t)$ に対する応答 $k(t)$ を単位応答またはインディシャル応答という。

$$K(s) = \frac{1}{sZ(s)} = \frac{1}{s}W(s), \quad k(t) = \mathcal{L}^{-1} [K(s)] \quad (2.45)$$

$s \rightarrow +\infty$ で、 $sK(s) = 1/Z(s) \rightarrow 0$ と考えられるから、極限定理より $k(0+) = 0$ 。したがって $W(s) = sK(s)$ より

$$w(t) = k'(t), \quad k(0+) = 0 \quad (2.46)$$

となる。 $f(t)$ が連続のとき、微分法則 (2.6) より

$$\begin{aligned} X(s) &= W(s)F(s) = K(s)sF(s) \\ &= K(s)\{f(+0) + \mathcal{L}[f'(t)]\} \\ &= f(+0)\mathcal{L}[k(t)] + \mathcal{L}[k(t) * f'(t)] \end{aligned} \quad (2.47)$$

だから、一般の連続な外力 $f(t)$ に対する応答は

$$x(t) = f(+0)k(t) + \int_0^t k(t-\tau)f'(\tau)d\tau \quad (2.48)$$

となる。式 (2.48) は次のように解釈できる。

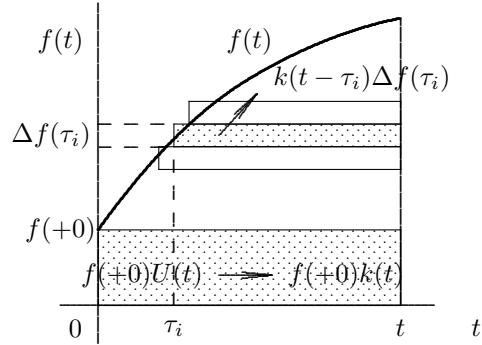
任意の外力 $f(t)$ を図のように階段関数で近似して

$$f(t) \approx f(+0)U(t) + \sum U(t-\tau_i)\Delta f(\tau_i)$$

と分解すると、 $f(+0)U(t)$ に対する応答は $f(+0)k(t)$ 、時刻 τ_i から $\Delta\tau$ の間の入力変化量 $U(t-\tau_i)\Delta f(\tau_i)$ に対する応答は $k(t-\tau_i)\Delta f(\tau_i)$ だから

$$x(t) \approx f(+0)k(t) + \sum k(t-\tau_i)f'(\tau_i)\Delta\tau$$

となる。



また $X(s) = sK(s)F(s)$ より

$$x(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau \quad (2.49)$$

となる。(2.48) と違い、これは $f(t)$ の連続性を仮定しない。

式 (2.44)、式 (2.48) あるいは (2.49) はインピーダンス $Z(s)$ に対するインパルス応答または単位応答がわかっているならば、任意の入力 $f(t)$ に対する応答が得られることを意味している。

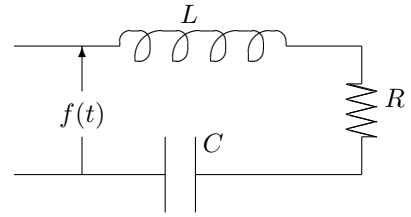
2.7.3 電気回路系

図に示された回路において、電流 $i(t)$ 、電荷 $q(t)$ と入力の電圧 $f(t)$ の間には

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C} = f(t) \quad (2.50)$$

の関係がある。ここに

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (2.51)$$



初期条件を

$$q(0) = q_0, \quad q'(0) = i(0) = i_0 \quad (2.52)$$

とすれば、(2.51) より

$$I(s) = sQ(s) - q_0, \quad Q(s) = \frac{I(s) + q_0}{s}$$

したがって、(2.50) にたいする像の方程式は

$$L(sI(s) - i_0) + RI(s) + \frac{1}{Cs}(I(s) + q_0) = F(s)$$

$$(Ls + R + \frac{1}{Cs})I(s) = Li_0 - \frac{q_0}{Cs} + F \quad (2.53)$$

となる。よって (2.38) に対応して

$$W(s) = (Ls + R + \frac{1}{Cs})^{-1}, \quad A(s) = Li_0 - \frac{q_0}{Cs} \quad (2.54)$$

$$I(s) = W(s)A(s) + W(s)F(s) \quad (2.55)$$

となる。

$$\frac{1}{LC} = \omega^2, \quad \frac{R}{L} = 2\mu \quad (2.56)$$

とおくと

$$W(s) = \frac{1}{L} \frac{s}{s^2 + 2\mu s + \omega^2} = \frac{1}{L} \left\{ \frac{s + \mu}{(s + \mu)^2 + \omega^2 - \mu^2} - \frac{\mu}{(s + \mu)^2 + \omega^2 - \mu^2} \right\}$$

したがってインパルス応答は

$$w(t) = \frac{1}{L} e^{-\mu t} \left\{ \cos \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t - \frac{\mu}{\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} \sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \right\} \quad (2.57)$$

同様にインディシャル応答は

$$K(s) = \frac{1}{L} \frac{1}{(s + \mu)^2 + \omega^2 - \mu^2}$$

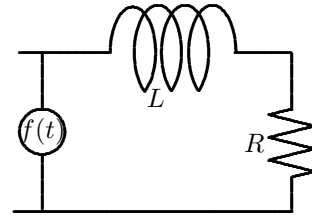
より

$$k(t) = \frac{1}{L\sqrt{\omega^2 - \mu^2}} e^{-\mu t} \sin \sqrt{\omega^2 - \mu^2} t \quad (2.58)$$

となる。

特に、コンデンサーを含まない ($C \rightarrow \infty$) 場合は LR 回路という。

$$L \frac{di}{dt} + Ri = f(t), \quad \text{初期条件 } i(0) = 0 \quad (2.59)$$



インパルス応答 ($f(t) = \delta(t)$)

$$W(s) = \frac{1}{Ls + R}, \quad w(t) = \mathcal{L}^{-1}[W(s)] = \frac{1}{L} e^{-Rt/L}$$

インディシャル応答 ($f(t) = U(t)$)

$$K(s) = \frac{1}{s(Ls + R)}, \quad k(t) = \mathcal{L}^{-1}[K(s)] = \frac{1}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

入力 $f(t) = E_0(U(t) - U(t - a))$, $a > 0$ に対する応答

$$\begin{aligned} x(t) &= w(t) * f(t) = \int_0^t w(t - \tau) f(\tau) d\tau \\ &= \frac{E_0}{R} \left[\{1 - e^{-Rt/L}\} - \{1 - e^{-R(t-a)/L}\} U(t - a) \right] \end{aligned}$$

などとなる。

入力電圧 $f(t)$ を周期 T の周期電圧とする。基本周期 T の電圧は

$$f_0(t) = f(t)(U(t) - U(t - T))$$

と表され、周期関数 $f(t)$ は

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_0(t - nT), \quad F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} F_0(s) \quad \left(= \frac{F_0(s)}{1 - e^{-nTs}} \right)$$

となる。したがって、応答は

$$I(s) = W(s)F(s) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-nTs} W(s)F_0(s)$$

となるが、 $f_0(t)$ に対する応答を

$$i_0(t) = \mathcal{L}^{-1} [W(s)F_0(s)]$$

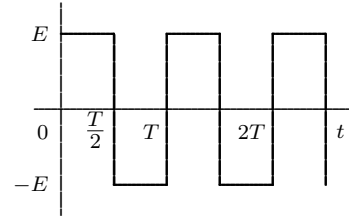
とおくと、 $f(t)$ に対する応答は

$$i(t) = \sum_{n=0}^{\infty} i_0(t - nT)U(t - nT)$$

と表される。すなわち基本周期の応答を周期 T ずつずらして加え合わせたものとなる。これを例で見よう。

周期 T の周期関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \begin{cases} E & \dots & 0 < t < T/2 \\ -E & \dots & T/2 < t < T \end{cases}, \quad f(t) = f(t + nT) \quad (2.60)$$



とする。

そのラプラス変換は

$$\begin{aligned} F(s) &= \frac{1}{1 - e^{-Ts}} \left\{ \int_0^{T/2} E e^{-st} dt + \int_{T/2}^T (-E) e^{-st} dt \right\} \\ &= \frac{E(1 - e^{-Ts/2})}{s(1 + e^{-Ts/2})} \left(= \frac{E}{s} \tanh \frac{Ts}{4} \right) \end{aligned} \quad (2.61)$$

入力電圧がこの矩形周期電圧のとき、これを直接解いてみる。ラプラス変換して

$$L\{sI(s) - i(0)\} + RI(s) = F(s)$$

$$I(s) = \frac{E}{L} \frac{1}{s(s + R/L)} \frac{1 - e^{-Ts/2}}{1 + e^{-Ts/2}}$$

$$\begin{aligned} \frac{1 - e^{-Ts/2}}{1 + e^{-Ts/2}} &= (1 - e^{-Ts/2})(1 - e^{-Ts/2} + e^{-2Ts/2} - e^{-3Ts/2} + \dots) \\ &= 1 - 2(e^{-Ts/2} - e^{-2Ts/2} + e^{-3Ts/2} - \dots) = 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nTs/2} \end{aligned}$$

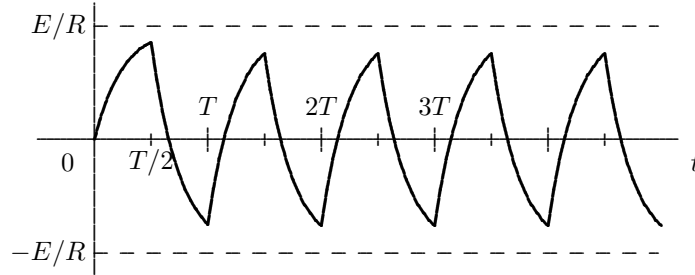
$$I(s) = \frac{E}{L} \left\{ \frac{1}{s(s + R/L)} + 2 \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n e^{-nTs/2} \frac{1}{s(s + R/L)} \right\}$$

$$\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s(s + R/L)} \right] = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{L}{R} \left(\frac{1}{s} - \frac{1}{s + R/L} \right) \right] = \frac{L}{R} (1 - e^{-Rt/L})$$

よって

$$i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}) + \frac{2E}{R} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left\{ 1 - e^{-\frac{R}{L}(t-nT/2)} \right\} U(t - nT/2) \quad (2.62)$$

となる。



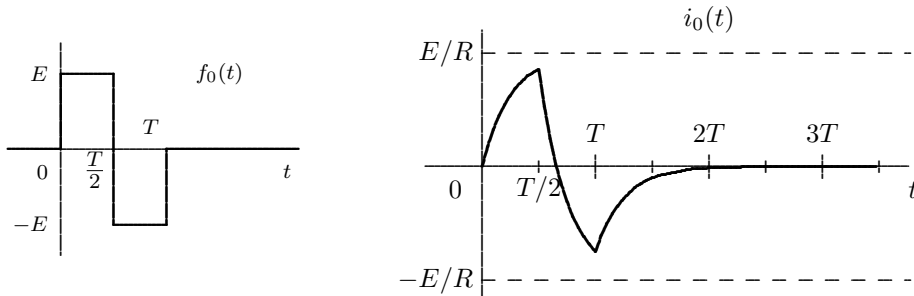
インパルス応答は $w(t) = \frac{1}{L}e^{-Rt/L}$ であり、基本周期 T での電圧のラプラス変換は

$$F_0(s) = \mathcal{L}[f_0(t)] = \frac{E}{s}(1 - 2e^{-Ts/2} + e^{-Ts})$$

だから $f_0(t)$ に対する応答は

$$\begin{aligned} i_0(t) &= \mathcal{L}^{-1}[W(s)F_0(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[E(1 - 2e^{-Ts/2} + e^{-Ts}) \frac{1}{s(Ls + R)} \right] \\ &= \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}) - 2\frac{E}{R}(1 - e^{-R(t-T/2)/L})U(t - T/2) + \frac{E}{R}(1 - e^{-R(t-T)/L})U(t - T) \end{aligned}$$

となる。



これらが周期 T ずつずれて重ね合わされているのが解 (2.62) である。

LR 回路で、起電力が (2.21), (2.23) の場合を解いて、それぞれを図示してみよう。意味がもっとよくわかる。

$$\begin{aligned} i(t) &= \frac{A}{L} \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\frac{R}{L}(t-nT)} U(t - nT) \\ i(t) &= \frac{A}{L} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-\frac{R}{L}(t-nT)} U(t - nT) \end{aligned}$$

2.8 その他の方程式への適用

2.8.1 簡単な変数係数の常微分方程式

係数が簡単な多項式で表される変数係数の常微分方程式を解いてみよう。
ここでは公式

$$\mathcal{L}[tf(t)] = -\frac{dF}{ds}$$

によって、変数係数をもつ項をラプラス変換する。
解 $x(t)$ のラプラス変換を $X(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ とする。

1 $tx'' + (1 - 2t)x' - 2x = 0, x(0) = 1, x'(0) = 2$

$$-\frac{d}{ds}(s^2X - s - 2) + sX - 1 + 2\frac{d}{ds}(sX - 1) - 2X = 0$$

$$-2sX - s^2\frac{dX}{ds} + 1 + sX - 1 + 2X + 2s\frac{dX}{ds} - 2X = 0$$

$$(-s^2 + 2s)\frac{dX}{ds} - sX = 0$$

$$(-s + 2)\frac{dX}{ds} = X, \quad \frac{dX}{ds} = \frac{X}{-s + 2}$$

$$X = \frac{c}{s - 2}, \quad x = ce^{2t}$$

$x(0) = 1$ より $c = 1$, したがって

$$x = e^{2t}$$

2 $tx'' + x' + 4tx = 1, x(0) = 3, x'(0) = 0$

$$-\frac{d}{ds}(s^2X - sx(0) - x'(0)) + sX - x(0) - 4\frac{dX}{ds} = 0$$

$$(-s^2 - 4)\frac{dX}{ds} - sX = 0$$

$$\frac{dX}{X} + \frac{sds}{s^2 + 4}, \quad X = \frac{c}{\sqrt{s^2 + 4}}, \quad x = cJ_0(2t)$$

ベッセル関数のラプラス変換は第 6.2 小節を参照して下さい。 $x(0) = cJ_0(0) = 3$ より $c = 3$, したがって

$$x = 3J_0(2t)$$

3 $tx'' + 2x' + tx = 0, x(0) = 1, x(\pi) = 0$
 $x'(0) = c$ において

$$-\frac{d}{ds}(s^2X - s - c) + 2(sX - 1) - \frac{dX}{ds} = 0$$

$$-2sX - s^2\frac{dX}{ds} + 1 + 2sX - 2 - \frac{dX}{ds} = 0$$

$$-(s^2 + 1)\frac{dX}{ds} - 1 = 0, \quad \frac{dX}{ds} = \frac{-1}{s^2 + 1}$$

$$X = -\arctan s + A$$

$s \rightarrow \infty$ のとき, $X \rightarrow 0$ より $A = \pi/2$.

$$X = \frac{\pi}{2} - \arctan s = \arctan \frac{1}{s}$$

$$x = \mathcal{L}^{-1} \left[\arctan \frac{1}{s} \right] = \frac{\sin t}{t}$$

これは $x(\pi) = 0$ を満たしている。

4 $x'' - tx' + x = 1, x(0) = 1, x'(0) = 2$

$$(s^2 X - s - 2) + sX - 1 + 2 \frac{d}{ds}(sX - 1) + X = \frac{1}{s}$$

$$\frac{dX}{ds} + \left(s + \frac{2}{s}\right)X = 1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}$$

積分因子 $e^{\int (s + \frac{2}{s}) ds} = s^2 e^{s^2/2}$ をかけて

$$\frac{d}{ds}(s^2 e^{s^2/2} X) = \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) s^2 e^{s^2/2}$$

$$\begin{aligned} X &= (s^2 e^{s^2/2})^{-1} \int \left(1 + \frac{2}{s} + \frac{1}{s^2}\right) s^2 e^{s^2/2} ds = (s^2 e^{s^2/2})^{-1} [s e^{s^2/2} + 2e^{s^2/2} + c] \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} e^{s^2/2} = \frac{1}{s} + \frac{2}{s^2} + \frac{c}{s^2} \left(1 - \frac{1}{2}s^2 + \frac{1}{8}s^4 + \dots\right) \\ &= \frac{1}{s} + \frac{2+c}{s^2} - c\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{8}s^2 + \dots\right) \end{aligned}$$

ここで, 通常関数を考えて $\mathcal{L}^{-1}[s^k] = 0, k = 0, 1, 2, \dots$ とおくと

$$x = 1 + (c+2)t$$

$x'(0) = 2$ より $c = 0$

$$x = 1 + 2t$$

5 ラゲールの微分方程式

$$tx'' + (1-t)x' + nx = 0, \quad n = 0, 1, \dots$$

$$(-2sX - s^2 \frac{dX}{ds} + x(0)) + sX - x(0) - (-X - s \frac{dX}{ds}) + nX = 0$$

$$(s - s^2) \frac{dX}{ds} + (n+1-s)X = 0$$

$$\frac{dX}{X} = \left(\frac{n}{s-1} - \frac{n+1}{s}\right) ds, \quad X = \frac{(s-1)^n}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[t^n e^{-t}] = \frac{n!}{(s+1)^{n+1}}, \quad t=0 \text{ で } (t^n e^{-t})^{(1)} = (t^n e^{-t})^{(2)} = \dots = (t^n e^{-t})^{(n-1)} = 0$$

$$\text{よって, } \mathcal{L}[(t^n e^{-t})^{(n)}] = \frac{n! s^n}{(s+1)^{n+1}}$$

$$x = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{(s-1)^n}{s^{n+1}} \right] = \frac{e^t}{n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t}) = \sum_{m=0}^n \frac{(-1)^m n!}{(m!)^2 (n-m)!} t^m = l_n(t)$$

l_n : ラゲールの多項式

2.8.2 積分方程式

未知関数の合成積を含むような積分方程式はラプラス変換を用いて簡単に解ける場合がある。

1 アーベル型積分方程式 (第1種ボルテラ型積分方程式)

$$(g * x)(t) = \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (2.63)$$

これは直ちに

$$G(s)X(s) = F(s), \quad x(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{F(s)}{G(s)} \right]$$

となる。

特に $\frac{1}{G(s)} = sK(s)$ のとき,

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[sKF] = \frac{d}{dt} \mathcal{L}^{-1}[KF] = \frac{d}{dt}(g * f)(t) = \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau)f(\tau)d\tau$$

$f(0) = 0$ を考慮すると $\mathcal{L}^{-1}[sF] = f'(t)$ より

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[KsF] = \frac{d}{dt} \int_0^t k(t-\tau)f'(\tau)d\tau$$

ともなる。例を考える。

$$\int_0^t \cos(t-\tau)x(\tau)d\tau = t^2 + 2$$

$$\frac{s}{s^2+1}X(s) = \frac{2}{s^3} + \frac{2}{s}, \quad X(s) = 2 + \frac{4}{s^2} + \frac{2}{s^4}$$

よって $x(t) = \frac{1}{3}t^3 + 4t + 2\delta(t)$

原点を通る曲線 $y = f(x)$ 上を摩擦などの抵抗がないとして、曲線上の任意の点で静止している質点が重力にしたがって原点まで運動するとき要する時間が常に一定である曲線を求めよう。質量 m の質点ははじめ (x, y) にあったとして、高さ η のときの速さは

$$\frac{1}{2}mv^2 = mg(y-\eta), \quad v = \sqrt{2g(y-\eta)}$$

曲線の長さを s とし, $\frac{ds}{dy} = g(y)$ とおくと, 原点までの降下時間は

$$\int \frac{ds}{v} = \int \frac{1}{v} \frac{ds}{d\eta} d\eta = \int \frac{1}{v} g(\eta) d\eta$$

したがって, 降下時間が一定の条件は

$$\int_0^y \frac{1}{\sqrt{y-\eta}} g(\eta) d\eta = c, \quad c \text{ は定数}$$

となる。

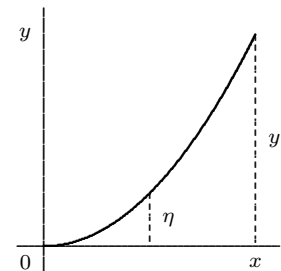
$$\mathcal{L}[g] \mathcal{L} \left[\frac{1}{\sqrt{y}} \right] = \frac{c}{s}, \quad \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{s}} \mathcal{L}[g] = \frac{c}{s}, \quad \mathcal{L}[g] = \frac{c}{\sqrt{\pi s}}$$

$$g = \frac{ds}{dy} = \frac{a}{\sqrt{y}}, \quad \sqrt{1 + \left(\frac{dx}{dy}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{y}}, \quad a \text{ は定数}$$

$y = a^2 \sin^2(\frac{1}{2}\theta)$ とおき, $\theta = 0$ で $x = 0$ だから

$$x = \frac{1}{2}a^2(\theta + \sin\theta), \quad y = \frac{1}{2}a^2(1 - \cos\theta)$$

となる。したがって, 等時曲線はサイクロイドである。



2 ポアソン型積分方程式 (第2種ボルテラ型積分方程式)

$$x(t) - \int_0^t g(t-\tau)x(\tau)d\tau = f(t) \quad (2.64)$$

例を考える。

$$\begin{aligned} x(t) + \int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau &= \cos 2t \\ X + \frac{1}{s-1}X &= \frac{s}{s^2+4}, \quad X = \frac{s-1}{s^2+4} \\ \text{よって } x(t) &= \cos 2t - \frac{1}{2}\sin 2t \end{aligned}$$

3 微積分方程式

例で考えよう。

$$\begin{aligned} x'(t) + x(t) + 2 \int_0^t e^{t-\tau}x(\tau)d\tau &= 1, \quad x(0) = 0 \\ sX + X + \frac{2}{s-1}X &= \frac{1}{s}, \quad X = \frac{s-1}{(s^2+1)s} = \frac{s+1}{s^2+1} - \frac{1}{s} \\ \text{よって } x(t) &= \cos t + \sin t - 1 \end{aligned} \quad (2.65)$$

2.8.3 差分方程式

$t_0 \leq t < t_0 + nh$ に対して, $x(t)$ が与えられていると,

$$a_n x(t+nh) + \dots + a_1(t+h) + a_0 x(t) = f(t) \quad (2.66)$$

によって, $t_0 + nh \leq t < t_0 + (n+1)h$ での $x(t)$ が求まる。順次繰り返せば $t \geq t_0$ の $x(t)$ が決まる。(2.66) を増分 h の n 階の線形差分方程式という。解法には第2移動法則

$$\mathcal{L}[f(t+\lambda)] = e^{\lambda s} F(s) - e^{\lambda s} \int_0^\lambda f(t)e^{-st} dt, \quad : \lambda > 0$$

を適用する。

1 差分方程式は次のようにして解ける。

$$3x(t+2) - 4x(t+1) + x(t) = 0, \quad x(t) = 1 \quad (0 \leq t < 1), \quad x(t) = 2 \quad (1 \leq t < 2) \quad (2.67)$$

$$\begin{aligned} 3\{e^{2s}X(s) - e^{2s} \int_0^2 x(t)e^{-st} dt\} - 4\{e^s X(s) - e^s \int_0^1 x(t)e^{-st} dt\} + X(s) &= 0 \\ (3e^{2s} - 4e^s + 1)X(s) &= 3\frac{e^{2s} + e^s - 2}{s} - 4\frac{e^s - 1}{s} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{3e^{2s} - e^s - 2}{s(3e^{2s} - 4e^s + 1)} = \frac{3e^s + 2}{s(3e^s - 1)} = \frac{1}{s} + \frac{1}{s} e^{-s} \frac{1}{1 - e^{-s}/3} \\ &= \frac{1}{s} + \frac{3}{s} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} e^{-ns} \end{aligned}$$

よって

$$x(t) = 1 + 3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} U(t-n) \quad (2.68)$$

2 漸化式

$$a_{n+2} - 3a_{n+1} + 2a_n = n^2, \quad a_0 = a_1 = 0 \quad (2.69)$$

を差分方程式

$$x(t+2) - 3x(t+1) + 2x(t) = t^2, \quad x(t) = 0 \quad (0 \leq t < 2) \quad (2.70)$$

と対応させ、 $n \geq 0$ にたいして、 $a_n = x(n+t)$ ($0 \leq t < 1$) で解く。(2.70) の両辺をラプラス変換して

$$e^{2s}X(s) - e^{2s} \int_0^2 x(t)e^{-st} dt - 3\{e^s X(s) - e^s \int_0^1 x(t)e^{-st} dt\} + 2X(s) = \frac{2}{s^3}$$

$$\begin{aligned} X(s) &= \frac{2}{s^3(e^s - 2)(e^s - 1)} = \frac{2}{s^3 e^{2s}} \left(\frac{2}{1 - 2e^{-s}} - \frac{1}{1 - e^{-s}} \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1} - 1) \frac{2}{s^3} e^{-(k+2)s} \end{aligned}$$

$$x(t) = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1} - 1)(t - (k+2))^2 U(t - (k+2))$$

よって

$$a_n = \sum_{k=0}^{\infty} (2^{k+1} - 1)(n - (k+2))^2 U(n - (k+2))$$

すなわち

$$a_n = \sum_{k=0}^{n-2} (2^{k+1} - 1)(n - 2 - k)^2 \quad (n \geq 2) \quad (2.71)$$

3 漸化式

$$a_{n+2} - 5a_{n+1} + 6a_n = 4^n, \quad a_0 = 0, \quad a_1 = 1 \quad (2.72)$$

にたいして差分方程式

$$x(t+2) - 5x(t+1) + 6x(t) = f(t), \quad x(t) = 0 \quad (0 \leq t < 1), \quad x(t) = 1 \quad (1 \leq t < 2) \quad (2.73)$$

を対応させて解いてみよう。ここで $f(t)$ は

$$\begin{aligned} f(t) &= r^n, \quad n \leq t < n+1, \quad n = 0, 1, 2, \dots \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r^n (U(t-n) - U(t-(n+1))) \end{aligned} \quad (2.74)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}[f(t)] &= \sum_0^{\infty} \frac{r^n}{s} (e^{-ns} - e^{-(n+1)s}) \\ &= \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - re^{-s})} \end{aligned} \quad (2.75)$$

で $r = 4$ としたものである。

(2.73) をラプラス変換して

$$e^{2s}X(s) - \frac{e^s}{s}(1 - e^{-s}) - 5e^s X(s) + 6X(s) = \frac{1 - e^{-s}}{s(1 - 4e^{-s})}$$

$$\begin{aligned}
X(s) &= \frac{e^s(1-e^{-s})}{s(e^s-2)(e^s-3)} + \frac{1-e^{-s}}{s(e^s-2)(e^s-3)(1-4e^{-s})} \\
&= \frac{1-e^{-s}}{s} \left\{ \frac{1}{1-3e^{-s}} - \frac{1}{1-2e^{-s}} \right\} + \frac{1-e^{-s}}{s} \left\{ \frac{1/2}{1-2e^{-s}} - \frac{1}{1-3e^{-s}} + \frac{1/2}{1-4e^{-s}} \right\}
\end{aligned}$$

したがって $n \leq t < n+1$ に対して

$$\begin{aligned}
x(t) &= 3^n - 2^n + \frac{1}{2} \cdot 2^n - 3^n + \frac{1}{2} \cdot 4^n \\
&= \frac{1}{2}(4^n - 2^n) = a_n
\end{aligned} \tag{2.76}$$

となる。

2.8.4 偏微分方程式

ラプラス変換は偏微分方程式の解法に力を発揮することもある。二三の例を見ておこう。ただしこれらはいずれも他の手法でも簡単に解ける。

1

$$\frac{\partial z}{\partial t} = 4xt + 3 \sin x, \quad z(x, 0) = x^2 \tag{2.77}$$

解を $z(x, t)$ とし、その t に関するラプラス変換を $\mathcal{L}_t[z(x, t)] = Z(x, s)$ とすると

$$sZ(x, s) - z(x, 0) = 4x \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \sin x \cdot \frac{1}{s}, \quad Z(x, s) = 4x \cdot \frac{1}{s^3} + 3 \sin x \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{x^2}{s}$$

$$z(x, t) = 2xt^2 + 3 \sin x \cdot t + x^2$$

2 対流方程式を解いてみよう。

$$3 \frac{\partial z}{\partial t} + \frac{\partial z}{\partial x} = 0, \quad z(x, 0) = 0, \quad z(0, t) = e^t \tag{2.78}$$

$$3\{sZ(x, s) - z(x, 0)\} + \frac{\partial Z(x, s)}{\partial x} = 0, \quad 3sZ(x, s) + \frac{\partial Z(x, s)}{\partial x} = 0, \quad Z(x, s) = ce^{-3sx}$$

$$Z(0, s) = \frac{1}{s-1} \quad \text{よ} \text{り} \quad Z(x, s) = \frac{1}{s-1} e^{-3sx}$$

$$z(x, t) = \mathcal{L}_t^{-1}[Z(x, s)] = e^{t-3x} U(t-3x)$$

3 波動方程式

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{2.79}$$

$$\text{境界条件 } z(0, t) = f(t), \quad x \rightarrow \infty \text{ のとき } z(x, t) \text{ は有界} \tag{2.80}$$

$$\text{初期条件 } z(x, 0) = 0, \quad \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t=0} = 0 \tag{2.81}$$

を解いてみよう。解を $z(x, t)$ とし、その t に関するラプラス変換を $\mathcal{L}_t[z(x, t)]$ とすると、

$$s^2 Z(x, s) - sz(x, 0) - \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)_{t=0} = k^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} Z(x, s)$$

(2.81) を代入して

$$\frac{d^2}{dx^2} Z(x, s) - \frac{s^2}{k^2} Z(x, s) = 0 \quad \text{よって} \quad Z(x, s) = A(s)e^{-\frac{s}{k}x} + B(s)e^{\frac{s}{k}x}$$

境界条件 (2.80) もラプラス変換して

$$Z(0, s) = \mathcal{L}_t [z(0, t)] = \mathcal{L}_t [f(t)], \quad x \rightarrow \infty \text{ のとき } Z(x, s) \text{ は有界}$$

したがって $B(s) = 0$, $A(s) = \mathcal{L}_t [f(t)]$ となり

$$Z(x, s) = \mathcal{L}_t [f(t)] e^{-\frac{s}{k}x}$$

よって解は

$$z(x, t) = f\left(t - \frac{x}{k}\right) U\left(t - \frac{x}{k}\right)$$

これは伝播速度 k の前進波を表している。

4 熱伝導方程式

$$\frac{\partial z}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \tag{2.82}$$

$$\text{境界条件 } z(0, t) = a, \quad \text{初期条件 } z(x, 0) = 0 \tag{2.83}$$

を解いてみよう。解を $z(x, t)$ とし、その t に関するラプラス変換を $\mathcal{L}_t [z(x, t)]$ とし、境界条件、初期条件を考慮して方程式をラプラス変換すると

$$\frac{\partial^2 Z(x, s)}{\partial x^2} - \frac{s}{k^2} Z(x, s) = 0$$

$$Z(x, s) = A(s) \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{k}x\right) + B(s) \exp\left(\frac{\sqrt{s}}{k}x\right)$$

ここで、 $x \rightarrow \infty$ のとき解が有界であるためには $B(s) = 0$ 。

境界条件のラプラス変換より $Z(0, s) = \frac{a}{s}$, $A(s) = \frac{a}{s}$ 。よって

$$Z(x, s) = \frac{a}{s} \exp\left(-\frac{\sqrt{s}}{k}x\right)$$

$$\text{公式 } \mathcal{L} \left[\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t}} \right] = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{\sqrt{s}} \text{ より } \mathcal{L} \left[\frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t^3}} \right] = \int_s^\infty \frac{e^{-a\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx = \frac{2}{a} e^{-a\sqrt{s}}$$

$$\text{よって } \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s} \right] = \int_0^t \frac{a}{2} \frac{e^{-a^2/4t}}{\sqrt{\pi t^3}} dt = 1 - \operatorname{erf} \frac{a}{2\sqrt{t}}$$

したがって

$$z(x, t) = a \left(1 - \operatorname{erf} \frac{x}{2k\sqrt{t}} \right)$$

となる。

第3章 超関数のラプラス変換

3.1 超関数の定義

「超関数」について要約しておく。(参. Lシュワルツ 物理数学の方法 岩波)

ϕ を R 上の無限回連続微分可能な関数とし, かつ R の有界集合 K が存在して, その外では恒等的に 0 であるとする。空間 \mathcal{D} はそれらの ϕ の集合の部分集合で, あらためて K をその外で ϕ が 0 である最小の閉集合としたとき, K を ϕ の「台」という。いいかえれば

「空間 \mathcal{D} は R 上の, 無限回微分可能な, 有界な台を持つ複素数値関数の空間である。」

例. 関数

$$\phi(x) = \begin{cases} 0, & |x| \geq 1 \text{ のとき} \\ \exp\left(-\frac{1}{1-x^2}\right), & |x| < 1 \text{ のとき} \end{cases}$$

は \mathcal{D} に属する。台は $|x| \leq 1$ である。

次の定理が成り立つ。

「 $\epsilon > 0$ に対して, 有界な台 K をもつ任意の連続関数 f はある関数 $\phi \in \mathcal{D}$ によって一様に近づけることができる。また ϕ の台を f の台 K の任意の近傍の中に含ませることが出来る。」

T が全ての $\phi \in \mathcal{D}$ に複素数 $T(\phi) = \langle T, \phi \rangle$ を対応させ

$$\begin{cases} T(\phi_1 + \phi_2) = T(\phi_1) + T(\phi_2) \\ T(\lambda\phi) = \lambda T(\phi), \lambda \text{ は複素定数} \\ \phi_j \text{ が } j \rightarrow \infty \text{ のとき } \phi \text{ に収束するならば,} \\ \text{複素数 } T(\phi_j) \text{ は複素数 } T(\phi) \text{ に収束する。} \end{cases}$$

のとき, T を「超関数」という。ここで ϕ_j が $j \rightarrow \infty$ のとき ϕ に収束するとは, ϕ_j の台は j に無関係な同一の有界集合に含まれ, ϕ_j の全ての階数 m の導関数は $j \rightarrow \infty$ のとき ϕ の対応する導関数に一様収束する, とする。

例. f を有界区間で積分可能とすると,

$$\langle T_f, \phi \rangle = \int_R f(x)\phi(x)dx$$

は超関数 T_f を定義する。

「2つの関数 f, g が同じ汎関数 $T_f = T_g$ を定義するのは, それらがほとんどいたるところ等しいときしかもそのときだけである。」

したがって, それらを同一視することにすれば, 関数 f と汎関数 T_f を同一視して $\langle f, \phi \rangle = \langle T_f, \phi \rangle$ と書く。

ディラックのデルタ関数 $\delta(x)$ は

$$\langle \delta(x), \phi \rangle = \phi(0)$$

によって定義できる。また、 $\delta(x-a)$ は

$$\langle \delta(x-a), \phi \rangle = \phi(a)$$

となる。

連続微分可能な関数 f については

$$\langle \frac{\partial f}{\partial x}, \phi \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial f}{\partial x} \phi(x) dx = [f\phi]_{-\infty}^{\infty} - \int_{-\infty}^{\infty} f \frac{\partial \phi}{\partial x} dx = -\langle f, \frac{\partial \phi}{\partial x} \rangle$$

だから、 T の導超関数 $\partial T / \partial x$ を

$$\langle \frac{\partial T}{\partial x}, \phi \rangle = -\langle T, \frac{\partial \phi}{\partial x} \rangle$$

で定義する。

Heaviside の単位階段関数 U は

$$U(x) = \begin{cases} 0, & (x < 0) \\ +\frac{1}{2}, & (x = 0) \\ +1, & (x > 0) \end{cases}$$

で定義されるが

$$\langle U', \phi \rangle = -\langle U, \phi' \rangle = -\int_{-\infty}^{\infty} U(x) \phi'(x) dx = -\int_0^{\infty} \phi'(x) dx = -[\phi(x)]_{x=0}^{x=\infty} = \phi(0) = \langle \delta, \phi \rangle$$

したがって

$$U'(x) = \delta(x), \quad \text{あるいは} \quad \int_{-\infty}^x \delta(x) dx = U(x)$$

となる。また

$$\langle \delta', \phi \rangle = -\langle \delta, \phi' \rangle = -\phi'(0)$$

$$\langle \delta^{(m)}, \phi \rangle = (-1)^m \phi^{(m)}(0)$$

α が無限回微分可能な関数で、関数 f を局所可積分関数とすると

$$\langle \alpha f, \phi \rangle = \int (\alpha(x) f(x)) \phi(x) dx = \int f(x) (\alpha(x) \phi(x)) dx = \langle f, \alpha \phi \rangle$$

だから T を超関数として、無限回微分可能な関数 α との積を

$$\langle \alpha T, \phi \rangle = \langle T, \alpha \phi \rangle$$

で定義する。

$$\langle \alpha \delta, \phi \rangle = \langle \delta, \alpha \phi \rangle = \alpha(0) \phi(0) = \langle \alpha(0) \delta, \phi \rangle$$

だから

$$\alpha \delta = \alpha(0) \delta$$

とくに, $x\delta = 0$. また

$$\langle \alpha\delta', \phi \rangle = \langle \delta', \alpha\phi \rangle = -(\alpha\phi)'_{x=0} = -\alpha(0)\phi'(0) - \alpha'(0)\phi(0) = \langle \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta, \phi \rangle$$

だから

$$\alpha\delta' = \alpha(0)\delta' - \alpha'(0)\delta$$

したがって,

$$x\delta' = -\delta, \quad x^2\delta' = 0, \quad x\delta^{(m)} = -m\delta^{(m-1)}$$

逆に, $xT = 0$ を満たす超関数 T は, $T = C\delta$, C (は定数) がわかる。

また関数の場合と同様に積の微分公式

$$\frac{\partial \alpha T}{\partial x} = \frac{\partial \alpha}{\partial x} T + \alpha \frac{\partial T}{\partial x}$$

も成立する。また超関数 T と δ の合成積について,

$$\delta^{(m)} * T = T^{(m)}$$

が成立する。

3.2 超関数のラプラス変換

超関数 T のラプラス変換を

$$\mathcal{L}[T] = \langle T, e^{-st} \rangle$$

で定義すると,

$$\mathcal{L}[U(t)] = \frac{1}{s} \quad (s > 0), \quad \mathcal{L}[\delta(t)] = 1, \quad \mathcal{L}[\delta^{(m)}(t)] = s^m \quad (m \text{ は整数 } \geq 0), \quad \mathcal{L}[\delta(t-a)] = e^{-as}$$

$$\mathcal{L}[U(t)t^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{s^{\lambda+1}} \quad (\lambda > -1, s > 0), \quad \mathcal{L}[U(t)e^{at}t^\lambda] = \frac{\Gamma(\lambda+1)}{(s-a)^{\lambda+1}} \quad (\lambda > -1, s > a)$$

$$\mathcal{L}[U(t)\cos at] = \frac{s}{s^2+a^2} \quad (s > 0), \quad \mathcal{L}[U(t)\sin at] = \frac{a}{s^2+a^2} \quad (s > 0)$$

などが得られる。超関数 T, S の合成積についても

$$\mathcal{L}[T * S] = \mathcal{L}[T] \mathcal{L}[S]$$

の合成積定理が成り立つ。移動定理は

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] &= \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}] * \mathcal{L}^{-1}[F(s)] \\ &= \delta(t-a) * f(t)U(t) = f(t-a)U(t-a) \end{aligned}$$

となる。事実, このことは

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}[e^{-as}F(s)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-a)^n s^n}{n!}\right] * f(t)U(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \delta^{(n)} * f(t)U(t) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-a)^n}{n!} \{f(t)U(t)\}^{(n)} = f(t-a)U(t-a) \end{aligned}$$

となることから確認できる。

第4章 複素反転公式

4.1 複素関数論の要約

複素反転公式に必要な複素関数の取り扱いの要約をしておきます。

1 解析的

複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z)$ が微分可能とは、 Δz のとりかたによらず

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が一意的に決まることである。また $\delta > 0$ に対して $|z - z_0| < \delta$ のすべての z で $f'(z)$ が存在するとき $f(z)$ は $z = z_0$ で解析的という。

2 解析的である条件（コーシーリーマンの方程式）

関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が解析的である必要十分条件は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

である。このとき u および v はラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

を満たすいわゆる調和関数である。

3 コーシーの定理

平面でのグリーンの定理，すなわち

「単一閉曲線 C によって囲まれた領域を A とすると，連続微分可能な関数 P, Q について

$$\oint_C Pdx + Qdy = \int \int_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

が成立する」，を用いると複素平面で $f(z)$ が単一閉曲線 C によって囲まれた領域と C 上で解析的ならば，コーシーの定理

$$\oint_C f(z) dz = 0$$

が成立する。

4 コーシーの積分公式

$f(z)$ が単一閉曲線 C の内部と曲線上で解析的で， a が C の内部の点ならば

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{z - a} dz$$

ただし、 C は反時計回りとする。また n 階導関数は

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

となる。従って関数 $f(z)$ が C の内部と曲線上で解析的ならば、 $f(z)$ は何回でも微分可能であり、正則である (Goursat の定理)。

5 $f(z)$ が $z = a$ の近傍で正則ならば、テイラー展開が可能である。

$$f(z) = f(a) + \frac{f'(a)}{1!}(z-a) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(z-a)^n + \cdots$$

テイラー級数は $z = a$ を中心とし、 $z = a$ から最も近い解析的でない点 (特異点) までの距離 ρ を半径とする円内では収束し (収束円)、 a を次々と正則な領域に移動させてつないでいけば、それぞれ共通の収束円内では一致し、全体として一つの関数を表すことができる (解析接続)。

6 曲線 C を半径 R の円とし、 $|f(z)|$ の C 上の最大値を M とすればコーシーの積分公式より、 $|f(z)| \leq M$ 。

よって、 $|f(z)|$ は正則な変域内では極大値をとることはない。また、 $f(z)$ が零点を持たない変域内では $|f(z)|$ は極小値をとらない ($1/f(z)$ から)。

閉曲線 C 内の 2 点 z_1, z_2 について、

$$f(\alpha) - f(\beta) = \frac{\alpha - \beta}{2\pi i} \oint_C \frac{f(z) dz}{(z-\alpha)(z-\beta)}$$

閉曲線を C を無限に大きい円にすると $z = Re^{\phi}$ として積分すると 0 となり、 $f(\alpha) = f(\beta)$ となる。すなわち、 z の有限な全ての点で正則かつ有界な関数は一つの定数となる。

さらに、無限遠点で正則 ($z = 1/\zeta$ として、 $\zeta = 0$ で正則) とすると、無限遠点付近では有界で、定数となる。よって全平面で正則な関数は一つの定数である。従って、定数でない関数はどこかに特異点を含む (Liouville の定理)。

7 特異点 1 … 極

$f(z)$ が解析的でない点を特異点という。

$$f(z) = \frac{g(z)}{(z-a)^n}, \quad g(z) \text{ は } z = a \text{ で解析的}$$

のとき、 $f(z)$ は $z = a$ で位数 n の極 (pole) という。

8 留数

$f(z)$ を $(z-a)$ の巾乗で展開したときの係数 a_{-1} を $z = a$ での $f(z)$ の留数という。

位数 n の極では

$$a_{-1} = \lim_{z \rightarrow a} \frac{1}{(n-1)!} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}} \{ (z-a)^n f(z) \}$$

である。

9 留数定理

$f(z)$ が閉曲線 C で囲まれた領域でいくつかの極を持てば

$$\oint_C f(z) dz = 2\pi i \times (C \text{ の内部の全ての留数の和})$$

となる。

10 特異点 2

$$f(z) = \sqrt{z}$$

などのように、 z の一価関数でなく、 z 平面に分岐 (branch) を導入して一価性を取り戻すことが出来る特異点を分岐点という。また $f(z)$ をロラン級数

$$f(z) = \frac{a_{-n}}{(z-a)^n} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots$$

に展開したとき、 $(z-a)$ の負の中乗の項 (主要項) が無限の多くの項からなっているとき $z=a$ を真性特異点という。

4.2 ブロムウィッチ積分公式

関数 $f(t)$ のラプラス変換を $F(s)$ とすると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\xi + i\eta) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty f(t) e^{-(\xi+i\eta)t} dt \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty (f(t)U(t)e^{-\xi t}) e^{-i\eta t} dt \end{aligned} \quad (4.1)$$

だから、 $\frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\xi + i\eta)$ は関数 $f(t)U(t)e^{-\xi t}$ のフーリエ変換であることがわかる。したがって、フーリエ反転公式によって

$$f(t)U(t)e^{-\xi t} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} F(\xi + i\eta) e^{i\eta t} d\eta$$

となり、

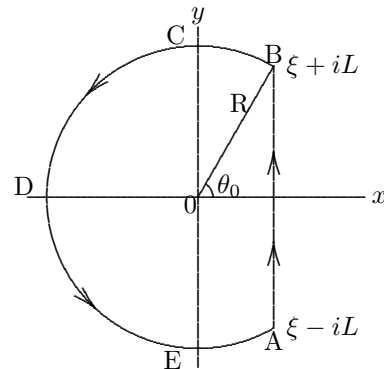
$$f(t)U(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty F(\xi + i\eta) e^{(\xi+i\eta)t} d\eta \quad (4.2)$$

あるいは、積分変数を $s = \xi + i\eta$ に変換して

$$f(t)U(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} F(s) e^{st} ds \quad (4.3)$$

を得る。これは複素反転公式またはブロムウィッチの積分公式 (Bromwich's integral formula) と呼ばれる。積分 (4.3) は複素平面で直線 $s = \xi$ にそって $-\infty$ から ∞ まで行う。このため積分 (4.3) をその一部に含む閉積分路 (ブロムウィッチ積分路 (Bromwich contour)) を考える。

関数 $F(s)e^{st}$ の全ての特異点 (極, 分岐点その他の真性特異点) は $s = \xi$ の左側にとる。したがって十分大きな R を選ぶと, 全ての特異点は閉積分路 $ABCDE$ の内側に含まれるとする。閉積分路のうち AB 以外の部分を積分路 Γ とする。 $L = \sqrt{R^2 - \xi^2}$ だから $R \rightarrow \infty$ のとき $L \rightarrow \infty$, したがって



$$\begin{aligned} f(t)U(t) &= \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-iL}^{\xi+iL} F(s) e^{st} ds \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left\{ \frac{1}{2i\pi} \oint F(s) e^{st} ds - \frac{1}{2i\pi} \int_{\Gamma} F(s) e^{st} ds \right\} \end{aligned} \quad (4.4)$$

したがって, (4.4) の右辺の積分路 Γ での積分が $R \rightarrow \infty$ のとき 0 になれば, 逆変換は閉曲線での積分になる。このとき特異点が全て極だとすると, 留数の定理によって

$$f(t)U(t) = F(s) \text{ の極における } F(s)e^{st} \text{ の留数の和} \quad (4.5)$$

が得られる。よって積分による逆変換は積分路 Γ での積分が $R \rightarrow \infty$ のとき 0 になるかどうかによってその有効性が決まる。

Γ に沿う積分が 0 に近づくための条件

Γ の上 ($s = Re^{i\theta}$) で

$$|F(s)| < \frac{M}{R^k} \quad k > 0, M \text{ は定数} \quad (4.6)$$

ならば, $e^{st}F(s)$ の Γ 上に沿う積分は 0 に近づく。すなわち

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} F(s)e^{st} ds = 0 \quad (4.7)$$

条件 (4.6) は $P(s), Q(s)$ が多項式で $F(s) = P(s)/Q(s)$, $P(s)$ の次数が $Q(s)$ の次数より小さいとき, 常に成り立つ。

この定理は次のようにして証明される。

まず (BCDEA) に沿う積分を BC, CD, DE, EA の各区間に分割する。

区間 BC について

$s = Re^{i\theta}, \theta_0 \leq \theta \leq \pi/2$ だから

$$I_{BC} = \int_{BC} e^{st} F(s) ds = \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{Rte^{i\theta}} F(Rte^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

したがって

$$|I_{BC}| \leq \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{Rt \cos \theta} |F(Rte^{i\theta})| R d\theta \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{\theta_0}^{\pi/2} e^{Rt \cos \theta} d\theta \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\phi_0} e^{Rt \sin \phi} d\phi$$

ここで, $\theta = \pi/2 - \phi, \phi_0 = \pi/2 - \theta_0 = \arcsin(\xi/R)$ を用いた。ところが $\sin \phi \leq \sin \phi_0 = \xi/R$ だから

$$|I_{BC}| \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\phi_0} e^{\xi t} d\phi = \frac{Me^{\xi t}}{R^{k-1}} \phi_0 = \frac{Me^{\xi t}}{R^{k-1}} \arcsin \xi/R$$

$R \rightarrow \infty$ のとき 右辺 $\rightarrow 0$ 。よって $\lim_{R \rightarrow \infty} I_{BC} = 0$ 。

つぎに区間 CD について

$s = Re^{i\theta}, \pi/2 \leq \theta \leq \pi$ だから

$$I_{CD} = \int_{CD} e^{st} F(s) ds = \int_{\pi/2}^{\pi} e^{Rte^{i\theta}} F(Rte^{i\theta}) iRe^{i\theta} d\theta$$

$\theta = \pi/2 + \phi$ とおいて

$$|I_{CD}| \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_{\pi/2}^{\pi} e^{Rt \cos \theta} d\theta \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-Rt \sin \phi} d\phi$$

ところで, $0 \leq \phi \leq \pi/2$ では $\sin \phi \geq 2\phi/\pi$ 。

$$|I_{CD}| \leq \frac{M}{R^{k-1}} \int_0^{\pi/2} e^{-2R\phi t/\pi} d\phi = \frac{\pi M}{2tR^k} (1 - e^{-Rt})$$

よって, $\lim_{R \rightarrow \infty} I_{CD} = 0$.

また区間 DE は区間 CD と, 区間 EA は区間 BC と同様にして $\lim_{R \rightarrow \infty} I_{DE} = 0$, $\lim_{R \rightarrow \infty} I_{DE} = 0$ が証明できる。よって経路 Γ 全体について (4.7) が証明された。

次に, $P(s), Q(s)$ が多項式で $P(s)$ の次数が $Q(s)$ の次数より小さいとして, $F(s) = P(s)/Q(s)$ が条件 (4.6) を満たすことを証明する。

多項式 $P(s), Q(s)$ の次数を $m, n, (n > m)$ とする。 $a_0 \neq 0, b_0 \neq 0$ として

$$P(s) = a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m, \quad Q(s) = b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n$$

とする。

$$\begin{aligned} |F(s)| &= \left| \frac{P(s)}{Q(s)} \right| = \left| \frac{a_0 s^m + a_1 s^{m-1} + \cdots + a_m}{b_0 s^n + b_1 s^{n-1} + \cdots + b_n} \right| \\ &= \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \frac{1}{R^{n-m}} \left| \frac{1 + (a_1/a_0 R) e^{-i\theta} + (a_2/a_0 R^2) e^{-2i\theta} + \cdots + (a_m/a_0 R^m) e^{-mi\theta}}{1 + (b_1/b_0 R) e^{-i\theta} + (b_2/b_0 R^2) e^{-2i\theta} + \cdots + (b_n/b_0 R^n) e^{-ni\theta}} \right| \end{aligned}$$

$|a_1/a_0|, |a_2/a_0|, \dots, |a_m/a_0|$ の最大値を A , $|b_1/b_0|, |b_2/b_0|, \dots, |b_n/b_0|$ の最大値を B とすると $R > A + 1$ に対して,

$$\begin{aligned} &\left| 1 + (a_1/a_0 R) e^{-i\theta} + (a_2/a_0 R^2) e^{-2i\theta} + \cdots + (a_m/a_0 R^m) e^{-mi\theta} \right| \\ &\leq 1 + \frac{A}{R} + \frac{A}{R^2} + \cdots + \frac{A}{R^m} \leq 1 + \frac{A}{R-1} < 2 \end{aligned}$$

また, $R > 2B + 1$ に対して

$$\begin{aligned} &\left| 1 + (b_1/b_0 R) e^{-i\theta} + (b_2/b_0 R^2) e^{-2i\theta} + \cdots + (b_n/b_0 R^n) e^{-ni\theta} \right| \\ &\geq 1 - \left| (b_1/b_0 R) e^{-i\theta} + (b_2/b_0 R^2) e^{-2i\theta} + \cdots + (b_n/b_0 R^n) e^{-ni\theta} \right| \\ &\geq 1 - \left(\frac{B}{R} + \frac{B}{R^2} + \cdots + \frac{B}{R^n} \right) \geq 1 - \frac{B}{R-1} \geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$A + 1, 2B + 1$ のどちらより大きな R に対して

$$|F(s)| \leq \left| \frac{a_0}{b_0} \right| \cdot \frac{1}{R^{n-m}} \cdot \frac{2}{1/2} \leq \frac{M}{R^k}$$

ここに M は $4a_0/b_0$ より大きな数, $k = n - m \geq 1$ である。証明完

分岐点を持つ場合は式 (4.4) をそのままでは用いることは出来ない。例題では $F(s)$ の分岐点を $s = 0$ とするときのプロムウイッチの積分路の拡張を行う。

4.3 積分定理によるラプラス逆変換の例

- 1 $F(s) = \frac{1}{s-3}$ の逆変換
極は $s = 3$ だから

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{s-3} \right] = \frac{e^{st}}{s-3} \text{ の留数} = \lim_{s \rightarrow 3} (s-3) \frac{e^{st}}{s-3} = e^{3t}$$

- 2 $F(s) = \frac{1}{(s-1)^3(s+1)^2}$ の逆変換
 $s = 1$ が位数 3 の, $s = -1$ は位数 2 の極だから,
 $s = 1$ での留数は

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2!} \frac{d^2}{ds^2} \left[(s-1)^3 \frac{e^{st}}{(s-1)^3(s+1)^2} \right] &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2} \frac{d^2}{ds^2} \left[\frac{e^{st}}{(s+1)^2} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow 1} \frac{1}{2} \frac{\{(s+1)^2 t^2 - 4(s+1)t + 6\} e^{st}}{(s+1)^4} \\ &= \frac{1}{16} (2t^2 - 4t + 3) e^t \end{aligned}$$

$s = -1$ での留数は

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow -1} \frac{1}{1!} \frac{d}{ds} \left[(s+1)^2 \frac{e^{st}}{(s-1)^3(s+1)^2} \right] &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{d}{ds} \left[\frac{e^{st}}{(s-1)^3} \right] \\ &= \lim_{s \rightarrow -1} \frac{(ts - t - 3)e^{st}}{(s-1)^4} \\ &= \frac{1}{16} (-2t - 3) e^{-t} \end{aligned}$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{1}{(s-1)^3(s+1)^2} \right] = \frac{1}{16} \{ (2t^2 - 4t + 3) e^t + (-2t - 3) e^{-t} \}$$

- 3 $F(s) = \frac{a}{s^2 + a^2}$ の逆変換

$$e^{st} F(s) = \frac{ae^{st}}{(s-ai)(s+ai)}$$

だから, 虚軸上の $s = ai, s = -ai$ に極があり, それぞれの留数は

$$\frac{1}{2i} e^{iat}, -\frac{1}{2i} e^{-iat}$$

だから

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1} \left[\frac{a}{s^2 + a^2} \right] = \frac{1}{2i} (e^{iat} - e^{-iat}) = \sin at$$

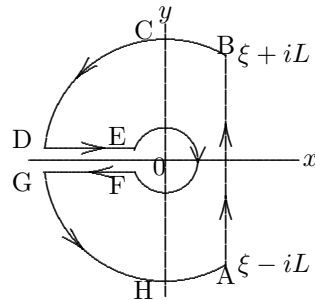
となる。

- 4 $F(s) = \frac{e^{-a\sqrt{s}}}{s}$ の逆変換

複素反転公式は

$$f(t)U(t) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\xi-i\infty}^{\xi+i\infty} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \quad (4.8)$$

となる。被積分関数は $s = 0$ の分岐点を持つ。したがって極のみを持つ場合のプロムウィッチの積分路を変更する必要がある。



この閉積分路に囲まれた領域には特異点が含まれていないから

$$0 = \frac{1}{2i\pi} \oint_C \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_{AB} \cdot + \int_{BCD} \cdot + \int_{DE} \cdot + \int_{EF} \cdot + \int_{FG} \cdot + \int_{GHA} \cdot$$

関数 $F(s)$ は条件 (4.6) を満たすから区間 [BCD],[GHA] の積分は外側の円周の半径 R が $R \rightarrow \infty$ で 0 になる。したがって $R \rightarrow \infty$ および内側の円周の半径 r が $r \rightarrow 0$ の極限では

$$f(t)U(t) = -\frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \left\{ \int_{DE} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \int_{FG} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds + \int_{EF} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds \right\}$$

となる。[DE] に沿っては $s = xe^{i(\pi-0)}$, $\sqrt{s} = \sqrt{x}i$ であり, s が D から E のとき x は R から r に変わる。

$$\int_{DE} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_R^r \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x} dx = - \int_r^R \frac{e^{-xt-ai\sqrt{x}}}{x} dx$$

[FG] に沿っては $s = xe^{-i(\pi-0)}$, $\sqrt{s} = -\sqrt{x}i$ であり, s が F から G のとき x は r から R に変わる。

$$\int_{FG} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = \int_r^R \frac{e^{-xt+ai\sqrt{x}}}{x} dx$$

[EF] に沿っては, $s = re^{i\theta}$ であり,

$$\int_{EF} \frac{e^{st-a\sqrt{s}}}{s} ds = i \int_{\pi}^{-\pi} e^{rte^{i\theta} - a\sqrt{r}e^{i\theta/2}} d\theta$$

よって

$$\begin{aligned} f(t)U(t) &= -\frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} \int_r^R \frac{e^{-xt}(e^{ai\sqrt{x}} - e^{-ai\sqrt{x}})}{x} dx - \frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} i \int_{\pi}^{-\pi} e^{rte^{i\theta} - a\sqrt{r}e^{i\theta/2}} d\theta \\ &= -\frac{1}{2i\pi} \lim_{R \rightarrow \infty, r \rightarrow 0} 2i \int_r^R \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx - \frac{1}{2\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\pi}^{-\pi} \lim_{r \rightarrow 0} e^{rte^{i\theta} - a\sqrt{r}e^{i\theta/2}} d\theta \\ &= -\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx - \frac{1}{2\pi} \int_{\pi}^{-\pi} 1 d\theta = 1 - \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-xt} \sin a\sqrt{x}}{x} dx \end{aligned}$$

なお, これは

$$f(t)U(t) = 1 - \operatorname{erf}(a/2\sqrt{t}) = \operatorname{erfc}(a/2\sqrt{t})$$

と表せる。

5 $F(s) = \frac{1}{s} \tanh \frac{T}{4}s$ の逆変換

これは元工大学長青井先生の「応用数学」からの引用です。これは無数に極がある場合になっている。

$$F(s) = \frac{1}{s} \frac{e^{Ts/2} - 1}{e^{Ts/2} + 1}$$

$e^{st}F(s)$ の極を求めその留数を計算すればよい。 $s \rightarrow 0$ で $F(s) \rightarrow T/2$ で $s = 0$ は正則点である。分母の零点は $e^{Ts/2} + 1 = 0$, $e^{Ts/2} = -1$, $Ts/2 = n\pi i = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$ より

$s = s_n i$, $s_n = 2n\pi/T$ が極になっている。各 $s_n i$ における留数の計算を以下の方法で行う。

$\sigma = s - s_n i$ において, 極 $s = s_n i$ を $\sigma = 0$ に移し, $e^{st}F(s)$ を σ で展開して $1/\sigma$ の係数とし留数を求める。

$$e^{st} = e^{(\sigma+s_n i)t} = e^{s_n t i} \{1 + o(\sigma)\}$$

$$\frac{1}{s} = \frac{1}{\sigma + s_n i} = \frac{1}{s_n i} \left(1 + \frac{\sigma}{s_n i}\right)^{-1} = \frac{1}{s_n i} \{1 + o(\sigma)\}$$

$$e^{Ts/2} = e^{Ts/2}(\sigma + s_n i) = e^{T\sigma/2} e^{Ts_n i/2} = e^{T\sigma/2} \cdot 1 = -\{1 + T\sigma/2 + o(\sigma^2)\}$$

$$\frac{e^{Ts/2} - 1}{e^{Ts/2} + 1} = \frac{4}{T} \frac{1}{\sigma} \{1 + o(\sigma)\}$$

したがって

$$e^{st}F(s) = -\frac{4i}{Ts_n} e^{s_n t i} \cdot \frac{1}{\sigma} \{1 + o(\sigma)\}$$

よって留数は

$$-\frac{4i}{Ts_n} e^{s_n t i}, \quad s_n = \frac{2n\pi}{T}, \quad n = \pm 1, \pm 3, \pm 5, \dots$$

となる。故に

$$\begin{aligned} f(t) &= -\frac{4i}{T} \left\{ \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{s_n} e^{s_n t i} + \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{-s_n} e^{-s_n t i} \right\} \\ &= -\frac{4i}{T} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{s_n} (e^{s_n t i} - e^{-s_n t i}) = -\frac{4i}{T} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{s_n} \cdot 2i \sin s_n t \\ &= \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots}^{\infty} \frac{1}{n} \sin \frac{2n\pi}{T} t \end{aligned}$$

第5章 2階の線形微分方程式

5.1 2階の線形微分方程式

2階の線形微分方程式は求積法を用いて初等関数の範囲で解けない場合が多い。したがって、応用上よく出てくる方程式をできるだけ統一的に解こうということになる。多くの場合、解は級数で表現せざるを得なくなる。この章では「寺沢寛一著、自然科学者のための数学概論」岩波書店、にしたがって展開する。はじめに、 $f_1(x), f_2(x), f_3(x)$ は変域 $[a, b]$ で連続な関数として、二階の微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = f_3(x) \quad (5.1)$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + f_1(x)\frac{dy}{dx} + f_2(x)y = 0 \quad (5.2)$$

を考える。これらは既に一般論で議論したが、一部追加、確認する。

(5.2) の特解 y_1 が得られている場合、 $y = y_1z$ とおいて、(5.1) に代入し

$$\frac{d^2z}{dx^2} + \left\{ f_1(x) + 2\frac{y_1'}{y_1} \right\} \frac{dz}{dx} = \frac{f_3(x)}{y_1}$$

となる。定数変化法 (1.28) を使って、

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1(x) dx} \left\{ \int e^{\int f_1(x) dx} f_3(x) y_1 dx + c_1 \right\}$$

したがって

$$y = y_1 \int \frac{1}{y_1^2} e^{-\int f_1(x) dx} \left\{ \int e^{\int f_1(x) dx} f_3(x) y_1 dx + c_1 \right\} dx + c_2 y_1 \quad (5.3)$$

となる。

(5.2) の独立な2つの特解 y_1, y_2 が得られているとき、

$$y = c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x)$$

とおいて、やはり定数変化法を用いる。

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx} + y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx}$$

c_1, c_2 を

$$y_1 \frac{dc_1}{dx} + y_2 \frac{dc_2}{dx} = 0 \quad (5.4)$$

となるように選ぶと

$$\frac{dy}{dx} = c_1 \frac{dy_1}{dx} + c_2 \frac{dy_2}{dx}$$

となる。したがって

$$\frac{d^2y}{dx^2} = c_1 \frac{d^2y_1}{dx^2} + c_2 \frac{d^2y_2}{dx^2} + \frac{dy_1}{dx} \frac{dc_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dc_2}{dx}$$

これらを (5.1) に代入して, y_1, y_2 が (5.2) の解であることを考慮すると

$$\frac{dy_1}{dx} \frac{dc_1}{dx} + \frac{dy_2}{dx} \frac{dc_2}{dx} = f_3(x) \quad (5.5)$$

となる。(5.4), (5.5) を解いて,

$$\frac{dc_1}{dx} = -\frac{f_3(x)y_2}{\Delta}, \quad \frac{dc_2}{dx} = -\frac{f_3(x)y_1}{\Delta}, \quad \Delta = y_1 \frac{dy_2}{dx} - y_2 \frac{dy_1}{dx} \quad (5.6)$$

これより

$$c_1 = -\int \frac{f_3(x)y_2}{\Delta} dx + A_1, \quad c_2 = \int \frac{f_3(x)y_1}{\Delta} dx + A_2$$

だから

$$y = A_1 y_1 + A_2 y_2 - y_1 \int \frac{f_3(x)y_2}{\Delta} dx + y_2 \int \frac{f_3(x)y_1}{\Delta} dx \quad (5.7)$$

となる。結局, 2次微分方程式 (5.1) の問題は同次方程式 (5.2) の問題と言える。

方程式 (5.2) は基準形に変換できる。

$$(1) t = \int e^{-\int f_1(x) dx} dx \text{ とおき,}$$

$$\psi(t) = f_2(x)e^{2\int f_1(x) dx}, \quad \phi(t) = f_3(x)e^{2\int f_1(x) dx}$$

とすると, (5.1) は基準形

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \psi(t)y = \phi(t)$$

となる。

(2) または, $y = u(x)v(x)$ とおいて, 一次微分項を消去するように

$$\psi(x) = f_2(x) - \frac{1}{2}f_1'(x) - \frac{1}{4}\{f_1(x)\}^2, \quad \phi(t) = f_3(x)e^{\frac{1}{2}\int f_1(x) dx}$$

とおけば, (5.1) は基準形

$$\frac{d^2 u}{dx^2} + \psi(x)u = \phi(x)$$

となる。

方程式 (5.2) を基準形に変換して

$$\frac{d^2 v}{dz^2} + \psi(z)v = 0 \quad (5.8)$$

とする。 z は複素数とし, (5.2) において, $f_1(z), f_2(z)$ がある領域で正則とすると, その変域内の点 $z = a$ について, $\psi(z)$ は点 $z = a$ を中心とする円の中で正則となる。

このとき, $v_0(z) = A + B(z - a)$, A, B は任意定数, から出発して第1章で述べた逐次近似法によって, $v(a) = b, v'(a) = b$ を満たす唯一の解が存在し, それは点 $z = a$ を中心とする円の中で正則であることが証明できる。そしてその変域を $\psi(z)$ の特異点を除いた領域に拡張 (解析接続) できる。

5.2 確定特異点と級数解法

2階の線形微分方程式

$$L(u) \equiv \frac{d^2 u}{dz^2} + P(z) \frac{du}{dz} + Q(z)u = 0 \quad (5.9)$$

の係数 $P(z), Q(z)$ がともに $z = a$ で極をもち、しかも $(z - a)P(z), (z - a)^2Q(z)$ がともに正則とする。このとき、 $z = a$ は方程式 (5.9) の確定特異点という。当面、 z その他の変数は複素数とする。

確定特異点付近の解を無限級数で求めることを考えよう。

$z = a$ を確定特異点とする。すなわち、 $(z - a)P(z) = p(z - a), (z - a)^2Q(z) = q(z - a)$ とおけば、 $p(z - a), q(z - a)$ は $z = a$ の付近で正則となり、収束級数で表せる。

$$p(z - a) = p_0 + (z - a)p_1 + (z - a)^2p_2 + \cdots, \quad q(z - a) = q_0 + (z - a)q_1 + (z - a)^2q_2 + \cdots \quad (5.10)$$

このとき、(5.9) は

$$\frac{d^2u}{dz^2} + \frac{p(z - a)}{z - a} \frac{du}{dz} + \frac{q(z - a)}{(z - a)^2} u = 0 \quad (5.11)$$

となる。 $z = a$ の近傍の解を

$$u = (z - a)^\lambda \left\{ A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n (z - a)^n \right\} \quad (5.12)$$

と仮定し、(5.10), (5.12) を (5.11) に代入して、各 $(z - a)$ の累乗の係数を 0 とおくと、

$$\left. \begin{aligned} A_0\phi(\lambda) &= 0 \\ A_1\phi(\lambda + 1) + A_0\phi(\lambda) &= 0 \\ A_2\phi(\lambda + 2) + A_1\phi(\lambda + 1) + A_0\phi(\lambda) &= 0 \\ \cdots & \\ A_n\phi(\lambda + n) + A_{n-1}\phi(\lambda + n - 1) + A_{n-2}\phi(\lambda + n - 2) + \cdots + A_0\phi(\lambda) &= 0 \\ \cdots & \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

となる。ここで

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0, \quad \phi_m(\lambda) = \lambda p_m + q_m, \quad m = 1, 2, \cdots \quad (5.14)$$

$A_0 \neq 0$ としてよいから、

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + (p_0 - 1)\lambda + q_0 = 0 \quad (5.15)$$

が得られる。この解 λ を $z = a$ における (5.9) の指数という。2つの指数を λ_1, λ_2 とすると、この差が 0、または整数でないときはそれぞれ次々に (5.13) に代入して、(5.9) の 2 つの特解

$$\begin{aligned} u_1 &= (z - a)^{\lambda_1} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(1)} (z - a)^n \right\} \\ u_2 &= (z - a)^{\lambda_2} \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(2)} (z - a)^n \right\} \end{aligned} \quad (5.16)$$

を得る。一般解はそれらの 1 次結合である。

一方、(5.15) の解 λ_1, λ_2 が等しいか、差が整数の時は一つの独立な解しか得られない。このときは、Frobenius の方法と呼ばれる次の手続きで求まる。

λ をパラメーターとして (5.13) から A_1, A_2, \cdots を λ, A_0 で表す。こうして求めた級数 (5.12) を方程式 (5.11) に代入すると

$$L(u) = A_0\phi(\lambda)(z - a)^{\lambda-2} \quad (5.17)$$

となる。勿論、 $\phi(\lambda) = 0$ なる λ のとき、 u は一つ目の解 u_1 となっている。(5.13) から A_n は分母に $\phi(\lambda + 1)\phi(\lambda + 2)\cdots\phi(\lambda + n)$ の因子を持っており、もし $\lambda_1 - \lambda_2 = m, n \geq m$ とすると、分母は因子 $\lambda - \lambda_2$ を持っていることになる。そこで、 $\lambda \rightarrow \lambda_2$ で A_n が有限となるように A_0 を選んでおく。 $A_0 = C(\lambda - \lambda_2)$ でよい。こうして決めた $u = u(z, \lambda)$ は方程式の解というだけでなく、

$$u(z, \lambda_2) = ku_1(z) \quad (5.18)$$

の関係にある。これ自身は新しい解を与えるものではないが、(5.17)の右辺が因数 $(\lambda - \lambda_2)^2$ を持つようにつくられており、 λ で微分して $\lambda = \lambda_2$ とおくと0となる。したがって、もう一つの解として

$$\begin{aligned} v(z) &= \left[\frac{\partial u(z, \lambda)}{\partial \lambda} \right]_{\lambda=\lambda_2} \\ &= ku_1(z) \log(z-a) + (z-a)^{\lambda_2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\partial A_n}{\partial \lambda} \right)_{\lambda=\lambda_2} (z-a)^n \end{aligned} \quad (5.19)$$

を得る。 $(\frac{\partial A_0}{\partial \lambda})_{\lambda=\lambda_2}$ は0でなく、 $v(z)$ は $z \rightarrow a$ で $(z-a)^{\lambda_2}$ 程度となり、 $u_1(z)$ と独立である。

5.3 Riemannの微分方程式と Gaussの微分方程式

$z = a, b, c$ の3点において確定特異点を有する微分方程式

$$\frac{d^2 u}{dz^2} + P(z) \frac{du}{dz} + Q(z)u = 0 \quad (5.20)$$

$$P(z) = \frac{1-\alpha-\alpha'}{z-a} + \frac{1-\beta-\beta'}{z-b} + \frac{1-\gamma-\gamma'}{z-c}$$

$$Q(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)(z-c)} \left\{ \frac{\alpha\alpha'(a-b)(a-c)}{z-a} + \frac{\beta\beta'(b-c)(b-a)}{z-b} + \frac{\gamma\gamma'(c-a)(c-b)}{z-c} \right\}$$

ただし、 $\alpha, \alpha', \beta, \beta', \gamma, \gamma'$ は定数で、 $\alpha + \alpha' + \beta + \beta' + \gamma + \gamma' = 1$

を Riemann の微分方程式という。 $z = \infty$ は正則点である。この解

$$u = P \left\{ \begin{matrix} a & b & c & \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{matrix} \right\} \quad (5.21)$$

を Reimann の P 関数という。

Riemann の微分方程式で、 $a = 0, b = \infty, c = 1$ とおき、 α, β, γ の代わりに $0, \alpha, 0$ 、 α', β', γ' の代わりにそれぞれ $1-\gamma, \beta, \gamma-\alpha-\beta$ とおいた方程式を Gauss の微分方程式、あるいは超幾何微分方程式という。

$$z(1-z) \frac{d^2 y}{dz^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\} \frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0 \quad (5.22)$$

確定特異点は $z = 0, z = 1, z = \infty$ である。したがって、Gauss の微分方程式の解は Riemann の P 関数を用いて、

$$y = P \left\{ \begin{matrix} 0 & \infty & 1 & \\ 0 & \alpha & 0 & z \\ 1-\gamma & \beta & \gamma-\alpha-\beta & \end{matrix} \right\} \quad (5.23)$$

となる。

5.4 超幾何級数

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \approx \sum_{n=0}^{\infty} A_n x^n \equiv 1 + \frac{\alpha\beta}{1! \cdot \gamma} x + \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{2! \cdot \gamma(\gamma+1)} x^2 + \frac{\alpha(\alpha+1)\cdots(\alpha+n-1)\beta(\beta+1)\cdots(\beta+n-1)}{n! \gamma(\gamma+1)\cdots(\gamma+n-1)} x^n + \cdots \quad (5.24)$$

を超幾何級数といい、収束するときその和を超幾何関数という。

超幾何級数をもっと広く定義し、したがって、超幾何関数も広く定義し、ここでの超幾何関数をその一部に定義するときもある。

$${}_pF_q(a_1, \dots, a_p; b_1, \dots, b_q; x) \approx \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k$$

$$\frac{c_{k+1}}{c_k} = \frac{(k+a_1)(k+a_2)\cdots(k+a_p)}{(k+b_1)(k+b_2)\cdots(k+b_q)(k+1)} \quad (k=0, 1, \dots)$$

によって定義された ${}_pF_q$ を generalized hypergeometric function ということもある。このとき、

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = {}_2F_1(\alpha, \beta; \gamma; x)$$

に対応する。

$|x| \leq \eta < 1$ では級数は一様収束する。 $x = 1$ では n 次の項と $n+1$ 次の項の比をとって、

$$\frac{A_n}{A_{n+1}} = \frac{(n+1)(\gamma+n)}{(\alpha+n)(\beta+n)} = 1 + \frac{1+\gamma-\alpha-\beta}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

となり、 $1+\gamma-\alpha-\beta > 1$ すなわち、 $\gamma > \alpha + \beta$ のとき、収束し、 $\gamma \leq \alpha + \beta$ のとき発散する。超幾何関数は特別な引数に対して初等関数になる。

$$\frac{1}{1-x} = F(1, 1, 1, x) = F(1, 2, 2, x), \quad (1+x)^p = F(-p, \beta, \beta, -x)$$

$$-\frac{\log(1-x)}{x} = F(1, 1, 2, x), \quad \log(1+x) = xF(1, 1, 2, -x)$$

$$e^x = \lim_{\beta \rightarrow \infty} F(1, \beta, 1, \frac{x}{\beta})$$

$$\cos nx = F\left(\frac{n}{2}, -\frac{n}{2}, \frac{1}{2}, \sin^2 x\right)$$

超幾何関数の微分は

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, z) \quad (5.25)$$

$$\frac{d^2F(\alpha, \beta, \gamma, z)}{dz^2} = \frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, z) \quad (5.26)$$

また

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{\Gamma(\gamma)}{\Gamma(\beta)\Gamma(\gamma-\beta)} \int_0^1 \frac{t^{\beta-1}(1-t)^{\gamma-\beta-1}}{(1-tz)^\alpha} dt \quad (5.27)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-i\infty}^{i\infty} \frac{\Gamma(\alpha+s)\Gamma(\beta+s)\Gamma(\gamma+s)}{\Gamma(\gamma-s)} (-z)^s ds \quad (5.28)$$

が成り立つ (式の導出は「自然科学者のための数学概論」等を参照して下さい)。

さて、ガウスの微分方程式 (超幾何微分方程式 (5.22)) の解を超幾何関数で表してみよう。

1 確定特異点 $z = 0$ の近傍

いま原点の近傍で (5.12) の型の解を求めるため、指数を求める式 (5.15) は

$$\phi(\lambda) = \lambda^2 + (\gamma - 1)\lambda = 0$$

となり、解くと $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1 - \gamma$ となる。

$\lambda_1 = 0$ に対して、

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n \quad (5.29)$$

とおいて、Gauss の微分方程式 (5.22) に代入する。

$$\sum_{n=0}^{\infty} \{(n+1)(n+\gamma)A_{n+1} - [n^2 + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta]A_n\}z^n = 0 \quad (5.30)$$

となり、

$$A_{n+1} = \frac{(n+\alpha)(n+\beta)}{(n+1)(n+\gamma)} A_n$$

が得られる。これは超幾何級数の係数の項の比で、 $|z| < 1$ において収束し、

$$y_1 = A_0 F(\alpha, \beta, \gamma, z) \quad (5.31)$$

とおける。

$\lambda_2 = 1 - \gamma$ にたいしては

$$y_2 = z^{1-\gamma} \eta \quad (5.32)$$

とおくと、

$$z(1-z) \frac{d^2 \eta}{dz^2} + \{2 - \gamma - (\alpha + \beta - 2\gamma + 3)z\} \frac{d\eta}{dz} - (\alpha - \gamma + 1)(\beta - \gamma + 1)\eta = 0$$

となり、

$$y_2 = z^{1-\gamma} F(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2\gamma, z) \quad (5.33)$$

が得られる。したがって Gauss の微分方程式 (5.22) の原点近傍での一般解は

$$y = AF(\alpha, \beta, \gamma, z) + Bz^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, z) \quad (5.34)$$

となる。

2 確定特異点 $z = 1$ の近傍

$$\xi = 1 - z$$

とおくと、(5.22) は

$$\xi(1-\xi) \frac{dy}{d\xi^2} + \{\alpha + \beta - \gamma + 1 - (\alpha + \beta + 1)\xi\} \frac{dy}{d\xi} - \alpha\beta y = 0$$

したがって

$$y_1 = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta - \gamma + 1, 1 - z) \quad (5.35)$$

$$y_2 = (1 - z)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \beta, \gamma - \alpha, \gamma - \alpha - \beta + 1, 1 - z) \quad (5.36)$$

3 確定特異点 $z = \infty$ の近傍

$$z = \frac{1}{\xi}, \quad y = \xi^\alpha \eta$$

とおくと

$$\xi(1-\xi) \frac{d\eta}{d\xi^2} + \{\alpha - \beta + 1 - (2\alpha - \gamma + 2)\xi\} \frac{d\eta}{d\xi} - \alpha(\alpha - \gamma + 1)\eta = 0$$

これより,

$$y_1 = \frac{1}{z^\alpha} F(\alpha, 1 + \alpha - \gamma, 1 + \alpha - \beta, \frac{1}{z}) \quad (5.37)$$

$$y_2 = \frac{1}{z^\beta} F(\beta, 1 + \beta - \gamma, 1 + \beta - \alpha, \frac{1}{z}) \quad (5.38)$$

さらに,

$$P \left\{ \begin{array}{ccc} a & b & c \\ \alpha & \beta & \gamma & z \\ \alpha' & \beta' & \gamma' & \end{array} \right\} = \left(\frac{z-\alpha}{z-\beta} \right)^\alpha \left(\frac{z-\gamma}{z-\beta} \right)^\gamma f \left(\alpha + \beta + \gamma, \alpha + \beta' + \gamma, 1 + \alpha - \alpha', \frac{(z-\alpha)(\gamma-\beta)}{(z-\beta)(\gamma-\alpha)} \right) \quad (5.39)$$

(f は超幾何方程式の一般解, $b = \infty$ の場合は $z - b$ および $c - b$ は全て 1 に置き換える)

の関係が得られる。したがって Riemann の微分方程式の解は全て、超幾何関数で表現したことになる。

5.5 Legendre の微分方程式

超幾何方程式 (5.22) で $\alpha = n + 1, \beta = -n, \gamma = 1$ とおくと,

$$z(1-z) \frac{d^2y}{dz^2} + (1-2z) \frac{dy}{dz} + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1) \quad (5.40)$$

となる。超幾何級数 $F(\alpha, \beta, \gamma, z)$ は $|z| < 1$ では一様収束し、 $z = 1$ では $\gamma > \alpha + \beta$ のとき発散した。一般には、 $z = 1$ では $\gamma \leq \alpha + \beta$ の時発散するが、 $z = 1$ でも有界の値を持つ、すなわち級数が収束する、という条件を与える。この境界値の設定が方程式 (5.40) の固有値問題を設定する。 $\alpha = n + 1, \beta = -n, \gamma = 1$ の場合、 $\gamma = \alpha + \beta$ となるが、 n が整数の時に限って級数は有限項にとどまり、 $z = 1$ で有界の条件を満たすことになる。さらに $t = 1 - 2z$ とすると、Legendre の微分方程式

$$(1-t^2) \frac{d^2y}{dt^2} - 2t \frac{dy}{dt} + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.41)$$

あるいは

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dy}{dt} \right] + \lambda y = 0, \quad \lambda = n(n+1), n = 0, 1, 2, \dots \quad (5.42)$$

が得られる。確定特異点は $-1, 1, \infty$ である。(5.41) の解をべき級数

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$$

で表して、(5.41) に代入して

$$\sum_{k=0}^{\infty} [(k+2)(k+1)a_{k+2} - k(k-1)a_k - 2ka_k + \lambda a_k] t^k = 0$$

$$(k+2)(k+1)a_{k+2} - [k(k+1) - \lambda]a_k = 0$$

$$a_{k+2} = \frac{k(k+1) - \lambda}{(k+1)(k+2)} a_k, \quad (k=0, 1, 2, \dots)$$

a_0, a_1 は未定である。これより、 $\lambda = n(n+1)$ 、 n は整数ならば、 n 次の多項式の解があることがわかる。

$$z = (t^2 - 1)^n \text{とおくと} \quad (t^2 - 1) \frac{dz}{dt} - 2ntz = 0$$

n 回微分して、

$$(t^2 - 1) \frac{dz^{(n)}}{dt} - 2n(n+1)tz^{(n-1)} = 0$$

これをもう一度微分すると

$$\frac{d}{dt} \left[(1-t^2) \frac{dz^{(n)}}{dt} \right] + n(n+1)z^{(n)} = 0$$

そこで解を

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad \lambda = n(n+1), \quad (n=0, 1, 2, \dots) \quad (\text{Rodrigues の公式}) \quad (5.43)$$

とし、これを Legendre の多項式という。

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t), \dots$$

以下簡単に Legendre の多項式の性質をまとめておく。

1 超幾何関数で表せる。 $P_n(t) = F(n+1, -n, 1, (1-t)/2)$

2 Legendre 多項式は固有値問題の解だから、直交系をなす。また

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 P_n(t)^2 dt &= \frac{1}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n dt = \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n \frac{d^{2n}}{dt^{2n}} (t^2 - 1)^n dt \\ &= \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = \frac{(-1)^n (2n)!}{2^{2n}(n!)^2} (-1)^n 2 \frac{2 \cdot 4 \cdot \dots \cdot 2n}{3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} = \frac{2}{2n+1} \end{aligned}$$

$$t^2 = \xi \text{とおくと, } \int_{-1}^1 (t^2 - 1)^n dt = (-1)^n 2 \int_0^1 (1 - \xi)^n \frac{1}{2} \xi^{-1/2} d\xi = (-1)^n B(n+1, 1/2) = (-1)^n \frac{\Gamma(n+1)\Gamma(1/2)}{\Gamma(n+3/2)}$$

となる。ベータ関数 $B(n+1, 1/2)$ については付録を参照

したがって

$$\int_{-1}^1 P_n(t) P_m(t) dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} & (m = n) \end{cases} \quad (5.44)$$

3 $P_n(t)$ は $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$ の偶奇性を持っている。また

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t+1)^n (t-1)^n]$$

に積の微分公式 (Leibniz の公式) を適用すると、

$$P_n(1) = 1$$

が得られる。

- 4 積分表示がもとまる。Goursat の定理

$$f^{(n)}(x) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-x)^{n+1}} dz$$

を (5.43) に適用して

$$P_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{1}{2^n} \frac{(z^2-1)^n}{(z-x)^{n+1}} dz, \quad \Gamma \text{ は } x \text{ を含む閉曲線 (Schläfli の公式)} \quad (5.45)$$

$x > 1$ として, $z = x + \sqrt{x^2-1}e^{i\phi}$ において, Γ を中心 x , 半径 $\sqrt{x^2-1}$ の円周にとると

$$P_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi (x + \sqrt{x^2-1} \cos \phi)^n d\phi \quad (\text{Laplace の公式}) \quad (5.46)$$

となる。 $P_n(x)$ は多項式だから, 全ての x について (5.46) が言える。またこれより,

$$|P_n(x)| \leq 1 \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

が得られる。

- 5 母関数が存在する。Laplace の公式より $|z| < |x \pm \sqrt{x^2-1}|$ にたいして,

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sum_{n=0}^{\infty} [(x + \sqrt{x^2-1} \cos \phi) z]^n d\phi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{d\phi}{1 - (x + \sqrt{x^2-1} \cos \phi) z} = \frac{1}{\pi z \sqrt{x^2-1}} \int_0^\pi \frac{d\phi}{\frac{1-xz}{z\sqrt{x^2-1}} - \cos \phi} \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} \quad (\text{公式 } \int_0^\pi \frac{d\phi}{t - \cos \phi} = \frac{\pi}{\sqrt{t^2-1}} \text{ を用いる}) \end{aligned}$$

$|z| > 1$ にたいしては $1/|z|$ について同様のことを行い

$$\frac{1}{\sqrt{1-2xz+z^2}} = \begin{cases} \sum_{n=0}^{\infty} P_n(x) z^n & (|z| < 1) \\ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{P_n(x)}{z^{n+1}} & (|z| > 1) \end{cases} \quad (-1 \leq x \leq 1) \quad (5.47)$$

となる。

- 6 いくつかの漸化式が (5.47) を z や x で微分して得られる。

$$(n+1)P_{n+1} - (2n+1)xP_n(x) + nP_{n-1}(x) = 0 \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (5.48)$$

$$P_1(x) - xP_0(x) = 0$$

$$P'_{n+1}(x) - xP'_n(x) = (n+1)P_n \quad (5.49)$$

- 7 $P_n(x)$ は n 次の多項式だから, n 個の零点が存在するが, それらはすべて異なる実数である (証明略)。

5.6 ベッセルの微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) y = 0 \quad (5.50)$$

をベッセルの微分方程式という。 $t = 0$ が確定特異点であり、指数を決める式は $\phi(\lambda) = \lambda^2 - \nu^2 = 0$ だから、 $\lambda = \pm\nu$ となる。 $\lambda = \nu$ の場合の解

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (5.51)$$

を第 ν 次の第 1 種ベッセルまたは (狭義の) ベッセル関数、 $J_\nu(t)$ と独立なもう一つの解

$$N_\nu(t) = \frac{\cos \nu\pi \cdot J_\nu(t) - J_{-\nu}(t)}{\sin \nu\pi} \quad (5.52)$$

を第 ν 次の第 2 種のベッセルまたはノイマン関数という。また $H_\nu^{(1)}(t) = J_\nu(t) + iN_\nu(t)$, $H_\nu^{(2)}(t) = J_\nu(t) - iN_\nu(t)$ をそれぞれ第 1 種, 第 2 種のハンケル関数といい、 $J_\nu(t)$, $N_\nu(t)$, $H_\nu^{(1)}$, $H_\nu^{(2)}(t)$ を (広義の) ベッセル関数と呼ばれる。

$t = 0$ の近傍では

$$J_\nu(t) \sim \frac{t^\nu}{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}, t \rightarrow 0 : J_0(t) \rightarrow 1, J_\nu(t) \rightarrow 0 \quad (\nu > 0) \quad (5.53)$$

$$N_\nu(t) \sim o\left(\frac{1}{t^\nu}\right) \quad (\nu > 0), \text{特に } N_0(t) \sim \frac{2}{\pi} \log t, \quad t \rightarrow 0 : N_\nu(t) \rightarrow -\infty \quad (5.54)$$

$t \rightarrow \infty$ の漸近形はどちらも

$$y(t) \sim * \frac{1}{\sqrt{t}} \cos(t + \delta) \quad (5.55)$$

で減衰振動である。

つぎの一連の漸化式が直接代入によって得られる。

$$\frac{d}{dt} \{t^\nu J_\nu(t)\} = t^\nu J_{\nu-1} \quad (5.56)$$

$$\frac{d}{dt} \{t^{-\nu} J_\nu(t)\} = -t^{-\nu} J_{\nu-1} \quad (5.57)$$

(5.56), (5.57) を書き下すと

$$J'_\nu(t) = -\frac{\nu}{t} J_\nu(t) + J_{\nu-1}(t)$$

$$J'_\nu(t) = +\frac{\nu}{t} J_\nu(t) - J_{\nu+1}(t)$$

となり、これから、

$$J_{\nu+1}(t) = 2\frac{\nu}{t} J_\nu(t) - J_{\nu-1}(t) \quad (5.58)$$

が得られる。

$\nu = n =$ 整数の場合に限定すると、次の性質がある。

$$J_n(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!(n+k)!} \left(\frac{t}{2}\right)^{n+2k} \quad (5.59)$$

1 n が正の整数の時、 $J_{-n} = (-1)^n J_n(t)$

2 一連の漸化式が成り立つ。特に $n = 0$ のとき $J'_0(t) = -J_1(t)$

- 3 ベッセル関数の母関数 $e^{(1/2)t(u-1/u)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} J_n(t)t^n$
 $u = e^{i\theta}$ とおくと

$$e^{it \sin \theta} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(t)e^{ni\theta}$$

(実行形式ファイル, 'fillust.exe' の実行によって関数の概形を知ることが出来る)
 ベッセルの微分方程式で $t = kx$ として, x を独立変数にすると

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + (k^2 - \frac{\nu^2}{x^2})y = 0 \quad (5.60)$$

となり, 解は $y = J_\nu(kx)$ となる。 $J_\nu(kx)$ には次の性質がある。

- 1 $\nu > -1$ ならば, $J_\nu(x)$ の零点は全て実数であり, 無限個ある。
 零点は正, 負の対で現れるから, 全て正のみを扱う。 $J_\nu(\mu_i) = 0, \mu_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots$
- 2 ベッセル関数の直交性

$$\int_0^l x J_\nu(\mu_i \frac{x}{l}) J_\nu(\mu_j \frac{x}{l}) dx = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ \frac{l^2}{2} J_\nu^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i) & (j = i) \end{cases} \quad (\nu > -1) \quad (5.61)$$

第6章 付録1 一授業で用いる特殊関数と積分

ここでは授業に関係するいくつかの関数と公式をメモする。より詳しくはそれぞれの専門書を参照して下さい。ここでは出来るだけ複素関数論を用いない方法を用いた。

6.1 誤差関数, ガンマ関数, ベータ関数

1 $\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$
証明.

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

とおくと

$$I^2 = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx \int_0^{\infty} e^{-y^2} dy = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

ここで, (x, y) 平面での積分を $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ によって (r, θ) 平面での積分に変換する。

$$x = 0 \rightarrow \infty, y = 0 \rightarrow \infty \text{ の時, } \theta = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2}, r = 0 \rightarrow \infty$$

したがって

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_0^{\pi/2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta = \int_0^{\infty} r e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} d\theta \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-r^2} d(r^2) \cdot [\theta]_0^{\pi/2} = \frac{1}{2} [-e^{-r^2}]_0^{\infty} \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4} \end{aligned}$$

よって

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

また

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}, \quad (a > 0)$$

2 誤差関数 $\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$

$$\operatorname{erf}(\infty) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 1$$

$$\operatorname{erf}(-x) = -\operatorname{erf}(x)$$

また

$$\operatorname{erfc}(x) = 1 - \operatorname{erf}(x)$$

を余誤差関数という。(テキストによって定義の係数が違うことがあるから注意)

3 Fresnel の積分 $\int_0^\infty \sin x^2 dx = \int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$

証明.

$$\int_0^\infty \frac{\sin a}{\sqrt{a}} da = \int_0^\infty \sin a \left[\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-ax^2} dx \right] da = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty dx \int_0^\infty e^{-ax^2} \sin ada$$

ここで

$$\int_0^\infty e^{-ax^2} \sin ada = \frac{1}{1+x^4}, \quad \int_0^\infty \frac{dx}{1+x^4} = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

を用いると

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

同様に

$$\int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

これらは $\frac{1}{\sqrt{x}}$ のフーリエ変換に用いる。最後に x を x^2 とおくと、公式が得られる。

普通、複素関数を用いてもっと簡単に求められる。

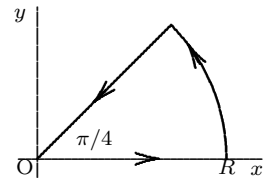
図の扇形の閉積分路の内側では解析的だから、 $\pi/4$ の傾きの線上では、 $z = te^{\frac{\pi}{4}i}$ において

$$\int_C e^{-z^2} dz = \int_0^R e^{-x^2} dx + \int_0^{\pi/4} e^{-R^2 e^{2i\phi}} (iR e^{i\phi}) d\phi + \int_R^0 (\cos t^2 - i \sin t^2) e^{\frac{\pi}{4}i} dt = 0$$

扇形の弧の部分での積分は $R \rightarrow \infty$ で 0 となるから

$$\int_0^\infty (\cos t^2 - i \sin t^2) dt = e^{-\frac{\pi}{4}i} \int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}} (1-i)$$

となる。



$$C(x) = \int_0^x \cos t^2 dt, \quad S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt$$

をフレネル積分という。 $C(\infty) = S(\infty) = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ である。また

$$c(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - C(x) = \int_x^\infty \cos t^2 dt, \quad s(x) = \sqrt{\frac{\pi}{8}} - S(x) = \int_x^\infty \sin t^2 dt$$

フレネル積分の補関数という。

4 正弦積分

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

は良く知られている (フーリエ変換と偏微分方程式メモ参照)。したがって、

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt, \quad \text{si}(x) = \frac{\pi}{2} - \text{Si}(x) = \int_x^\infty \frac{\sin t}{t} dt$$

正弦積分関数, 正弦積分の補関数と定義すると, $\text{Si}(\infty) = \frac{\pi}{2}$ となる。

余弦積分関数を

$$\text{Ci}(x) = \int_x^\infty \frac{\cos t}{t} dt$$

指数積分関数, 対数積分関数を

$$\text{Ei}(x) = \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad \text{Li}(x) = \int_0^x \frac{1}{\log t} dt$$

とするが, 定義はテキストによって変わることがあるから注意を要す。

5 $\int_0^{\infty} \frac{e^{-x^2}}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{a^2} \operatorname{erfc}(a)$
証明.

$$I(p) = \int_0^{\infty} \frac{e^{-p(x^2+a^2)}}{x^2 + a^2} dx$$

とおくと

$$\frac{dI}{dp} = - \int_0^{\infty} e^{-p(x^2+a^2)} dx = -e^{-pa^2} \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{p}}$$

したがって, $a\sqrt{p} = y$ として

$$I(p) = \int_p^{\infty} \frac{\sqrt{\pi} e^{-pa^2}}{2\sqrt{p}} dp = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \int_y^{\infty} e^{-y^2} dy = \frac{\pi}{2a} \operatorname{erfc}(a\sqrt{p})$$

最後に $p = 1$ とおけばよい。

6 Laplace の積分 $\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} e^{-\frac{b^2}{4a}}, (b > 0)$
証明.

$$F(b) = \int_0^{\infty} e^{-x^2} \cos bxdx$$

と置くと

$$\begin{aligned} \frac{dF(b)}{db} &= - \int_0^{\infty} xe^{-ax^2} \sin bxdx = \left[\frac{e^{-ax^2}}{2a} \cdot \sin bx \right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \frac{e^{-ax^2}}{2a} \cdot b \cos bxdx \\ &= -\frac{b}{2a} \int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx = -\frac{b}{2a} F(b) \end{aligned}$$

したがって

$$\frac{dF(b)}{db} = -\frac{b}{2a} F(b)$$

を解くと

$$F(b) = ce^{-\frac{b^2}{4a}}, \quad c \text{ は積分定数}$$

$b = 0$ のとき,

$$F(0) = \int_0^{\infty} e^{-ax^2} dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

より $c = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}}$ となり, 証明された。

7 $\frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-tx} \sin b\sqrt{x}}{x} dx = \operatorname{erf}(b/2\sqrt{t})$
証明.

積分を $I(b)$ とおくと, $x^2 = y$ の変換により

$$I(b) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-ty^2} \sin by}{y} dy$$

これは前項の結果を用いると

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-ty^2} \cos by dy = \frac{2}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{t}} e^{-b^2/4t} = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-b^2/4t}$$

$I(0) = 0$ を用いると

$$I(b) = \int_0^b \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-b^2/4t} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{b/2\sqrt{t}} e^{-q^2} dq = \operatorname{erf}(b/2\sqrt{t})$$

8 ガンマ関数 $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0)$

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t} dt = 1$$

$t = u^2$ とおくと

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-t} dt = 2 \int_0^\infty e^{-u^2} du = \sqrt{\pi}$$

また

$$\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt = \left[\frac{1}{x} t^x e^{-t}\right]_0^\infty + \frac{1}{x} \int_0^\infty t^x e^{-t} dt = \frac{1}{x} \Gamma(x+1)$$

より漸化式

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$$

が成り立つ。特に

$x = n = 1, 2, 3, \dots$ のとき

$$\Gamma(n+1) = n!$$

$x = n + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}, \dots$ (半奇数) のとき

$$\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, \quad \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2}\Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}, \dots, \quad \Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{(2n)!}{2^{2n}n!}\sqrt{\pi}$$

9 ベータ関数 $B(p, q) = \int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1} dt, \quad (p > 0, q > 0)$

$t = \cos^2 \theta$ と変換すると

$$B(p, q) = 2 \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta$$

となる。また

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

特に, $p = m = 1, 2, \dots, q = n = 1, 2, \dots$ のとき

$$B(m, n) = \frac{(m-1)!(n-1)!}{(m+n-1)!}$$

証明.

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = \int_0^\infty x^{p-1} e^{-x} dx \int_0^\infty y^{q-1} e^{-y} dy = \int_0^\infty \int_0^\infty x^{p-1} y^{q-1} e^{-(x+y)} dx dy$$

ここで $x = \xi^2, y = \eta^2$ と置くと

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty \int_0^\infty \xi^{2p-1} \eta^{2q-1} e^{-(\xi^2+\eta^2)} d\xi d\eta$$

さらに $\xi = r \cos \theta, \eta = r \sin \theta$ の変換によって

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 \int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta$$

ここで $r^2 = s$ と置くと

$$\int_0^\infty r^{2p+2q-1} e^{-r^2} dr = \frac{1}{2} \int_0^\infty s^{p+q-1} e^{-s} ds = \frac{1}{2} \Gamma(p+q)$$

だから

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 2\Gamma(p+q) \int_0^{\pi/2} (\cos \theta)^{2p-1} (\sin \theta)^{2q-1} d\theta = \Gamma(p+q)B(p, q)$$

証明完.

この公式はラプラス変換を用いて簡単に証明できる。合成法則より、

$$\mathcal{L} \left[\int_0^t \tau^{p-1} (t-\tau)^{q-1} d\tau \right] = \mathcal{L} [t^{p-1} * t^{q-1}] = \frac{\Gamma(p)}{s^p} \frac{\Gamma(q)}{s^q} = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{s^{p+q}}$$

したがって

$$\int_0^t \tau^{p-1} (t-\tau)^{q-1} d\tau = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} t^{p+q-1}$$

ここで、 $t = 1$ とおけばよい。

$$\left(\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)\right)^2 = B\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) = 2 \int_0^{\pi/2} d\theta = \pi$$

より $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$ が得られる。これは、 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ のもう一つの証明になっている。

もっと一般に

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = \frac{\pi}{\sin \pi p} \quad (\text{相補公式})$$

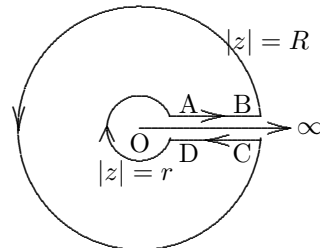
が成り立つ。これを以下に証明しておく。

$x = t(1-t)$ とおくと

$$\Gamma(p)\Gamma(1-p) = B(p, 1-p) = \int_0^1 t^{p-1} (1-t)^{-p} dt = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

となる。右辺を留数の方法で求める。

$0 < p < 1$ において関数 $z^{p-1}/(1+z)$ は多価関数であり、 $z = 0$ が分岐点となっている。上図の積分路 Γ を考える。 $z^{p-1} = e^{(p-1)\log z}$ の $\log z$ が $r \rightarrow +0$ で実数である分岐を選ぶ。そのとき



$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{AB} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = \int_0^\infty \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{CD} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = e^{2ip\pi} \int_{\infty}^0 \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = -e^{2ip\pi} \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

積分路 [BC] では

$$\left| \frac{z^{p-1}}{1+z} \right| \leq \frac{e^{(p-1)\log R}}{|1+z|} \leq c \frac{R^{p-1}}{R}$$

であり、積分経路の長さ $2\pi R$ での積分は $\leq cR^{p-1}$, ($p-1 < 0$) となり、

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{BC} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 0$$

また積分路 [DA] では

$$\left| \frac{z^{p-1}}{1+z} \right| \leq \frac{e^{(p-1)\log r}}{|1+z|} \leq cr^{p-1}$$

であり、積分路の長さ $2\pi r$ での積分は $\leq ce^p$ となり、

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{DA} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = 0$$

よって

$$\lim_{r \rightarrow 0, R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma} \frac{z^{p-1}}{1+z} dz = (1 - e^{2i\pi p}) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

積分路 Γ 内に含まれる極は $z = -1$ だけである。 $z = -1$ に対する留数は $e^{(p-1)\log u}$ の値、である。 $\log z = i\pi$ を考慮すると $e^{i\pi(p-1)}$ となる。よって

$$2i\pi e^{i\pi(p-1)} = (1 - e^{2i\pi p}) \int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx$$

したがって

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{p-1}}{1+x} dx = \frac{-2i\pi e^{i\pi p}}{1 - e^{2i\pi p}} = \frac{\pi}{\sin \pi p}$$

証明完.

6.2 ベッセル関数のラプラス変換

1 $J_0(t)$ のラプラス変換

$J_0(t)$ は微分方程式

$$t \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{dy}{dt} + ty = 0$$

の解である。したがって $y(0) = J_0(0) = 1, y'(0) = J_0'(0) = 0$ だから

$$-\frac{d}{ds} \{s^2 Y - s \cdot 1 - 0\} + \{sY - 1\} - \frac{dY}{ds} = 0$$

$$\frac{dY}{ds} = -\frac{sY}{s^2 + 1}$$

解くと

$$Y(s) = \frac{c}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

$\lim_{s \rightarrow \infty} sY(s) = c, \lim_{t \rightarrow 0} J_0(t) = 1$ だから 初期値定理

$$\lim_{t \rightarrow 0} f(t) = \lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$$

を適用すると $c = 1$ が得られる。よって

$$\mathcal{L}[J_0(t)] = \frac{1}{\sqrt{s^2 + 1}}$$

- 2 $J_1(t)$ のラプラス変換
公式 $J_0'(t) = -J_1(t)$ を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[J_1(t)] &= -\mathcal{L}[J_0'(t)] = -\{s\mathcal{L}[J_0(t)] - 1\} \\ &= 1 - \frac{1}{\sqrt{s^2+1}} = \frac{\sqrt{s^2+1}-s}{\sqrt{s^2+1}}\end{aligned}$$

- 3 $J_n(t)$ のラプラス変換
 $\mathcal{L}[J_0(t)], \mathcal{L}[J_1(t)]$ からはじめて, 帰納法で

$$\mathcal{L}[J_n(t)] = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+s}}$$

を証明する。漸化式

$$J_{n+1}(t) = \frac{2n}{t}J_n(t) - J_{n-1}(t)$$

の両辺をラプラス変換して

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[J_{n+1}(t)] &= 2n \int_s^\infty \mathcal{L}[J_n(t)] ds - \mathcal{L}[J_{n-1}(t)] \\ &= 2n \int_s^\infty \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+1}} ds - \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{n-1}}{\sqrt{s^2+1}} \\ &= 2(\sqrt{s^2+1}-s)^n - \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^{n-1}}{\sqrt{s^2+1}} \\ &= \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^n}{\sqrt{s^2+s}}\end{aligned}$$

積分は $\sqrt{s^2+1}-s = x$ の変換で行っている。

- 4 $tJ_0(at), tJ_1(at)$ のラプラス変換

$$\begin{aligned}\mathcal{L}[tJ_0(at)] &= -\frac{d}{ds}\mathcal{L}[J_0(at)] \\ &= -\frac{d}{ds}\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} = \frac{s}{(s^2+a^2)^{3/2}}\end{aligned}$$

また

$$\frac{d}{da}\mathcal{L}[J_0(at)] = \frac{d}{da}\frac{1}{\sqrt{s^2+a^2}} = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

より

$$\mathcal{L}[tJ_0'(at)] = \frac{-a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

であり, $J_0'(z) = -J_1(z)$ だから

$$\mathcal{L}[tJ_1(at)] = \frac{a}{(s^2+a^2)^{3/2}}$$

- 5 一般のベッセル関数 $J_\nu(t)$ のラプラス変換
 $\nu > -1, s > 0$ に対して

$$\mathcal{L}[J_\nu(t)] = \frac{(\sqrt{s^2+1}-s)^\nu}{\sqrt{s^2+1}}$$

$\nu > 0, s > 0$ に対して

$$\mathcal{L} \left[\left(\frac{t}{2} \right)^{\nu-(1/2)} \frac{\sqrt{\pi}}{\Gamma(\nu)} J_{\nu-(1/2)}(t) \right] = \left(\frac{1}{s^2+1} \right)^\nu$$

6 $J_0(2\sqrt{ut})$ のラプラス変換

$$J_0(2\sqrt{t}) = 1 - t + \frac{t^2}{2^2} - \frac{t^3}{1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2} + \dots$$

したがって

$$\mathcal{L} [J_0(2\sqrt{t})] = \frac{1}{s} \left(1 - \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{s^2} - \frac{1}{3!} \cdot \frac{1}{s^3} + \dots \right) = \frac{1}{s} e^{-1/s}$$

よって相似法則を用いて

$$\mathcal{L} [J_0(2\sqrt{ut})] = \frac{1}{s} e^{-u/s}$$

7 $\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})f(u)du$ のラプラス変換

$$\mathcal{L} \left[\int_0^\infty J_0(2\sqrt{ut})f(u)du \right] = \int_0^\infty \frac{1}{s} e^{-u/s} f(u)du = F(1/s)/s$$

6.3 無理関数を含む積分 … 楕円積分

$R(x, y)$ を x, y の有理関数, $\phi(x)$ を x の 3 次または 4 次の多項式とするとき

$$\int R(x, \sqrt{\phi(x)})dx \tag{6.1}$$

の形の不定積分を楕円積分という。 $\phi(x)$ を x の 1 次または 2 次の多項式のときは初等積分が可能であることを知っているが, $\phi(x)$ を x の 3 次または 4 次の多項式のばあいには一般に初等積分で表すことが出来ない。(参.「数学公式 I」(岩波))

$R(x, \sqrt{\phi(x)})$ は $P(x), Q(x)$ を x の有理関数として $P(x) + \frac{Q(x)}{\sqrt{\phi(x)}}$ の形に変形できるから積分 (6.1) はつぎの 2 つの形に帰結できる。

$$I[m] = \int \frac{x^m}{\sqrt{\phi(x)}} dx, \quad J[m] = \int \frac{dx}{(x-\lambda)^m \sqrt{\phi(x)}}$$

$\phi(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ とおくと漸化式

$$\begin{aligned} & (2m+4)a_0I[m+3] + (2m+3)a_1I[m+1] + (2m+2)a_2I[m+1] \\ & + (2m+1)a_3I[m] + 2m_4I[m-1] = 2x^m \sqrt{\phi(x)} \\ & 2m\phi(\lambda)J[m+1] + (2m-1)\phi'(\lambda)J[m] + (m-1)\phi''(\lambda)J[m-1] \\ & + \frac{2m-3}{6}\phi'''(\lambda)J[m-2] + \frac{m-2}{12}\phi''''(\lambda)J[m-3] \\ & = -\frac{2\sqrt{\phi(x)}}{(x-\lambda)^m} \end{aligned}$$

が成り立つから, $I[m]$ は $I[0], I[1], I[2]$ に, $J[m]$ は $J[1], J[0], J[-1], J[-2]$ で表され, さらに $J[0] = I[0], J[-1] = I[1] - \lambda I[0], J[-2] = I[2] - 2\lambda I[1] + \lambda^2 I[0]$ だから結局 $I[0], I[1], I[2], J[1]$ を求めればよいことになる。

$\phi(x) = a_0x^4 + a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$ において3次式 ($a_0 = 0$) のときは, $a_4 \neq 0$ ならば $x = 1/t$, $a_4 = 0$ ならば $x = t^2$ と変換すると t の4次式が得られるから, 以後 $\phi(x)$ は4次式 ($a_0 \neq 0$) として議論を進める。 $\phi(x) = (ax^2 + bx + c)(\alpha x^2 + \beta x + \gamma)$ と2次の因数に分解し, 変換 $x = \frac{At+B}{t+1}$ によって

$$\frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} = * \frac{dt}{\sqrt{\pm(t^2 \pm \mu^2)(t^2 \pm \nu^2)}} \quad (6.2)$$

の形にする。それには, $a\beta - b\alpha \neq 0$ のときは, それぞれの因数の1次の項を0に

$$2c + (A+B) \cdot b + AB \cdot 2a = 0$$

$$2\gamma + (A+B) \cdot \beta + AB \cdot 2\alpha = 0$$

A, B を解に持つ2次方程式は

$$\xi^2 - (A+B) \cdot \xi + AB = 0$$

したがって, A, B は2次方程式

$$\begin{vmatrix} \xi^2 & -\xi & 1 \\ 2c & b & 2a \\ 2\gamma & \beta & 2\alpha \end{vmatrix} = 0$$

の2つの解にとればよい。 $a\beta - b\alpha = 0$ のときは, $x = t - b/2a$ とすればよい。

さらに以下の $t \rightarrow u$ の変換によって

$$\frac{dx}{\sqrt{\phi(x)}} = * \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}$$

とすることができる。

(6.2) 式の分母	変換 ($t \rightarrow u$)	k^2
$(t^2 - \mu^2)(t^2 - \nu^2)$	$t^2 = \mu^2 u^2 (t^2 < \mu^2), t^2 = \nu^2 / u^2 (t^2 > \nu^2)$	$\mu^2 / \nu^2 [\mu^2 < \nu^2]$
$(t^2 - \mu^2)(\nu^2 - t^2)$	$t^2 = \nu^2 (1 - k^2 u^2) (\mu^2 < t^2 < \nu^2)$	$(\nu^2 - \mu^2) / \nu^2 [\mu^2 < \nu^2]$
$(t^2 + \mu^2)(t^2 - \nu^2)$	$t^2 = \nu^2 / (1 - u^2) (t^2 > \nu^2)$	$\mu^2 / (\mu^2 + \nu^2)$
$(t^2 + \mu^2)(\nu^2 - t^2)$	$t^2 = \nu^2 (1 - u^2) (t^2 < \mu^2)$	$\nu^2 / (\mu^2 + \nu^2)$
$(t^2 + \mu^2)(t^2 + \nu^2)$	$t^2 = \mu^2 t^2 / (1 - u^2)$	$(\nu^2 - \mu^2) / \mu^2 [\mu^2 < \nu^2]$

したがって楕円積分は

$$\begin{aligned} I[0] &= \int \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}}, & I[1] &= \int \frac{u}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} du \\ I[2] &= \int \frac{u^2}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} du, & J[1] &= \int \frac{du}{\sqrt{(u-\lambda)(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \end{aligned}$$

に帰着する。さらに $I[1]$ は $v = u^2$ により, 2次の無理関数の不定積分となる。また

$$\begin{aligned} I[2] - \frac{1}{k^2} I[0] &= -\frac{1}{k^2} \int \sqrt{\frac{1-k^2u^2}{1-u^2}} du \\ J[1] &= \int \frac{u}{(u^2 - \lambda^2) \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} du + \lambda \int \frac{du}{(u^2 - \lambda^2) \sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} \end{aligned}$$

以上によって一般の楕円積分は次の3種の Legendre-Jacobi の標準形で表される。

ここに $u = \sin \phi$, $d\phi = \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}$ である。

第1種楕円積分

$$\int_0^u \frac{du}{\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = F(\phi; k), \quad (k < 1) \quad (6.3)$$

第2種楕円積分

$$\int_0^u \frac{\sqrt{1-k^2u^2}}{\sqrt{1-u^2}} du = \int_0^\phi \sqrt{1-k^2\sin^2\phi} d\phi = E(\phi; k), \quad (k < 1) \quad (6.4)$$

第3種楕円積分

$$\int_0^u \frac{du}{(1+cu^2)\sqrt{(1-u^2)(1-k^2u^2)}} = \int_0^\phi \frac{d\phi}{(1+c\sin^2\phi)\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} = \Pi(\phi; c, k), \quad (k < 1) \quad (6.5)$$

また積分の上限が $\phi = \pi/2$ を完全楕円積分という。たとえば、第1種完全楕円積分は

$$\begin{aligned} K(k) = F\left(\frac{\pi}{2}, k\right) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\sqrt{1-k^2\sin^2\phi}} \\ &= \frac{\pi}{2} \left[1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 k^2 + \left(\frac{1 \cdot 3}{3 \cdot 4}\right)^2 k^4 + \dots + \left(\frac{(2r-1)(2r-3)\dots 3 \cdot 1}{2r \cdot (2r-2)\dots 4 \cdot 2}\right)^2 k^{2r} + \dots \right] \end{aligned}$$

となる。(参. 'fillust.exe')

6.4 その他の公式

1 部分積分

$g(x)$ の原始関数の一つを $G(x)$, すなわち $G'(x) = g(x)$ あるいは $\int g(x)dx = G(x) + c$ とすると

$$(f \cdot G)' = f' \cdot G + f \cdot g$$

したがって

$$\int f(x) \cdot g(x)dx = f(x) \cdot G(x) - \int f'(x) \cdot G(x)dx$$

となる。定積分では

$$\int_a^b f(x) \cdot g(x)dx = [f(x) \cdot G(x)]_a^b - \int_a^b f'(x) \cdot G(x)dx$$

2 三角関数

$$\begin{aligned} \sin(\alpha \pm \beta) &= \sin \alpha \cos \beta \pm \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha \pm \beta) = \cos \alpha \cos \beta \mp \sin \alpha \sin \beta \\ \sin \alpha \sin \beta &= \frac{1}{2}\{\cos(\alpha - \beta) - \cos(\alpha + \beta)\}, \quad \cos \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\{\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta)\} \end{aligned}$$

$$\sin \alpha \cos \beta = \frac{1}{2}\{\sin(\alpha + \beta) + \sin(\alpha - \beta)\}$$

$$\sin A + \sin B = 2 \sin \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}, \quad \sin A - \sin B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}, \quad \cos A - \cos B = -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$\sin 2x = 2 \sin x \cos x, \quad \cos 2x = 1 - 2 \sin^2 x = 2 \cos^2 x - 1$$

3 双曲線関数 (hyperbolic function)

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}, \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}, \quad \tanh x = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

偶奇性

$$\cosh(-x) = \cosh x, \quad \sinh(-x) = -\sinh x$$

三角関数との関係

$$\cosh(ix) = \cos x, \quad \sinh(ix) = i \sin x, \quad \tanh(ix) = i \tan x$$

$$\cos(ix) = \cosh x, \quad \sin(ix) = i \sinh x, \quad \tan(ix) = i \tanh x$$

加法定理

$$\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1, \quad 1 - \tanh^2 x = \cosh^{-2} x$$

$$\sinh(x \pm y) = \sinh x \cosh y \pm \cosh x \sinh y, \quad \cosh(x \pm y) = \cosh x \cosh y \pm \sinh x \sinh y$$

逆関数

$$\sinh^{-1} x = \log(x + \sqrt{1 + x^2}), \quad \cosh^{-1} x = \log(x + \sqrt{x^2 - 1})$$

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

微分

$$\frac{d}{dx} \sinh x = \cosh x, \quad \frac{d}{dx} \cosh x = \sinh x, \quad \frac{d}{dx} \tanh x = \cosh^{-2} x$$

4 三角関数と指数関数の積の積分

$$\int e^{px} \cos qx dx = \frac{e^{px}(p \cos qx + q \sin qx)}{p^2 + q^2} + c, \quad \int e^{px} \sin qx dx = \frac{e^{px}(p \sin qx - q \cos qx)}{p^2 + q^2} + c$$

5 三角関数の積分

(a) $p > -1, q > -1$ の時

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta \cos^q \theta d\theta = \frac{1}{2} \frac{\Gamma(\frac{p+1}{2})\Gamma(\frac{q+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+q}{2} + 1)}$$

(b) $p > -1$ のとき

$$\int_0^{\pi/2} \sin^p \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^p \theta d\theta = \frac{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{p+1}{2})}{\Gamma(\frac{p+2}{2})}$$

(c) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき

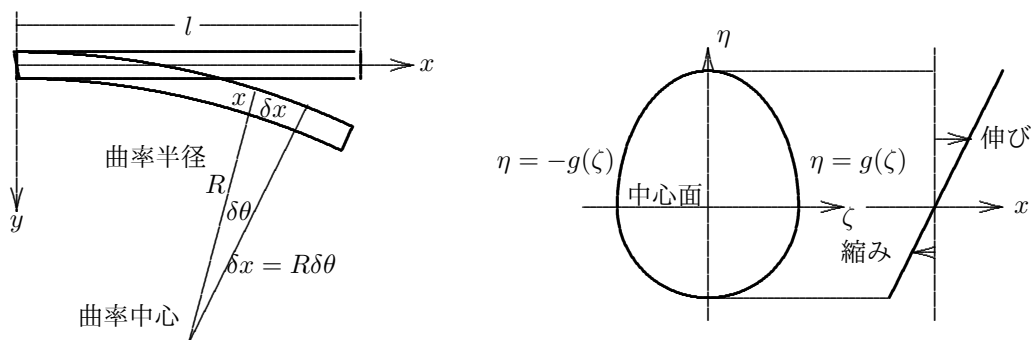
$$\int_0^{\pi/2} \sin^n \theta d\theta = \int_0^{\pi/2} \cos^n \theta d\theta = \begin{cases} \frac{2 \cdot 4 \cdots (n-1)}{1 \cdot 3 \cdots n} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (n-1)}{2 \cdot 4 \cdots n} \cdot \frac{\pi}{2} & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

第7章 付録2 一梁（はり）の問題

7.1 梁の方程式

水平にある梁に荷重が作用しているときの梁のたわみを求める。断面の形状は一定で左右対称とし、各断面の幾何学的重心を連ねる線を中心線とする。梁の変形はこの中心線の変形によって表される。梁が曲がると外側は伸び、内側は縮む。梁は、上下に荷重がかかるとすると、梁は上下に変形する。そのとき、途中で伸びも縮みもしない面ができる。これを中立面という。

変形は長さ l の梁の中心線（弾性線）の左端を原点に、荷重のかからないときの弾性線を x 軸にとる。点 x にかかる荷重を $f(x)dx$ とし、鉛直方向の変位（たわみ）を $y(x)$ とする。また各断面の鉛直方向を η 軸、断面内の水平方向を ζ 軸とする。



梁が曲がると、中心線は曲率 κ の曲線を描く。

$$\kappa = \frac{1}{[1 + (dy/dx)^2]^{3/2}} \frac{d^2y}{dx^2} \quad (7.1)$$

変形が小さいとすると、曲率半径 R は

$$R = \frac{1}{\kappa} = \left(\frac{d^2y}{dx^2} \right)^{-1} \quad (7.2)$$

となる。座標 x と $x + \delta x$ で挟まれた微小部分について、曲率中心を見込む微小角を $\delta\theta$ とすると $\delta x = R\delta\theta$ の関係がある。点 x での垂直断面内で、中立面から η 離れたところでの伸びは

$$(R + \eta)\delta\theta - R\delta\theta = \eta\delta\theta = \frac{\eta\delta x}{R} \quad (7.3)$$

となる。従って、単位長さあたりのひずみは η/R となるから、梁の伸びの（ヤングの）弾性定数を E とすると、応力は $E\eta/R$ となる。

断面全体に働く力は

$$F = \int_{\eta_1}^{\eta_2} 2g(\eta)E\eta/R d\eta \quad (7.4)$$

となる。長さ方向に力が働いてないとすると

$$\int_{\eta_1}^{\eta_2} g(\eta)\eta d\eta = 0 \quad (7.5)$$

となり，中立線は各断面の幾何学的な重心を通る中心線となる。

x における断面に働く中立線のまわり曲げのモーメントを M ，2 次の慣性モーメントを I とすると

$$M = \int_{\eta_1}^{\eta_2} 2g(\eta)E\eta/R \times \eta d\eta = \frac{2E}{R} \int_{\eta_1}^{\eta_2} g(\eta)\eta^2 d\eta = \frac{EI}{R} \quad (7.6)$$

$$I = 2 \int_{\eta_1}^{\eta_2} g(\eta)\eta^2 d\eta \quad (7.7)$$

したがって，式 (7.2) を適用すると

$$EI \frac{d^2 y}{dx^2} = M, \quad (0 < x < l) \quad (7.8)$$

が成立する。つぎに， x での力のモーメント $M(x)$ は x より先にかかる荷重のモーメントの和より

$$M(x) = \int_x^l (\xi - x)f(\xi)d\xi \quad (7.9)$$

したがって

$$\frac{d^2 M(x)}{dx^2} = f(x), \quad (0 < x < l) \quad (7.10)$$

が成り立つ。よって，たわみの方程式は

$$EI \frac{d^4 y}{dx^4} = f(x), \quad (0 < x < l) \quad (7.11)$$

となる。解はたわみ曲線または弾性曲線と呼ばれる。

境界条件には，梁の支え方によって次の種類が考えられる。

1. 固定端 : $y = y' = 0$
2. 半固定端 : $y = y'' = 0$
3. 自由端 : $y'' = y''' = 0$

以下ではこれらを含むいくつかの例を検討する。

7.2 梁のたわみの例

1 両端固定の例

両端 ($x = 0, x = l$) で固定されている梁が，単位長さあたり W_0 の一様な荷重を受けているとする。

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{W_0}{EI}, \quad (0 < x < l) \quad (7.12)$$

$$\text{境界条件 : } y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0. \quad (7.13)$$

$Y(s) = \mathcal{L}[y(x)]$ として，方程式の両辺のラプラス変換をとると，

$$s^4 Y - s^3 y(0) - s^2 y'(0) - s y''(0) - y'''(0) = \frac{W_0}{EI s}$$

$y''(0) = c_2, y'''(0) = c_3$ とおくき，境界条件 $y(0) = 0, y'(0) = 0$ を適用すると

$$Y = \frac{c_2}{s^3} + \frac{c_3}{s^4} + \frac{W_0}{EI s^5}, \quad \text{よって } y(x) = \frac{c_2}{2} x^2 + \frac{c_3}{6} x^3 + \frac{W_0}{24EI} x^4$$

境界条件 $y(l) = 0, y'(l) = 0$ より $c_2 = \frac{W_0 l^2}{12EI}, c_3 = -\frac{W_0}{2EI}$

よって求めるたわみは

$$y(x) = \frac{W_0}{24EI} x^2 (l - x)^2 \quad (7.14)$$

2 両端半固定の例

両端 ($x = 0, x = l$) で半固定されている梁が、単位長さあたり W_0 の一様な荷重を受けているとする。方程式は前題と同じ

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{W_0}{EI}, \quad (0 < x < l) \quad (7.15)$$

$$\text{境界条件: } y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y''(l) = 0. \quad (7.16)$$

となる。 $Y(s) = \mathcal{L}[y(x)]$ として、方程式の両辺のラプラス変換をとる、 $y'(0) = c_1, y'''(0) = c_3$ とおく、境界条件 $y(0) = 0, y''(0) = 0$ を適用すると

$$Y = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_3}{s^4} + \frac{W_0}{EI s^5}, \quad \text{よって } y(x) = c_1 x + \frac{c_3}{6} x^3 + \frac{W_0}{24EI} x^4$$

境界条件 $y(l) = 0, y''(l) = 0$ より $c_1 = \frac{W_0 l^3}{24EI}, c_3 = -\frac{W_0 l}{2EI}$
よって求めるたわみは

$$y(x) = \frac{W_0}{24EI} (l^3 x - 2lx^3 + x^4) = \frac{W_0}{24EI} x(l-x)(l^2 + lx - x^2) \quad (7.17)$$

また梁の中央に集中荷重 $W\delta(x - l/2)$ がかかるときは、方程式が

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{W}{EI} \delta(x - l/2), \quad (0 < x < l) \quad (7.18)$$

となり、解の像は

$$Y = \frac{c_1}{s^2} + \frac{c_3}{s^4} + \frac{W}{EI} \frac{e^{-ls/2}}{s^4}, \quad \text{よって } y(x) = c_1 x + \frac{c_3}{6} x^3 + \frac{W}{6EI} (x - l/2)^3 U(x - l/2)$$

境界条件 $y(l) = 0, y''(l) = 0$ より $c_1 = \frac{3Wl^2}{16EI}, c_3 = -\frac{Wl}{2EI}$
従って

$$y(x) = \frac{W}{48EI} \{3l^2 x - 4x^3 + 8(x - l/2)^3 U(x - l/2)\} \quad (7.19)$$

当然これは $x = l/2$ に関して対称な関数になっている。

3 片持ち梁 (片方固定、片方自由端) の例

一端 $x = 0$ では固定され、他端 ($x = l$) では自由端とする。 $x = a$ で集中荷重 $W\delta(x - a)$ がかかっているとする。方程式は

$$\frac{d^4 y}{dx^4} = \frac{W}{EI} \delta(x - a), \quad (0 < x < l) \quad (7.20)$$

$$\text{境界条件: } y(0) = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y''(l) = 0, \quad y'''(l) = 0 \quad (7.21)$$

となる。解の像は

$$Y = \frac{c_2}{s^3} + \frac{c_3}{s^4} + \frac{W}{EI} \frac{e^{-as}}{s^4}$$

となる。よって

$$y(x) = c_2 x^2 + \frac{c_3}{6} x^3 + \frac{W}{6EI} (x - a)^3 U(x - a)$$

境界条件 $y''(l) = 0, y'''(l) = 0$ より

$$c_2 = \frac{Wa}{EI}, \quad c_3 = -\frac{W}{EI}$$

従って

$$y(x) = \frac{W}{6EI} \{3lx^2 - x^3 + (x-a)^3 U(x-a)\} \quad (7.22)$$

となる。梁の右端 $a = l$ の集中荷重の場合は $a \rightarrow l$ より

$$y(x) = \frac{W}{6EI} (3lx^2 - x^3) \quad (7.23)$$

となる。

4 集中荷重での最大変形

前問の片持ち梁の自由端でのたわみ（最大変形）は式 (7.23) で $x = l$ より

$$H = \frac{1}{3} \frac{Wl^3}{EI}$$

となる。

両端半固定で中央で集中荷重 W が作用しているときは、片持ち梁を y 軸を反転し、つなぎ合わせると得られる。荷重を $1/2$ 、長さ $2l$ を改めて l とすれば、中央でのたわみ（最大変形）は

$$H = \frac{1}{48} \frac{Wl^3}{EI}$$

となる。

両端固定の場合は、同様に片持ち貼りを4つ結合すればよい。荷重を $1/2$ 、長さ $4l$ を改めて l とすれば、中央でのたわみ（最大変形）は

$$H = \frac{1}{192} \frac{Wl^3}{EI}$$

となる。

梁の断面形状は2次の慣性モーメント I に現れる。

縦 a 、横 b の長方形のときは、式 (7.7) より

$$I = \frac{a^3 b}{12}$$

となる。断面積が同じなら、縦が横幅に比べて大きいときほど慣性能率は大きくなる。極端にこの割合を大きくすると、ねじれ変形に弱くなる。そのためH型などの工夫がされる。

半径 a の丸棒のときは

$$I = \frac{\pi a^4}{4}$$

となる。

変形を決めるもう一つの要素は梁の材料のヤング率である。因みに、鋼の場合 $E = 21.0 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$ である。

第8章 付録3 — 2元連立常微分方程式

ここでは、2元連立常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, y) \\ \frac{dy}{dt} = g(x, y) \end{cases}$$

を考察する。これは2次元の力学系（時間 t と空間 S の点 x に対して、写像 $\phi_t(x) : (t, x) \rightarrow x_t \in S$ が連続微分可能で、 ϕ_0 は恒等写像、 $\phi_t \circ \phi_s = \phi_{t+s}$ を満たす系）でもある。関数 f, g に t が含まれていないとき、自励系という。非線形の微分方程式はそれぞれ特有の顔があり、取り扱いも困難である。深く学習した経験もなく、ここでは、幾何学的なイメージが描きやすいというメリットで、スメール、ハーシュの「力学系入門」（田村、水谷、新井 訳、岩波）に準拠して学習を進める。当大学にはこの分野で多くの貢献をされている奥田先生がおられるから、その講義を聴かれるのが一番良い。

8.1 定数係数同次線形常微分方程式

ここでは2次元力学系のうち特に定数係数同次線形常微分方程式を考える。

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (8.1)$$

すなわち係数行列 A は一定とする。方程式 (8.1) の両辺をラプラス変換して

$$\begin{pmatrix} sX - x(0) \\ sY - y(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \quad (8.2)$$

したがって、解の像は

$$X = -\frac{\begin{vmatrix} x(0) & b \\ y(0) & d-s \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{vmatrix}}, \quad Y = -\frac{\begin{vmatrix} a-s & x(0) \\ c & y(0) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{vmatrix}} \quad (8.3)$$

となる。原像（解）を求める手続きから、分母の行列式

$$p(s) = \begin{vmatrix} a-s & b \\ c & d-s \end{vmatrix} = s^2 - (a+b)s + (ad-bc) \quad (8.4)$$

が解の特性を決定することがわかる。議論を簡単にするため、行列 A の指数関数

$$\exp A = e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \quad (8.5)$$

を導入する。 (x, y) の 2次元ベクトル空間を考え、適当なノルムに対して、 $\exp A$ は絶対収束し、 P を同じ空間の正則行列とすると次の性質がある。

$$B = P^{-1}AP \text{ ならば } e^B = P^{-1}e^AP \quad (8.6)$$

$$AB = BA \text{ ならば } e^{A+B} = e^A e^B \quad (8.7)$$

$$e^{-A} = (e^A)^{-1} \quad (8.8)$$

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \text{ ならば } e^A = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \quad (8.9)$$

(8.9) の証明

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

とおくと、

$$A = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} = aI + bB, \quad B^{2n} = (-1)^n I, \quad B^{2n+1} = (-1)^n B$$

$$\begin{aligned} e^A &= e^{aI+bB} = e^{aI} e^{bB} = e^a \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(bB)^k}{k!} \\ &= e^a \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bB)^{2n}}{2n!} + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(bB)^{2n+1}}{(2n+1)!} \right\} = e^a \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n}}{2n!} I + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n b^{2n+1}}{(2n+1)!} B \right\} \\ &= e^a \{ \cos b I + \sin b B \} = e^a \begin{pmatrix} \cos b & -\sin b \\ \sin b & \cos b \end{pmatrix} \end{aligned}$$

このとき、

$$\frac{d}{dt} e^{tA} = A e^{tA} \quad (8.10)$$

が成立するから、初期条件 $(x(0), y(0))$ にたいして、方程式 (8.1) に対する解は

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = e^{tA} \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \end{pmatrix} \quad (8.11)$$

となる。解の特性を明らかにするため、行列 A を正則な変換行列 P による対角化を考える。すなわち

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = B \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

とできないかと考えてみる。行列 A の特性多項式は

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ c & d - \lambda \end{vmatrix} = (a - \lambda)(d - \lambda) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) \quad (8.12)$$

であり、 $p(\lambda) = 0$ の解が行列 A の固有値である。特性多項式 $p(\lambda)$ は式 (8.4) の $p(s)$ と同じである。解は

$$\lambda = \frac{1}{2}(Tr \pm \sqrt{\Delta}), \quad Tr = a + d, \quad D = ad - bc, \quad \Delta = Tr^2 - 4D \quad (8.13)$$

となる。

$\Delta > 0$ の時、異なる 2 実解となり、固有ベクトルを用いて行列は対角化出来る。

$\Delta < 0$ の時、共役な複素解となる。これを $\lambda = a \pm bi$ とする。このとき変換 P が存在して

$$B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \quad (8.14)$$

となる。

(8.14) の証明

複素固有値 $\lambda = a \pm bi$ にたいして変換 P_1 によって対角化されているとする。

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P_1 \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \quad C = P_1^{-1}AP_1 = \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix}$$

続いて変換

$$\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P_2 \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad P_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$$

を行うと

$$\begin{aligned} B &= P_2^{-1}P_1^{-1}AP_1P_2 = P_2^{-1}CP_2 \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & -i \\ -i & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a+bi & 0 \\ 0 & a-bi \end{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$\Delta = 0$ の時は、2つの場合に分かれる。

対角化できて、重解を持つときは

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I, \quad A = \lambda PIP^{-1} = \lambda I$$

だから

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I$$

の形のときのみとなる。

また対角化できない行列もある。一般に行列 A の特性多項式 (8.12) を $p(\lambda)$ とすると、 $p(A) = 0$ が成立する。これは、 A の張る空間は A の固有ベクトルで展開できることによる。いま $p(\lambda) = 0$ が重解 μ を持つとする。すなわち $p(\lambda) = (\lambda - \mu)^2$ とする。行列 A を $A = \mu I + N$ と分解すると、 $p(A) = (A - \mu I)^2 = N^2 = 0$ となる。そこで、任意のベクトルを \mathbf{x} とし、 $(\mathbf{x}, N\mathbf{x}) = \alpha$ とおくと、 $\mathbf{u} = \mathbf{x} - \alpha N\mathbf{x}$, $\mathbf{v} = N\mathbf{x}$ を新しい基底に選べば

$$N = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

となり、

$$B = \begin{pmatrix} \mu & 0 \\ 1 & \mu \end{pmatrix} \tag{8.15}$$

の表現が得られる。(直接 2×2 の変換行列を求めて示すこともできる)

以上を考慮すると、行列 A によって、微分方程式は以下のように分類できる。

1 (CASE 0) 特殊な場合

(a) $a = b = c = d = 0$

定点 $((x, y)$ 平面のすべての点は特異点)

(b) 両方の固有値が 0 で 0 以外の要素がある場合

b, c のどちらかのみ 0 でない

例として $b \neq 0$ のとき $x = by(0)t, y = y(0)$, x 軸上はすべて特異点

(c) 固有値の一方のみ 0 の場合

$$\xi = \xi(0), \eta = \eta(0)e^{\mu t}$$

ξ 軸上のすべての点は特異点、他の $(\xi(0), \eta(0))$ を通る解は η 軸に平行な直線

- 2 (CASE I) A が符号の異なる実固有値を持つ場合 (鞍点)
座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \mu \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0 < \mu$$

によって, 方程式 (8.1) は

$$\begin{cases} \dot{\xi} = \lambda\xi \\ \dot{\eta} = \mu\eta \end{cases}$$

となる。解は

$$\begin{cases} \xi = \xi(0)e^{\lambda t} \\ \eta = \eta(0)e^{\mu t} \end{cases}$$

解は直角に交わる ξ 軸, η 軸に漸近する。 ξ 軸, η 軸は (x, y) 平面では,
 $\eta = p_{21}^{-1}x + p_{22}^{-1}y = 0$, $\xi = p_{11}^{-1}x + p_{12}^{-1}y = 0$ の 2 直線である。

- 3 A の固有値がすべて負の実部を持つ場合 (沈点)

- [1] どちらも負の実数で対角化できるとき

解は (8.16) と同じ形で, $\lambda < 0, \mu < 0$ である。このとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.16)$$

となる。固有値 λ, μ が等しいとき, 直線的にすべてのフローは原点に向かい (焦点) (CASE II), 違うときは指数関数の形で原点に向かう (結節点) (CASE III)。

- [2] (CASE IV) 固有値が負で対角化できないとき

適当な座標変換

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad B = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix}, \quad \lambda < 0$$

によって, 解は

$$\begin{cases} \xi = \xi(0)e^{\lambda t} \\ \eta = \eta(0)e^{\lambda t} + \xi(0)te^{\lambda t} \end{cases}$$

となる。これは変格結節点と呼ばれ, やはり (8.16) がなりたつ。

- [3] (CASE V) 複素数で, 負の実部をもつとき (渦状点)

固有値を $\lambda = a \pm ib, a < 0$ とする。変換 (8.14) によって,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}, \quad a < 0$$

となり, (8.9) によって

$$e^{tB} = e^{at} \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

だから, 解は

$$\begin{cases} \xi = e^{at}(\xi(0) \cos bt - \eta(0) \sin bt) \\ \eta = e^{at}(\eta(0) \cos bt + \xi(0) \sin bt) \end{cases}$$

$a < 0$ だから, この場合も (8.16) がなりたち, 相空間図での軌道は, $b > 0$ のとき反時計回りに渦巻き上に原点に近づき, $b < 0$ のときは時計回りに原点に近づく。

- 4 (CASE VI) A の固有値がすべて正の実部を持つ場合 (源点)
 解は (8.16) と同じ形で, $\lambda > 0, \mu > 0$ である。このとき

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \pm\infty \\ \pm\infty \end{pmatrix}, \quad \lim_{t \rightarrow -\infty} \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (8.17)$$

となる。この場合も, 焦点, 結節点, 変格結節点, 渦状点がある。

- 5 (CASE VII) A の固有値が純虚数の場合 (渦心点)
 固有値を $\lambda = \pm ib$ とする。(8.14) の変換によって,

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -b \\ b & 0 \end{pmatrix}, \quad a < 0$$

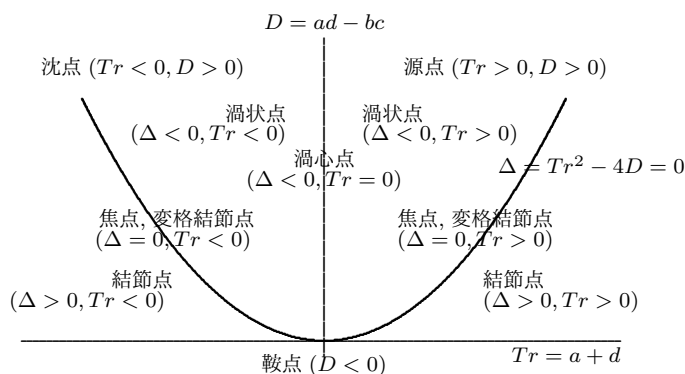
となるが,

$$e^{tB} = \begin{pmatrix} \cos bt & -\sin bt \\ \sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$$

だから, 解は周期 $2\pi/b$ の周期関数となり, (ξ, η) 空間では原点を中心とした同心円となり, $b > 0$ の時左回り, $b < 0$ の時右回りとなる。

以上をまとめると, 図のようになる (スメール, ハーシュより)。

相空間図による平衡点の分類



各ケースおよび任意の係数
 についての相空間での表示が
 ファイル'dynling.for' の実行に
 よって確かめられる。「常微
 分方程式論序説」(白岩謙一著
 サイエンス社)にはすべての
 図が示されている。

8.2 非線形問題

8.2.1 非線形問題の方法

代表的な系の軌道を検討するにあたって, 二三の解析方法を概観しておく。
 方程式 (8.1) において, $\sqrt{\{f(x, y)\}^2 + \{g(x, y)\}^2}$ は相平面上での点 (x, y) の移動の「速さ」を与える。

$$f(x, y) = 0, \quad g(x, y) = 0$$

を満たす点 (\bar{x}, \bar{y}) は動かない。これは不動点, 停留点, 平衡点, 特異点などと言われる。停留点 (\bar{x}, \bar{y}) 近傍での解の振る舞いは, 方程式を (\bar{x}, \bar{y}) で展開して線形近似する事によって調べることが出来る。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{(\bar{x}, \bar{y})} \quad (8.18)$$

停留点が沈点ならば, (\bar{x}, \bar{y}) のある近傍内にあるすべての点 $(x(t), y(t))$ は $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$ となる。すなわち何らかの原因で相面上の停留点から少し離れた点は停留点に近づく方向に進む。その意味で沈点は安定と考えられる。普通, 安定の考えはもう少し広げて,

「 (\bar{x}, \bar{y}) の近傍 U に対して, U における (\bar{x}, \bar{y}) の近傍 U_1 を適当にとると, $(x(0), y(0))$ を U_1 内に持つ任意の解 $(x(t), y(t))$ はすべて $t \geq 0$ に対して定義され, それが U に含まれる」

と定義される。特に沈点のように, (\bar{x}, \bar{y}) のある近傍内にあるすべての点 $(x(t), y(t))$ が $\lim_{t \rightarrow \infty} (x(t), y(t)) = (\bar{x}, \bar{y})$ となる場合を漸近安定と言う。線形で A の固有値が純虚数の場合は, 安定ではあるが漸近安定ではない例である。

解がわからなくても安定性が議論できるうまい方法が考え出されている。

「Liapunov の安定性定理」

「平衡点 (\bar{x}, \bar{y}) の近傍 U で関数 $V(x, y)$ が存在して,

(a) $V(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ かつ $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y})$ に対して $V(x, y) > 0$

(b) (\bar{x}, \bar{y}) 以外の U で $\dot{V} \leq 0$ ならば (\bar{x}, \bar{y}) は安定な平衡点であり,

(c) (\bar{x}, \bar{y}) 以外の U で $\dot{V} < 0$ ならば (\bar{x}, \bar{y}) は漸近安定な平衡点である。」

条件 (a), (b) を満たす関数 $V(x, y)$ を「Liapunov 関数」という。(c) も満たせば「狭義の Liapunov 関数」という。

前半の証明は簡単で, (\bar{x}, \bar{y}) を中心として半径 δ の円 $U_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ が U に含まれているようにする。円周上での V の最小値を α とすると, (a) によって $\alpha > 0$ である。 U_1 を $V(x, y) < \alpha$ である (x, y) の集合とすると, (b) によって U_1 内のどの点から始まる解曲線も $U_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ と交わらない。すなわち (\bar{x}, \bar{y}) は安定である。

さらに (c) も満たすとする。いま適当な数列 t_n を選んで $t_n \rightarrow \infty$ のとき $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{y})$ とする (これは $U_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ が有界な閉集合すなわちコンパクトだから可能)。このとき $(\tilde{x}, \tilde{y}) = (\bar{x}, \bar{y})$ となる。なぜなら V は連続な減少関数だから $V(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow V(\tilde{x}, \tilde{y})$, かつすべての $t > 0$ に対して $V(x(t), y(t)) > V(\tilde{x}, \tilde{y})$ である。いま $(\tilde{x}, \tilde{y}) \neq (\bar{x}, \bar{y})$ とすると次の矛盾がでてくる。 $(x(t), y(t))$ を (\tilde{x}, \tilde{y}) から始まる解とすると任意の $\tau > 0$ に対して $V(x(\tau), y(\tau)) < V(\tilde{x}, \tilde{y})$ 。したがって十分 (\tilde{x}, \tilde{y}) に近い点から始まる任意の解も初期値に対する連続性から $V(\xi(\tau), \eta(\tau)) < V(\tilde{x}, \tilde{y})$ をみたす。したがって $(\xi(0), \eta(0))$ を十分大きな n にたいして, $(\xi(0), \eta(0)) = (x(t_n), y(t_n))$ に選べば $V(x(t_n + \tau), y(t_n + \tau)) < V(\tilde{x}, \tilde{y})$ となる。これはすべての $t > 0$ に対して $V(x(t), y(t)) > V(\tilde{x}, \tilde{y})$ であることに反す。よって (\bar{x}, \bar{y}) は $U_\delta(\bar{x}, \bar{y})$ における唯一の集積点となり, 漸近安定点である。

$n \rightarrow \infty$ にたいして $t_n \rightarrow \infty$ とするとき, (x, y) から始まる解曲線で, $n \rightarrow \infty$ での $(x(t_n), y(t_n))$ の極限を (x, y) の ω 極限点, この集合を $L_\omega(x, y)$ と表し ω 極限集合という。また ∞ を $-\infty$ に置き換えたものを α 極限点, $L_\alpha(x, y)$ を α 極限集合という。またある閉軌道 γ が, γ にない点 (x, y) があって, (x, y) の極限集合 $L_\omega(x, y)$ または $L_\alpha(x, y)$ に含まれているとき, 極限周期軌道という。2次元 (平面力学系) の閉軌道について強力な定理がある。

「コンパクトな極限集合が平衡点を含まなければ閉軌道である」

(Poincaré-Bendixon の定理)

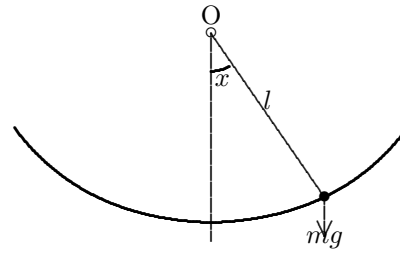
また

「 V を力学系の第1積分 (軌道上で一定の値を持つ関数) とし, V がいかなる開集合上でも定値関数でなければ極限周期軌道は存在しない」

証明にはいくつかの少し厳密な準備が必要であり, ここでは省略する。「スメール, ハーシュ」などを参照されたい。

8.2.2 振り子の運動

一端を水平な軸の周りに自由に回転できようにした長さ l の棒の先端に、質量 m の質点が固定されている。棒の質量、軸の回転による摩擦、運動に伴う空気の抵抗などはすべて無視する。質点は支点 O を含む 1 つの平面内を運動する。鉛直下方と棒の角度を x とすると、質点の運動方程式は



$$ml \frac{d^2 x}{dt^2} = -mg \sin x \quad (8.19)$$

となる。 $\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$ とおくと

$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 \sin x \quad (8.20)$$

これは簡単な形をしているが非線形である。 $y = \frac{dx}{dt}$ とおくとつぎの正規形の方程式が得られる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x \end{cases} \quad (8.21)$$

方程式 (8.21) の平衡点は $y = 0, -\omega^2 \sin x = 0$ より

$$(\bar{x}, \bar{y}) = (n\pi, 0), \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

となる。

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{pmatrix} \quad (8.22)$$

$n = 2m + 1$ (m は整数) のときは $\Delta < 0, Tr = 0$ となり鞍点となる。

$n = 2m$ (m は整数) のとき

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}$$

で、 $\Delta > 0, Tr = 0$ となり、固有値は純虚数となる。そこで、この連立方程式から t を消去して

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\omega^2 \sin x}{y}$$

を得る。初期条件 (x_0, y_0) にたいして、積分して

$$E(x, y) = \frac{1}{2}y^2 + \omega^2(1 - \cos x) = \frac{1}{2}y_0^2 + \omega^2(1 - \cos x_0) = c \quad (c \text{ は積分定数}) \quad (8.23)$$

となる。これは第 1 積分と呼ばれ、エネルギー保存に対応している。 c の値によって $x - y$ 平面 (相平面) 上にいろいろな軌道 (トラジェクトリー) に対応する。

停留点以外の軌道上の点 $(x(t), y(t))$ は相平面を有限の速さ $\sqrt{y^2 + \omega^4 \sin^2 x}$ で動く。第一積分 (8.23) を用いて

$$V(x, y) = E(x, y) - E(\bar{x}, \bar{y})$$

を定義すると, $(\bar{x}, \bar{y}) = (2m\pi, 0)$ では, $V(x, y)$ は $V(\bar{x}, \bar{y}) = 0$ かつ $(x, y) \neq (\bar{x}, \bar{y})$ に対して $V(x, y) > 0$, $\dot{V}(x, y) = 0$ の条件を満たし, Liapunov 関数であり, 安定点となる。

y が 0 にならないとき, すなわち

$$\cos x = \cos x_0 - \frac{y_0^2}{2\omega^2}$$

が解をもたないとき, $\dot{x} = y$ だから軌道は $y_0 > 0$ ならば x が増大する方向に, $y_0 < 0$ ならば x が減少する方向に一定の振幅で $\cos x$ の周期に合わせて振動しながら無限に進む。

y が 0 となることがあるとき, すなわち

$$\left| \cos x_0 - \frac{y_0^2}{2\omega^2} \right| < 1$$

のとき, 軌道は各安定特異点 $(2m\pi, 0)$ の周りで, 有限の速さで時計回りに進む。式 (8.23) は y の 2 次式で, x に対して 2 つの y があるが, $y = 0$ となるところで一致し, x 軸を垂直に切って, 2 つの y が入れ替わる。こうして各安定特異点 $(2m\pi, 0)$ のまわりでは, 時計回りに有限の周期で回る閉軌道となる。

摩擦抵抗 $-kl \frac{dx}{dt}$, $k > 0$ を考慮すると, 方程式 (8.19) は

$$ml \frac{d^2x}{dt^2} = -mg \sin x - kl \frac{dx}{dt} \quad (8.24)$$

となり,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = -\omega^2 \sin x - \frac{k}{m}y \end{cases} \quad (8.25)$$

となる。平衡点 $(0, 0)$ では

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -\frac{k}{m} \end{pmatrix}$$

となり, 行列の固有値の実部は負となり沈点 (渦状点) となる。すなわち, $(0, 0)$ 近傍の軌道はすべて時計回りに回転しながら平衡点 $(0, 0)$ に近づく。

ファイル 'flowg.for' は微分方程式を数値的に解き, 相平面に図示するプログラムである。常微分方程式の数値解法は本ライブラリーの「数値計算メモ」'微分方程式' の項目を参照できる。プリントはビットマップのままでは余り鮮明でないので, 'GNUPLOT' にたいするスクリプトファイルを自動作成し, これを出力するようにプログラムされている。

摩擦のない場合に戻って, 閉軌道の時間的な変化を調べてみよう。 $y = 0$ すなわち速度が 0 になるときだから, このときを $y_0 = 0$ とすると位置エネルギーは最大となる。 $1 - \cos x$ が最大, すなわち x の振幅をあらためて x_0 とおくと

$$y^2 = 2\omega^2(\cos x - \cos x_0) \quad (8.26)$$

したがって

$$\frac{dx}{dt} = \sqrt{\frac{2g}{l}} \sqrt{\cos x - \cos x_0} \quad (8.27)$$

$t = 0, x = 0$ から $x = x(t)$ までの時間 t は

$$t = \sqrt{\frac{l}{2g}} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{\cos x - \cos x_0}} \quad (x < x_0) \quad (8.28)$$

$\cos x = 1 - 2 \sin^2 \frac{x}{2}$ を用いて, $k = \sin \frac{x_0}{2} < 1$ とおくと

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \frac{1}{2k} \int_0^x \frac{dx}{\sqrt{1 - \frac{1}{k^2} \sin^2 \frac{x}{2}}}$$

さらに, $\frac{1}{k} \sin \frac{x}{2} = \sin \phi$ とおくと

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}$$

第1種楕円積分 (第6.3小節 参)

$$F(\phi; k) = \int_0^\phi \frac{d\phi}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \phi}}, \quad (k < 1) \quad (8.29)$$

を用いると,

$$t = \sqrt{\frac{l}{g}} F(\phi; k)$$

となる。 $x = x_0$ で $\sin \phi = 1$, $\phi = \pi/2$ であるから, 周期 T は

$$T = 4 \sqrt{\frac{l}{g}} F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) \quad (8.30)$$

となる。いま $k = \sin \frac{x_0}{2}$ が十分小さいとすると,

$$F\left(\frac{\pi}{2}; k\right) = \int_0^{\pi/2} (1 + k^2 \sin^2 \phi + O(k^4)) d\phi = \frac{\pi}{2} (1 + \frac{1}{4} k^2 + O(k^4))$$

だから

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} (1 + \frac{1}{4} k^2 + O(k^4))$$

となる。

8.2.3 電気回路の問題

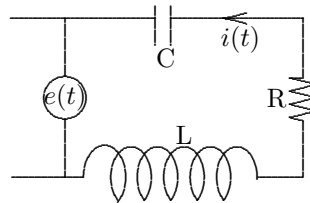
右図のような回路を考える。回路を流れる電流は共通で $i(t)$, コンデンサーの電荷を $q(t)$ とし, 抵抗 R での電圧降下は $F(i(t))$ する。コイル L のインダクタンス L , コンデンサー C の容量 C は一定とすると

$$L \frac{di(t)}{dt} + F(i(t)) + \frac{q(t)}{C} = e(t)$$

となる。ここに $\frac{dq(t)}{dt} = i(t)$ である。ここでは起電力を $e(t) = 0$ すなわち L, R, C の直列閉回路を考察する。両辺を微分し, さらに変換 $t = \sqrt{LC} \tau$ より

$$\frac{d^2 i(\tau)}{d\tau^2} + \sqrt{\frac{C}{L}} F_i(i(\tau)) \frac{di(\tau)}{d\tau} + i(\tau) = 0 \quad (8.31)$$

LRC circuit



あらためて τ を $t, x = i$ とし, $f(x) = \sqrt{\frac{C}{L}} F(i(\tau))$ とおくと

$$\ddot{x} + f_x(x)\dot{x} + x = 0 \quad (8.32)$$

あるいは正規形で

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - f(x) \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases}$$

となる。これは「Lienard の方程式」と呼ばれている。

特に $f(x) = \lambda(x^3 - x)$ のとき,

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y - \lambda(x^3 - x) \\ \frac{dy}{dt} = -x \end{cases} \quad (8.33)$$

$\sqrt{3}x$ をあらためて x とすると

$$\ddot{x} - \lambda(1 - x^2)\dot{x} + x = 0 \quad (8.34)$$

となる。これらは「Van der Pol の方程式」と言われ、振る舞いが詳しく調べられている。

簡単のため方程式 (8.33) で, $\lambda = 1$ の場合を考察しよう。方程式 (8.33) は

$$\begin{aligned} y - f(x) &= 0 \\ -x &= 0 \end{aligned} \quad (8.35)$$

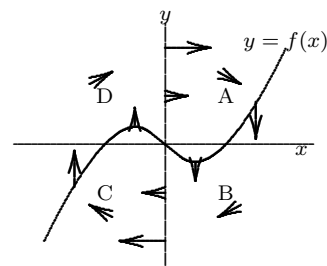
よりただ一つの平衡点 $(0, 0)$ をもつ。

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

固有値は $\lambda = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{3}i)$ で $(0, 0)$ は源点であり, 変換 (8.14) によって, その近傍でグラフは右回りであることがわかる。しかしグラフは全領域にわたって右回り (時計回り) であることがわかる。

相平面は曲線 (8.35) によって, 4つの領域 A, B, C, D に分けられる。すなわちそれぞれを $l_1; x = 0, y > 0$, $l_2; x > 0, y = f(x)$, $l_3; x = 0, y < 0$, $l_4; x < 0, y = f(x)$ の4つの曲線に囲まれた領域とする。 l_1 上の点 $(x, y), x = 0, y > 0$ から出る解曲線は水平に $x > 0$ の方向に出発し, 領域Aでは右下がりの方向に進み, 他のいずれでもなく l_2 に交わる。同様にして, 順次 l_3, l_4, l_1, \dots と右回りに, 無限に回転することが証明できる。

Van der Pol 方程式の相空間



さらに l_1 上の点 $(0, p)$ から出発して, 1回転したときの l_1 上の点を $(0, \sigma(p))$ とすると, $\{\sigma^n(p)\}$ は一意性の定理によって n とともに単調に変化する。 $\{\sigma^n(p)\}$ は点 $(0, p)$ から出発する軌道が $(1, 0)$ より内側にあれば単調増加列, p が十分大きければ単調減少列となる。また $\sigma(p) = p$ となる点は閉軌道になる。さらにこれがただ一つ存在する (証明略)。したがっていずれの右回りの曲線も $(1, 0)$ より外の唯一の閉軌道に収束することになる (周期アトラクター)。より数学的に厳密で, また詳しい物理的意味は各自の学習に期待したい。図はプログラム 'flowg.for' で描いた van der Pol 方程式の解である。さらにこうした解の特性は $f(x) = x^3 - \mu x$ としたとき, パラメーター μ によって大きく変わることも調べてほしい。

8.2.4 捕食者被食者の問題

ユキウサギとオオヤマネコの問題を考えよう。オオヤマネコ（捕食者）はユキウサギ（被食者）を餌にして生きている。捕食者の数 y は十分に餌（ユキウサギ）があれば、1 個体当たりの増加率は $\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = \alpha$ となり、 $y = y_0 e^{\alpha t}$ で無限に増えていくと考えられる。しかし、捕食者の増加率は食糧供給であるウサギの量 x によって影響され、捕食者が生きていく限界の食糧供給以下では捕食者は減少する。これをもっとも単純にモデル化すると

$$\frac{1}{y} \frac{dy}{dt} = Cx - D, \quad C > 0, D > 0$$

となる。一方ユキウサギは草食性であり、餌が十分にあるとすると、オオヤマネコがいなければ一定の割合でその個体数が増えるであろう。しかし、オオヤマネコの個体数に応じて食べられるユキウサギの数の割合が増えてくる。従って被食者の 1 個体数当たりの増加率は

$$\frac{1}{x} \frac{dx}{dt} = A - By, \quad A > 0, B > 0$$

と考えられる。よって

$$\begin{cases} \dot{x} = (A - By)x, \\ \dot{y} = (Cx - D)y, \quad A, B, C, D > 0 \end{cases} \quad (8.36)$$

これは「Lotka-Volterra の捕食者被食者の方程式」と呼ばれる。方程式 (8.36) の平衡点は $(0, 0), (D/C, A/B)$ の 2 点である。

平衡点 $(0, 0)$ では固有値は $A, -D$ となり、鞍点で不安定点である。

平衡点 $(D/C, A/B)$ では固有値は純虚数となる。しかし定数係数の場合と違ってこれだけでは安定性について何も言えない。個体数は正とし $x > 0, y > 0$ の領域を考え、これを軸に平行な 2 直線 $x = D/C, y = A/B$ によって 4 つの領域に分ける。

領域 A の点 (u, v) では、 $u > D/C > 0, v > A/B > 0$ である。したがって $A - Bv = -r < 0, Cu - D = s > 0$ とおく。 $(x(0), y(0)) = (u, v)$ から始まる軌道で、点 $(x(t), y(t))$ が領域 A にある最大の区間を $0 \leq t < \tau$ とする。領域 A では $x(t)$ は減少し、 $y(t)$ は増加する。

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \log x(t) &= \frac{x'}{x} = A - By \leq -r, \\ \frac{d}{dt} \log y(t) &= \frac{y'}{y} = Cx - D \leq s \end{aligned}$$

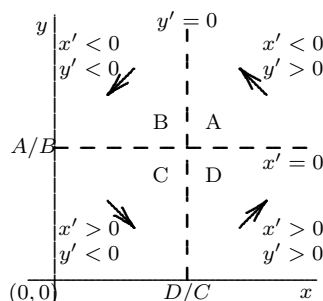
したがって

$$\begin{aligned} \frac{D}{C} &\leq x(t) \leq ue^{-rt}, \\ \frac{A}{B} &\leq y(t) \leq ve^{st} \end{aligned}$$

これより τ は有限であり、 $x(t), y(t)$ は有限の領域 $D/C \leq x(t) \leq u, A/B \leq y(t) \leq ve^{s\tau}$ にあることがわかる。 $x(t)$ は減少関数であり、その境界 $t = \tau$ では $x(\tau) = D/C$ で領域 B に入る。同様の議論によって軌道は反時計回りに回転することがわかる。

しかしこれだけでは軌道が平衡点 $(D/C, A/B)$ に吸い寄せられるのか、何らかの極限周期軌道に巻き付くのか、あるいは第 1 象限を無限遠方と両軸の近傍を周回するのか、または閉軌道をなすのかなどが判定できない。この一部を解決するためその安定性を調べてみる。

捕食者被食者の相空間



いま $V(x, y)$ を

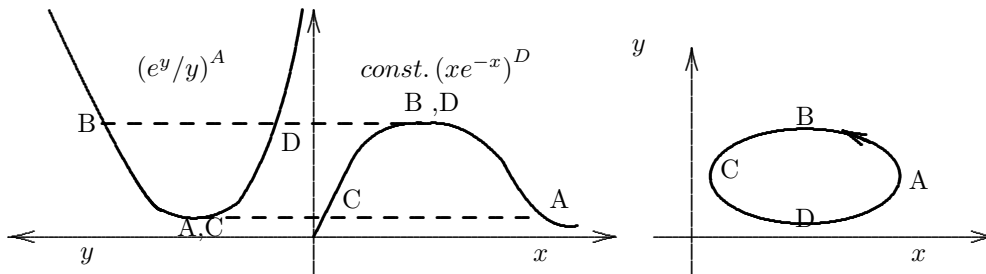
$$V(x, y) = H(x, y) - H(\bar{x}, \bar{y}), \quad H(x, y) = Cx - D \log x + By - A \log y \quad (8.37)$$

と選んでみる。これは点 $(\bar{x}, \bar{y}) = (D/C, A/B)$ で $V(\bar{x}, \bar{y}) = 0$, $\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}$ の符号から $V(x, y) > 0$ がわかる。さらに $\dot{V}(x, y) = 0$ である。したがって $V(x, y)$ が Liapunov 関数であることが確かめられ、点 $(\bar{x}, \bar{y}) = (D/C, A/B)$ は安定平衡点であることがわかる。実は両軸及び平衡点以外では軌道はすべて閉軌道であることがおよそ次のようにして証明される。

平衡点 (\bar{x}, \bar{y}) 以外の任意の点 $(u, v), u > 0, v > 0$ から始まる軌道は直線 $x = D/C$ と $t = t_1, t_2, \dots$ で交わる。同様に t を逆行させて、 $t = t_{-1}, t_{-2}, \dots$ で交わる。もし閉軌道でないと、点列 $(x(t_n), y(t_n))$ は直線 $x = D/C$ に沿った単調列であることが証明される。また V が定値関数でなく極限周期軌道が存在しないから $n \rightarrow \infty$ のとき $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$, または $n \rightarrow -\infty$ のとき $(x(t_n), y(t_n)) \rightarrow (\bar{x}, \bar{y})$ のいずれかが成り立つ。Liapunov 関数が $\dot{V}(x, y) = 0$ より軌道上で一定であるからこれは $V(\bar{x}, \bar{y})$ が狭義の最小値であることに反する。こうして軌道はすべて反時計回りの閉軌道であることがわかった。

このことは Liapunov 関数 $V(x, y)$ が第一積分であることを用いるともっとわかりやすい。変換 $(x = D\xi/C, y = A\eta/B)$ を行い改めて (ξ, η) を (x, y) とすると方程式は式 (8.36) で $B = A, C = D$ 置いたものであり、式 (8.37) で定義された Liapunov 関数 $V(x, y)$ が第一積分であることから

$$Dx - D \log x + Ay - A \log y = \text{一定} \\ \left(\frac{e^y}{y}\right)^A = \text{const.} (xe^{-x})^D \quad (8.38)$$



const. が軌道を決める。図は模式的に等式 (8.38) が成立する場合を示したものである。右辺の $x > 0$ の関数は正で有界、左辺の y の関数は正の最小値がある。点 A は左辺の y の関数が最小、 x が最大、点 B は右辺の x の関数が最大、 y が最大の点である。順次、 $A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D$ となり、A に戻る。第一積分が存在し、 y に対して x はせいぜい 2 個の x が対応することから、軌道は閉じていることが確認できる。プログラム 'flowg.for' は $A = 2, B = 1, C = 1, D = 2$ で平衡点が $(2, 2)$ の場合を示している。ユキウサギとオオヤマネコは同じ周期で元の状態に戻ることになる。

ところで、現実にはオオヤマネコがいなくても、ユキウサギは無限に増加するのではなく、個体数がある限界を超えると増加率が負になることが考えられる。有限の食料供給、環境悪化、同族間の摩擦など社会現象はこれらの要因となる。オオヤマネコについても同様の作用を考慮すると、次の「限界のある増加をする捕食者被食者の方程式」となる。

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = (a - by - ex)x \\ \frac{dy}{dt} = (c - dx - fy)y, \quad a, b, c, d, e, f > 0 \end{cases} \quad (8.39)$$

これについてもプログラム 'flowg.for' を作動させて調べてみて欲しい。

図は省略！