

フーリエ解析と偏微分方程式

メモ

由良忠義

2006年版

これは大阪工業大学、「応用数学 II」の講義を補うため作成したメモです。講義は05年度で終了しました。学生諸君の自主学習に利用して下さい。

このメモ作成には、物理教室の奥田先生、林先生の助言を得ました。

(2006,4,1 改訂)

このメモについて

はじめに応用上便利なように、フーリエ解析の基礎的な事項をまとめ、つぎにその根拠となる収束性を議論します。いくらかの演習用の例題も掲げます。

つぎに代表的な2次元の偏微分方程式を取りあげ、基礎的な性質と解を示します。弦の横振動、熱伝導方程式はフーリエの方法で解き、解の時間的変化を図示します。また、Laplace 方程式をフーリエの方法で解きますが、図示は数値計算法に基づく解を与えています。

数値解析的なアプローチ、すなわち高速フーリエ変換 (FFT) のアルゴリズムとその応用は付録1に示します。「応用数学 II」ではフーリエ解析を解析的な手法に重点をおいて学習しますが、これをデータ解析に適用する橋渡しの道具立てです。ほとんどの科学ライブラリーにはFFTが登録されていますが一度はその原理をしっかりと押さえておくことが必要でしょう。FFTサブルーチンは極めてコンパクトなものですが、多くの工夫と手法が結集されています。その学習を通じて適用法や精度が理解できます。付録に付けたFORTRAN プログラムはこのメモによって作成したものです。さらに進んだ技法を取り入れることもできます。つづいて、FFTのいくつかの応用を取りあげます。

つぎに2次元の2階の偏微分方程式の分類を付録2で行います。授業では時間の都合でごく一部の例しか取り上げませんが、それぞれはこれらの分類の代表になっていることを認識して下さい。つづいて必要なベクトル解析の公式、座標変換の方法を要約します。

付録のプログラムはfortran90とGNU PLOTで作動します。GNU PLOTの取扱いは<http://www.eng.oit.ac.jp/~matsuoka>を参照させてもらって下さい。

また、このライブラリーには偏微分方程式の解にたいするJAVA アプレットも用意しました。ごく一部のテーマについてメモしてみましたが、どの部分も不十分です。偏微分方程式は2変数に限定すると取り扱いが簡単となります。しかしそこにはすでに現象に対する多くの特性が表現されています。方程式、解、現象を一体として掴むことを目指して書いたつもりですが力不足です。より進んだテキストが現れ、さらに進んだ学習が出来ることを期待します。

目次

第 1 章	フーリエ級数及びフーリエ変換	4
1.1	フーリエ級数	4
1.1.1	フーリエ級数のまとめ	4
1.1.2	フーリエ級数の収束条件	9
1.1.3	Fourier 級数の例	15
1.1.4	常微分方程式への応用	22
1.2	一般フーリエ級数	23
1.2.1	Sturm-Liouville 型微分方程式	23
1.2.2	ルジャンドルの多項式による展開	26
1.2.3	Bessel 関数による展開	28
1.2.4	球関数による展開	29
1.3	フーリエ変換	32
1.3.1	フーリエ積分まとめ	32
1.3.2	フーリエ積分の収束定理	33
1.3.3	フーリエ積分の例	33
1.3.4	フーリエ変換まとめ	35
1.3.5	フーリエ変換の性質	39
1.3.6	超関数のフーリエ変換	39
1.3.7	フーリエ変換の例	40
第 2 章	2次元偏微分方程式	46
2.1	主な偏微分方程式	46
2.2	弦の横振動	46
2.2.1	1次元波動方程式とフーリエの方法	46
2.2.2	波動方程式の一般解と反射条件	52
2.2.3	波動方程式のコーシー問題と解の一意性	55
2.2.4	ラプラス変換による偏微分方程式の解法	56
2.3	1次元熱伝導	58
2.3.1	1次元熱伝導方程式とフーリエの方法	58
2.3.2	熱伝導方程式の一般解	61
2.3.3	熱伝導方程式のコーシー問題と解の一意性	65
2.4	ラプラスの方程式	65
2.4.1	2次元ラプラスの方程式とフーリエの方法	65
2.4.2	Laplace の方程式の基本性質	70
2.4.3	Poisson の公式	74
2.5	ヘルムホルツの方程式と波動, 熱伝導	75

2.5.1	ヘルムホルツの方程式	75
2.5.2	2次元波動方程式	79
2.5.3	球の中での熱伝導	81
第3章	付録1－高速フーリエ変換	82
3.1	離散フーリエ変換	82
3.2	FFTアルゴリズム	85
3.3	FFTの若干の応用	88
3.3.1	フーリエ級数	88
3.3.2	相関関数	89
3.3.3	ランダム波のシミュレーション	91
3.3.4	積分方程式	91
3.3.5	音声分析	93
第4章	付録2－座標変換と2階偏微分方程式の表現	94
4.1	積分公式	94
4.2	曲線座標	95
4.3	2変数の2階偏微分方程式－双曲型，放物型，楕円型	98
4.4	分類の例	102

第1章 フーリエ級数及びフーリエ変換

1.1 フーリエ級数

1.1.1 フーリエ級数のまとめ

三角関数系 $\{1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cos 3x, \sin 3x, \dots\}$ は直交関数系である。 m, n を自然数とすると

$$\int_{-\pi}^{\pi} 1 dx = 2\pi, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx dx = 0, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx = 0, \\ \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = \pi \delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = \pi \delta_{mn}, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0 \quad (1.1)$$

である。ここで δ_{mn} はクロネッカーのデルタで $m = n$ なら 1, $m \neq n$ なら 0 である。 $(-\pi, \pi)$ で定義された関数 $f(x)$ にたいして、三角級数

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

を考える。ここで、等号 $=$ ではなく、 \approx を用いたのは、必ずしも右辺の級数が関数 $f(x)$ に収束するとは限らないからである。この右辺の三角級数が $f(x)$ に等しいとすると、両辺に順次 $1, \cos kx, \sin kx$ をかけて積分して結局

フーリエ級数

$(-\pi, \pi)$ で定義された関数 $f(x)$ にたいして、

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.2)$$

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.3)$$

が得られる。 a_k, b_k をフーリエ係数 (Fourier coefficient) といい、これを用いた級数 (1.2) をフーリエ級数 (Fourier series) という。 $(\frac{1}{2}a_0$ を a_0 と表すテキストもある。このとき、 a_0 が (1.3) と変わるから注意!) フーリエ級数の収束すなわち、(1.3) の等号が成り立つ一つの十分条件は

フーリエ級数の収束条件

$(-\pi, \pi)$ で定義された関数 $f(x)$ が区分的に滑らかならば、 $f(x)$ のフーリエ級数は

- (1) $f(x)$ が連続な点では、 $f(x)$ に収束する。
- (2) $f(x)$ が不連続な点では、 $\frac{1}{2}\{f(x-0) + f(x+0)\}$ に収束する。

である。詳しくは次節にまとめるが、多くの場合はこれで十分である。
関数 $f(x)$ が一般区間 $(-l, l)$ で定義されているときは、

$$\xi = \frac{\pi}{l}x, \quad d\xi = \frac{\pi}{l}dx, \quad g(\xi) = f(x) = f\left(\frac{l}{\pi}\xi\right)$$

と変換すると、 $g(\xi)$ の定義域は $(-\pi, \pi)$ となり、(1.2) の展開ができる。

$$f(x) = g(\xi) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\xi + b_k \sin k\xi)$$

このとき、

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \cos k\xi d\xi = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \cos \frac{k\pi}{l}x dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(\xi) \sin k\xi d\xi = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(x) \sin \frac{k\pi}{l}x dx \quad (k = 1, 2, \dots)$$

従って、

一般区間 $(-l, l)$ で定義された関数に対するフーリエ級数

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos \frac{k\pi}{l}x + b_k \sin \frac{k\pi}{l}x) \quad (1.4)$$

$$a_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l}\xi d\xi \quad (k = 0, 1, 2, \dots), \quad b_k = \frac{1}{l} \int_{-l}^l f(\xi) \sin \frac{k\pi}{l}\xi d\xi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

となる。また

フーリエ余弦展開

関数 $f(x)$ が区間 $(-l, l)$ で定義され偶関数 ($f(-x) = f(x)$) のとき、あるいは区間 $(0, l)$ で定義されているとき

$$f(x) \approx \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{k\pi}{l}x \quad (1.5)$$

$$a_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{k\pi}{l}\xi d\xi \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.6)$$

フーリエ正弦展開

関数 $f(x)$ が区間 $(-l, l)$ で定義され奇関数 ($f(-x) = -f(x)$) のとき、あるいは区間 $(0, l)$ で定義されているとき

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin \frac{k\pi}{l}x \quad (1.7)$$

$$b_k = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{k\pi}{l}\xi d\xi \quad (k = 1, 2, \dots)$$

となる。

フーリエ級数は左辺の $(-\pi, \pi)$ または $(-l, l)$ で定義された関数 $f(x)$ を周期 2π あるいは周期 $2l$ の三角級数で表すものであり、したがって元の関数 $f(x)$ が周期 2π あるいは周期 $2l$ の周期関数としてよい。さらに関数 $f(x)$ が $(0, \pi)$ または $(0, l)$ で定義されているとき、これを偶関数とみなすと余弦展開となり、奇関数とみなすと正弦展開となる。

特別な場合として、 $f(x)$ が周期 $4l$ の周期関数の時を考える。

フーリエ級数の一般論より

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{n\pi}{2l} x + b_n \sin \frac{n\pi}{2l} x \right) \quad (1.8)$$

$$a_n = \frac{1}{2l} \int_{-2l}^{2l} f(\xi) \cos \frac{n\pi}{2l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{1}{2l} \int_{-2l}^{2l} f(\xi) \sin \frac{n\pi}{2l} \xi d\xi \quad (1.9)$$

となる。さらに $f(x)$ が偶関数で $f(x) = -f(2l - x)$ の条件を満たすとき

$$a_n = \frac{1}{l} \int_0^{2l} f(\xi) \cos \frac{n\pi}{2l} \xi d\xi = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2l} \xi d\xi & (n = 2m+1) \end{cases}$$

$$b_n = 0$$

したがって、このときのフーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} a_{2m+1} \cos \frac{(2m+1)\pi}{2l} x, \quad a_{2m+1} = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{(2m+1)\pi}{2l} \xi d\xi \quad (1.10)$$

となる。また

$f(x)$ の周期が $4l$ の奇関数で、 $f(x) = f(2l - x)$ の条件を満たすときのフーリエ級数は

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} b_{2m+1} \sin \frac{(2m+1)\pi}{2l} x, \quad b_{2m+1} = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{(2m+1)\pi}{2l} \xi d\xi \quad (1.11)$$

となる。

フーリエ級数は有限区間で定義された関数または周期関数を \sin, \cos の級数で表現しようとするものである。区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $f(x)$ に対して、任意の係数 $a_0, a_k, b_k, k = 1, 2, \dots$ をもった三角級数の部分和を

$$s_n(f, x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \quad (1.12)$$

としたとき、残差平方和を

$$E_n = \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(f, x) - f(x)]^2 dx \quad (1.13)$$

と定義する。これを最小にするには、 E_n が $a_0, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots$ の二次式であり $E_n \geq 0$ であることから

$$\frac{\partial E_n}{\partial a_k} = 0, \quad \frac{\partial E_n}{\partial b_k} = 0 \quad (1.14)$$

で求めることが出来る。

$$\frac{\partial E_n}{\partial a_k} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(f, x) - f(x)] \cos kx dx = 0$$

$$\frac{\partial E_n}{\partial b_k} = 2 \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(f, x) - f(x)] \sin kx dx = 0$$

これより

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx dx \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n), \quad b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin kx dx \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

が得られる。これはフーリエ係数そのものである。すなわちフーリエ級数は関数 $f(x)$ に対する近似三角級数であるだけでなく、各部分積も最小二乗法の意味で最適であることを示している。

しかしこれは $n \rightarrow \infty$ のとき $E_n \rightarrow 0$ を保証するものではない。

$$\int_{-\pi}^{\pi} [s_n(f, x) - f(x)]^2 dx \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.15)$$

が成立するときフーリエ級数は $f(x)$ に「平均収束」するという。級数の収束は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{s_n(f, x) - f(x)\} = 0 \quad (1.16)$$

で定義されるものであり、(1.15) と区別して「各点収束」という。一般に、

「関数列 $\{f_n(x)\}$ と、区間 I で定義された関数 $f(x)$ があって、任意の $\epsilon > 0$ が与えられたとき、ある自然数 N が存在して、 $n \geq N$ なる任意の n に対して

$$|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$$

となるとき、関数列 $\{f_n(x)\}$ は、区間 I で定義された関数 $f(x)$ に収束する」

という。これは、(1.16) を演算しやすい形に表現したものである。ここで一般に N は $x \in I$ に依存してもよいが、 $x \in I$ によらず決めることが出来るとき一様収束という。一様収束ならば、平均収束である。

「平均収束」しても、「各点収束」しない場合は不連続関数を想定すればふつうの出来事であることがわかるが、逆に「各点収束」しても、「平均収束」しない関数列 $\{f_n(x)\}$ もいくらでもつくれる。

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & (|x| > \frac{1}{n} \text{ あるいは } x = 0) \\ n(1 - |x|) & (|x| < \frac{1}{n} \text{ かつ } x \neq 0) \end{cases}$$

あるいは

$$f_n(x) = n^2 |x| e^{-n|x|}$$

これらはいずれも各点で 0 に収束するが、平均収束しない。

フーリエ級数にたいして、その残差平方和 (1.13) を計算してみる。積分をフーリエ係数に置き換え、三角関数の直交性 (1.1) を用いると

$$\begin{aligned} E_n &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) s_n(f, x) dx + \int_{-\pi}^{\pi} [s_n(f, x)]^2 dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - 2 \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\} dx \\ &\quad + \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right\} \left\{ \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^n (a_j \cos jx + b_j \sin jx) \right\} dx \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - 2\pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} + \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} \\ &= \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx - \pi \left\{ \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{k=1}^n (a_k^2 + b_k^2) \right\} \end{aligned} \quad (1.17)$$

となる。任意の n に対して $E_n \geq 0$ だから、 $n \rightarrow \infty$ とすると

ベッセル (Bessel) の不等式

$f(x)$ を $[-\pi, \pi]$ で定義された関数のとき

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) \leq \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [f(x)]^2 dx \quad (1.18)$$

が成立する。ただし a_k, b_k はフーリエ係数であり、各積分の存在は仮定されている。
また平均収束 (1.15) (一様収束のときは平均収束する) のとき

パーセバル (Parseval) の等式 (一般区間のフーリエ級数)

$$\frac{1}{2}a_0^2 + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k^2 + b_k^2) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l [f(x)]^2 dx \quad (1.19)$$

が成り立つ。

フーリエ級数は以下のように複素型で用いられることもある。

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}$$

を式 (1.2) に代入して,

$$c_k = \frac{a_k - ib_k}{2}, \quad c_{-k} = \frac{a_k + ib_k}{2} \quad (= c_k^*, \quad f(x) \text{ が実関数のとき}) \quad (1.20)$$

とおくと

複素型フーリエ級数

$(-\pi, \pi)$ で定義された関数 $f(x)$ にたいして,

$$f(x) \approx \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx} \quad (1.21)$$

$$c_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) e^{-ik\xi} d\xi \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots) \quad (1.22)$$

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |c_k|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \quad (\text{パーセバル (Parseval) の等式}) \quad (1.23)$$

となる。また次の形もよく用いられる。

フーリエ級数

周期 T の関数 $x(t)$ にたいする複素フーリエ級数

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \exp(2\pi ikt/T) \quad (1.24)$$

$$c(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-2\pi ikt/T) dt \quad (1.25)$$

1.1.2 フーリエ級数の収束条件

フーリエ級数がいかなる意味で $f(x)$ を表すかは収束の定義にもよる。また連続な関数 $f(x)$ については常にフーリエ級数は収束するかのごとく予断されるが、連続関数の中にもフーリエ級数が収束しないものが存在することが解っている。したがって、問題はどの程度の「滑らかさ」を要求すれば収束するか、ということであり、議論は少し厳密さを要求する。ここではいくつかのフーリエ級数の収束に対する十分条件を紹介する。ただし、初等レベルの応用のためには、この小節を読み飛ばすこともできる。

はじめに、最も簡単な場合として、1階および2階の導関数が連続である $f(x)$ にたいしてフーリエ級数は一様収束することを見ておこう。(1.3) より

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi = \frac{f(\xi) \sin k\xi}{k\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(\xi) \sin k\xi d\xi \\ &= \frac{f'(\xi) \sin k\xi}{k^2\pi} \Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{k^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\xi) \cos k\xi d\xi = -\frac{1}{k^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f''(\xi) \cos k\xi d\xi \end{aligned}$$

$f''(x)$ は連続だから

$$|f''(x)| < M$$

となる定数 M が存在する。したがって

$$|a_k| = \frac{1}{k^2\pi} \left| \int_{-\pi}^{\pi} f''(\xi) \cos k\xi d\xi \right| < \frac{1}{k^2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} M d\xi = \frac{2M}{k^2}$$

同様に

$$|b_k| < \frac{2M}{k^2}$$

である。フーリエ級数の (1.2) の各項の絶対値の和は、

$$\frac{1}{2}|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k \cos kx| + |b_k \sin kx|) < \frac{1}{2}|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|) < \frac{1}{2}|a_0| + 4M \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$$

は収束する。したがってとフーリエ級数 (1.2) は (一様) 収束する。

連続の条件をもっと緩和した場合の議論に進む。いま $f(x)$ を周期 2π の関数で、 $[-\pi, \pi]$ で絶対積分可能として、そのフーリエ級数が $f(x)$ を表す条件を考えてみよう。すなわち級数 (1.21) の部分

$$s_n(f, x) = \sum_{k=-n}^{k=n} c_k e^{ikx} \quad (1.26)$$

の点 x での $f(x)$ への収束条件を考えてみる。証明の記述を簡潔に行うため、あらかじめ $f(x)$ の不連続点では $f(x+0), f(x-0)$ が存在するとして、 $f(x) = (f(x+0) + f(x-0))/2$ で定義し直しておく。
 $c_k = 1/2\pi$ とした級数の部分和は等比級数だから

$$D_n(x) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ikx} = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x}{\sin \frac{1}{2}x} \quad (1.27)$$

したがって、

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^{k=n} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy e^{ikx} = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-n}^{k=n} e^{ik(x-y)} f(y) dy = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) f(y) dy \\ &= (D_n * f)(x) = (f * D_n)(x) = \int_0^{\pi} D_n(y) (f(x+y) + f(x-y)) dy \end{aligned} \quad (1.28)$$

となる。ここに、周期 2π の関数 $f(x), g(x)$ に対する合成積を

$$(f * g)(x) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-y) g(y) dy$$

と定義した。このとき $(f * g)(x) = (g * f)(x)$ が成り立つ。

関数 $D_n(x)$ は Dirichlet 核といわれる。 $D_n(x)$ は $c_k = 1/2\pi$ のときの $S_n(x)$ だから

$$1 = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(y) dy = 2 \int_0^{\pi} D_n(y) dy$$

である。したがって

$$\phi_x(y) = \frac{1}{2} (f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)) \quad (1.29)$$

を定義すると

$$s_n(f, x) - f(x) = \int_{-\pi}^{\pi} D_n(x-y) (f(y) - f(x)) dy = 2 \int_0^{\pi} \phi_x(y) D_n(y) dy \quad (1.30)$$

よって、 $s_n(f, x)$ が点 x で関数 $f(x)$ に収束するための必要十分条件は、次のようになる。

$$\int_0^{\pi} \phi_x(y) D_n(y) dy \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.31)$$

ところで、つぎの適用範囲の広い定理がある。

「 $(-\infty, \infty)$ において、 $f(x)$ が絶対積分可能、 $K(x)$ を有界で、

$$\int_0^A K(x) dx = o(A), \quad A \rightarrow \pm\infty \quad (1.32)$$

とすると

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} K(x\lambda) f(x) dx = 0 \quad (1.33)$$

とくに、 $K(x) = e^{-ix}$ のとき、

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\lambda x} dx = 0 \quad (1.34)$$

である。Riemann-Lebesgue の補題」

ここで, $f(A) = o(A)$, $A \rightarrow \pm\infty$ とは, $\lim_{A \rightarrow \pm\infty} f(A)/A = 0$ を意味する。およその証明をしておく。
 $f(x)$ を特に

$$f(x) = \begin{cases} c & (a < x < b) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

とすると仮定 (1.32) より

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda x) f(x) dx &= c \int_a^b K(\lambda x) dx = \frac{c}{\lambda} \int_{a\lambda}^{b\lambda} K(u) f(u) du \\ &= bc \cdot \frac{1}{b\lambda} \int_0^{b\lambda} K(u) du - ac \cdot \frac{1}{a\lambda} \int_0^{a\lambda} K(u) du \rightarrow 0 \quad (\lambda \rightarrow \pm\infty) \end{aligned}$$

したがって, この一次結合である任意の階段関数について (1.33) が成り立つ。
 さらに絶対積分可能な一般の関数 $f(x)$ について, 任意の $\epsilon > 0$ に対して,

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - S_\epsilon(x)| dx < \epsilon$$

が成り立つ階段関数 $S_\epsilon(x)$ が存在する。これは, 「絶対積分可能な関数の空間は, 階段関数全体で稠密 (チェウミツ dense) である」ということによる (我々は同様の定理, 「ある区間で連続な関数は多項式で一様にいくらでも正確に近似できる」 (Weierstrass の多項式近似定理, 自然科学者のための数学概論, 寺沢寛一著), をよく知っている)。したがって

$$\int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda x) f(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda x) (f(x) - S_\epsilon(x)) dx + \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda x) S_\epsilon(x) dx$$

の右辺第 2 項は $\lambda \rightarrow \pm\infty$ で 0 に収束し, $|K(x)| \leq C$ とすると,

$$\lim_{\lambda \rightarrow \pm\infty} \sup \left| \int_{-\infty}^{\infty} K(\lambda x) f(x) dx \right| \leq C \int_{-\infty}^{\infty} |f(x) - S_\epsilon(x)| dx \leq C\epsilon$$

だから (1.34) が成り立つ。

また $K(x) = e^{-ix}$ は, $A = 2n\pi + a$ ($0 \leq a < 2\pi, n = 1, 2, \dots$) とおくと

$$\left| \lim_{A \rightarrow \infty} \int_0^A K(x) dx / A \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \sup \left| \int_0^a e^{-ix} dx / A \right| \leq \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi / 2n\pi = 0$$

(1.32) をみだし, (1.34) となる。

証明完.

δ を $0 < \delta < \pi$ の任意の正数とすると, $\phi_x(y) / \sin \frac{y}{2}$ は (δ, π) で絶対積分可能だから, Riemann-Lebesgue の補題から

$$\int_\delta^\pi \phi_x(y) D_n(y) dy \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.35)$$

したがって

$$s_n(f, x) - f(x) = 2 \int_0^\delta \phi_x(y) D_n(y) dy + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.36)$$

また,

$$2\pi D_n(y) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})y}{\sin \frac{1}{2}y} = 2 \frac{\sin ny}{y} + \left(\cot \frac{y}{2} - \frac{2}{y}\right) \sin ny + \cos ny \quad (1.37)$$

となり, $|y|$ が小さいとき, $\cot \frac{y}{2} - \frac{2}{y} = O(y)$ であるから Riemann-Lebesgue の補題から

$$\int_0^\delta \phi_x(y) \left(\cot \frac{y}{2} - \frac{2}{y}\right) \sin ny dy \rightarrow 0, \quad \int_0^\delta \phi_x(y) \cos ny dy \rightarrow 0 \quad (1.38)$$

したがって

$$s_n(f, x) - f(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \phi_x(y) \frac{\sin ny}{y} dy + o(1), \quad n \rightarrow \infty \quad (1.39)$$

となる。連続関数 $s_n(f, x)$ が区間 I 上の点 x で $f(x)$ に一様収束するならば, $f(x)$ は I 上で有界である。また $f(x)$ は I 上で有界ならば, 上の式で $\phi_x(y)$ を $-2f(x)$ におきかえたものは, $x \in I$ に関して一様に 0 に収束する。 $\phi_x(y)$ を $f(x+y), f(x-y)$ におきかえたものについても同様である。

まとめると

(1) Fourier 級数の点 x での収束性は, x の近傍の関数の値のみによって決まる。

(Riemann の局所性定理)

(2) Fourier 級数が一点 x で収束するための必要十分条件は, 任意の正数 δ ($0 < \delta < \pi$) に対して

$$\int_0^\delta \phi_x(y) D_n(y) dy \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.40)$$

また

$$\int_0^\delta \phi_x(y) \frac{\sin ny}{y} dy \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty \quad (1.41)$$

となる。また, ある区間 $[a, b]$ で, $s_n(f, x)$ が点 x で値 $f(x)$ に一様収束するための必要十分条件は, f が I で有界で $x \in I$ によらない $\delta > 0$ が存在して, 一様に式 (1.41) が成立することである。

収束の判定条件を示してみよう。

Fourier 級数の収束の十分条件

(1) ある $\delta > 0$ に対して

$$\int_0^\delta \frac{|\phi_x(y)|}{y} dy < \infty \quad (1.42)$$

ならば, Fourier 級数は点 x で $f(x)$ に収束する。 f が閉区間 I で有界, かつ任意の $\epsilon > 0$ に対して x によらない $\delta > 0$ が存在して

$$\int_0^\delta \frac{|\phi_x(y)|}{y} dy < \epsilon \quad (1.43)$$

となるならば, Fourier 級数は I で一様に $f(x)$ に収束する。(Dini の判定条件)

(2) f が 1 点 x のある近傍 $[x - \delta, x + \delta]$ ($\delta > 0$) で有界変動であれば, f の Fourier 級数は, 点 x で f に収束する。

$$s_n(f, x) \rightarrow \frac{1}{2}[f(x+0) + f(x-0)], \quad n \rightarrow \infty \quad (1.44)$$

f が閉区間 I で連続かつ I を含む开区間で有界変動ならば, Fourier 級数は I で $f(x)$ に一様に収束する。(Dirichlet-Jordan の判定条件)

(1) の前半は, (1.42) が仮定されると, Riemann-Lebesgue の補題からただちに (1.41) が成り立つことから明らかである。

f が閉区間 I で有界ならば, (1.39) を得る過程から, 任意の $\delta > 0$ に対して

$$s_n(f, x) - f(x) - \frac{2}{\pi} \int_0^\delta \frac{\phi_x(y)}{y} \sin ny dy$$

は I で一様に 0 に収束する。したがって (1.43) が成り立つように $\delta > 0$ をとっておけば, $|s_n(f, x) - f(x)| \leq \epsilon$, ($n \rightarrow \infty$) が得られ, $s_n(f, x) - f(x)$ が I で一様に 0 に収束することになる。

(2) の前半について。

はじめに, $f(x)$ が閉区間 $[a, b]$ で有界変動について。実数値をとる有界な関数 $f(x)$ が, 区間の有限個の分点 $a < x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ をとり, $f(x_i) - f(x_{i-1})$ のうち, 正のものおよび負のものの和をそれぞれ $P, -N$ とすれば, $P - N = f(b) - f(a)$, $P + N = \sum_i |f(x_i) - f(x_{i-1})|$. あらゆる分割に関する $P, N, P + N$ の上限をそれぞれ $[a, b]$ における $f(x)$ の正変動, 負変動, 全変動と言い, いずれかが有限ならば他も有限となる。このとき, $f(x)$ を有界変動関数という。 $f(x)$ が有界変動ならば, 各 x に対して右,

左からの極限值 $f(x \pm 0)$ が存在する。

さて $f(x)$ を有界変動とする。もし x が不連続点とすると、あらためて $f(x)$ を $f(x+0)$ と $f(x-0)$ の平均値に定義すると、各 x に対して $\phi_x(+0) = 0$ となる。 $f(x)$ が有界変動ならば、 $\phi_x(y)$ も有界変動となり、 $\epsilon > 0$ に対して、 $\delta > 0$ が存在して、 $\phi_x(y)$ の全変動は ϵ をこえない。

$$\int_0^\pi \phi_x(y) \frac{\sin ny}{y} dy = \int_0^\delta \phi_x(y) \frac{\sin ny}{y} dy + \int_\delta^\pi \phi_x(y) \frac{\sin ny}{y} dy \quad (1.45)$$

とすると、第2項だけでなく、第1項も $n \rightarrow \infty$ で0となる。その理由は。有界変動関数 $\phi_x(y)$ は2つの単調関数 $h^+(y), h^-(y)$ の差で表せる。

$$\phi_x(y) = h^+(y) - h^-(y), \quad 0 < y \leq \delta$$

$\phi_x(+0) = 0$ だから、 $h^\pm(0) = 0$ とし、 $\phi_x(y)$ の全変動が $\epsilon > 0$ を越えないから $h^\pm(y) \leq \epsilon$ となる。任意の単調関数 $f(x)$ と積分可能な関数 $g(x)$ に対する、積分の第2平均値の定理

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a+0) \int_a^\xi g(x)dx + f(b-0) \int_\xi^b g(x)dx \quad (a \leq \xi \leq b)$$

を適用して、 $0 \leq \xi \leq \delta$ が存在して

$$\int_0^\delta h^+(y) \frac{\sin ny}{y} dy = h^+(\delta) \int_\xi^\delta \frac{\sin ny}{y} dy = h^+(\delta) \int_{n\xi}^{n\delta} \frac{\sin t}{t} dt$$

積分

$$\text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t} dt \quad (1.46)$$

は存在し、積分正弦関数といわれる。 $\text{Si}(\pi) = 1.85194\dots$ 。従って定数 $C \leq \text{Si}(\pi)$ に対して

$$\left| \int_0^\delta h^+(y) \frac{\sin ny}{y} dy \right| \leq C\epsilon$$

となる。 $h^-(y)$ についても同じだから (1.45) の左辺は $n \rightarrow \infty$ で0に収束する。したがって $s_n(f, x)$ は $f(x)$ に収束する。

また後半について、 f が閉区間 I で連続かつ I を含む开区間 J で有界変動ならば、これを I 上連続で J で単調増加な関数 $h^\pm(y)$ の差として表すことができる。 $h^\pm(y)$ は J で一様連続だから、 $\delta > 0$ を $\epsilon \in I$ によらずにとることができる。 $f(x)$ は I で有界だから (1.45) の右辺第1項も第2項も $x \in I$ で一様に0に収束することになる。

Dirichlet-Jordan の判定条件における「有界変動関数」の条件は、「区分的に滑らか」の条件で議論されることが多い。

閉区間 $[a, b]$ で関数が「区分的に連続」とは

「有限個の点 $a < x_1 < x_2 < \dots < x_n < b$ があって、 $f(x)$ は各开区間 $(a, x_1), (x_1, x_2), \dots, (x_n, b)$ で連続であり、各开区間の端点では内部からの極限值が存在する」

ことをいう。閉区間 $[a, b]$ で関数が「区分的に滑らか」とは

「 $f(x), f'(x)$ が区分的に連続」

であることを言う。区分的に滑らかであれば、すべての点で $f(x+0), f(x-0)$ だけでなく、 $f'(x+0), f'(x-0)$ が存在する。区分的に滑らかでないが有界変動である例として

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \sin \frac{1}{x} & (x \neq 0) \\ 0 & (x = 0) \end{cases}$$

がある。 $f(+0) = 0$ だが、 $f'(+0)$ は存在しない。したがって区分的に滑らかでない。しかし、 $x > 0, 1/x = (2n + 1/2)\pi + \theta, -\pi \leq \theta < \pi, n = 1, 2, \dots$ とおくと、 $[1/(2n + 1/2)\pi, 1/(2n + 2 + 1/2)\pi]$ での全変動は $4/(2n + 1/2)^2$ を越えない。したがって $[0, \pi/2]$ の全変動 $P + N$ は

$$P + N \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4}{(2n + 1/2)^2} < \frac{2\pi^2}{3}$$

だから、有限となり有界変動となる。一般に「区分的に滑らか」ならば有界変動だから、実用上の判定条件として「区分的に滑らか」が使われることが多い。

$f(x)$ を $[-\pi, \pi]$ で区分的に滑らかとして、フーリエ級数の収束を証明しておこう。この場合少し証明が簡単になる。ベッセルの不等式 (1.18) より、フーリエ係数 a_k, b_k は $a_k \rightarrow 0, b_k \rightarrow 0, (k \rightarrow \infty)$ である。すなわち

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \cos k\xi d\xi = 0, \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin k\xi d\xi = 0$$

ここでは $f(x)$ の区分的連続を用いている。また $f(x) \sin x/2, f(x) \cos x/2$ も区分的に連続だから、これより

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{-\pi}^{\pi} f(\xi) \sin(k + \frac{1}{2})\xi d\xi = 0$$

これらは Riemann-Lebesgue の補題 (1.34) に含まれていることである。

(1.30) では $f(x) = (f(x+0) + f(x-0))/2$ とおいていたが、 $f(x)$ を元の関数にもどしておく

$$\begin{aligned} s_n(f, x) - \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2} &= 2 \int_0^{\pi} \phi_x(y) D_n(y) dy \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+y) - f(x-0)}{2 \sin y/2} \sin(n + \frac{1}{2})y dy + \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x+0)}{2 \sin y/2} \sin(n + \frac{1}{2})y dy \end{aligned}$$

ところが、右辺第2項について

$$\lim_{y \rightarrow +0} \frac{f(x+y) - f(x+0)}{2 \sin y/2} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{f(x+y) - f(x+0)}{y} \frac{y}{2 \sin y/2} = \lim_{y \rightarrow +0} \frac{f(x+y) - f(x+0)}{y}$$

であり、 $f(x)$ が区分的に滑らかだから $f'(x+0)$ が存在し、よって $\frac{f(x+y) - f(x+0)}{2 \sin y/2}$ は $0 \leq y \leq \pi$ で区分的に連続となる。したがって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{f(x+y) - f(x+0)}{2 \sin y/2} \sin(n + \frac{1}{2})y dy = 0$$

同様に第1項についても

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^0 \frac{f(x+y) - f(x-0)}{2 \sin y/2} \sin(n + \frac{1}{2})y dy = 0$$

よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = \frac{f(x+0) + f(x-0)}{2}$$

が証明された。

有界変動関数 $f(x)$ の、不連続点での収束を考える。

「Gibbs の現象」

いま $f(x)$ が有界変動、 0 を $f(x)$ の不連続点とし、 $f(0) = 0, f(+0) = d > 0, f(-0) = -d$ とする。 $x = 0$ を含むすべての点で $s_n(f, x)$ は $f(x)$ に収束するが、一様収束ではない。任意の $\delta (0 < \delta < \pi)$ にたいして

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \frac{1}{2} (f(x+y) + f(x-y)) \frac{\sin ny}{y} dy$$

だから、点 $x = \frac{\pi}{n}$ では、 $\delta = \frac{\pi}{n}$ とすると

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, \frac{\pi}{n}) &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{n}} \frac{1}{2} (f(\frac{\pi}{n} + y) + f(\frac{\pi}{n} - y)) \frac{\sin ny}{y} dy \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (f(\frac{\pi}{n} + \frac{t}{n}) + f(\frac{\pi}{n} - \frac{t}{n})) \frac{\sin t}{t} dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} (f(+0) + f(+0)) \frac{\sin t}{t} dt \\ &= \frac{2d}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = d \times \frac{2}{\pi} Si \pi = d \times 1.1789 \dots \end{aligned}$$

となる。

$$\frac{2}{\pi} Si \pi = 1.1789 \dots \tag{1.47}$$

は Gibbs 定数といわれる。従って $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, \frac{\pi}{n}) > d$, すなわち $f(x)$ の近似曲線 $s_n(f, x)$ は $0 \leq y \leq d \times 1.1789 \dots$ に凝集する。これを G i b b s 現象という。一般に、 a の近傍で、 $f_n(x) \rightarrow f(x), f(a+0) > f(a) (< f(a))$ とし、 $x_m \rightarrow a+0, \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x_m) > f(a+0) (< f(a+0))$ であるような $\{x_m\}$ が存在するとき $f_n(x)$ の右側で G i b b s 現象を呈するという。

簡単な例で Gibbs 現象を見ておこう。

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 < x < \pi) \end{cases}$$

のフーリエ級数は収束し

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{\sin nx}{n}$$

となる。すなわち部分和

$$s_{2n+1}(f, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{2n+1} \frac{\sin kx}{k}$$

は $s_n(f, x) \rightarrow f(x)$, ($n \rightarrow \infty$) である。項別積分で置き換えて, (1.27) と同じように等比級数を用いて

$$s_{2n+1}(f, x) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=1,3,\dots}^{2n+1} \int_0^x \cos k\xi d\xi = \frac{4}{\pi} \int_0^x \sum_{k=1,3,\dots}^{2n+1} \cos k\xi d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^x \frac{\sin 2(n+1)\xi}{\sin \xi} d\xi$$

が得られる。したがって $s_{2n+1}(f, x)$ は $x = \frac{\pi}{2(n+1)}$ で不連続点 $x = 0$ にもっとも近い極値をとる。さらにこの近傍では上に凸だから極大となる。 $n \rightarrow \infty$ では (1.37), (1.38) を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_{2n+1} \left(f, \frac{\pi}{2(n+1)} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2(n+1)}} \frac{\sin 2(n+1)\xi}{\sin \xi} d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} dt = 1.1789 \dots$$

となる。

収束を広げる方法がある。数列 $s_n(f, x)$ から

$$V_n(f, x) = \frac{1}{n} (s_1(f, x) + s_2(f, x) + \dots + s_n(f, x))$$

を定義すると, $\lim_{n \rightarrow \infty} s_n(f, x) = s$ なら, $\lim_{n \rightarrow \infty} V_n(f, x) = s$ が成立する。逆は必ずしも成り立たないが, 次の定理が成り立つことがわかっている。

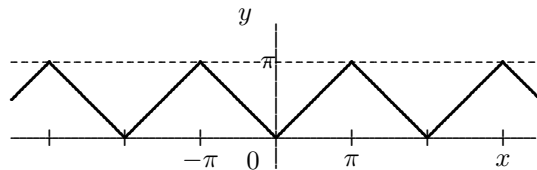
「 $f(x)$ が周期 2π の連続関数ならば, 区間 $[-\pi, \pi]$ において x にかんして一様に $V_n(f, x) \rightarrow f(x)$ となる。」
(Fejér (フェイエール) の定理)

1.1.3 Fourier 級数の例

講義の中で議論する。以下では不連続点での表現を省略するときもある。

1 周期 2π の偶関数のフーリエ級数展開

$$f(x) = |x| = \begin{cases} x & (0 \leq x \leq \pi) \\ -x & (-\pi \leq x \leq 0) \end{cases}$$



偶関数だから

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi, \quad a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx$$

$$= 2 \times \frac{(-1)^n - 1}{n^2 \pi} = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, \dots) \\ -\frac{4}{\pi n^2} & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{\cos nx}{n^2} = \frac{1}{2}\pi - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right)$$

$f(0) = 0$ より

$$\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \dots$$

が得られる。またパーセバルの等式

$$\frac{1}{l} \int_{-l}^l |f(x)|^2 dx = \frac{1}{2} a_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n^2 + b_n^2\}$$

を適用して

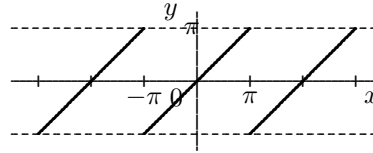
$$\frac{2}{\pi} \times \frac{\pi^3}{3} = \frac{\pi^2}{2} + \sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{16}{\pi^2} \frac{1}{n^4}$$

これより次の級数の和を得る。

$$\sum_{n=1,3,5,\dots} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{96}$$

2 周期 2π の奇関数のフーリエ級数展開

$$f(x) = x \quad (-\pi \leq x \leq \pi)$$



奇関数だから

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \sin nx dx = \frac{2}{n} (-1)^{n+1}$$

$$f(x) = 2(\sin x - \frac{1}{2} \sin 2x + \frac{1}{3} \sin 3x + \dots)$$

関数は $f((2n+1)\pi - 0) = \pi$, $f((2n+1)\pi + 0) = -\pi$ となり, $x = (2n+1)\pi$ で不連続だが, フーリエ級数は $x = (2n+1)\pi$ で 0 となり, フーリエ級数の収束定理が確認できる。
 $x = \frac{\pi}{2}$ より

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

が得られる。またパーセバルの等式を適用すると,

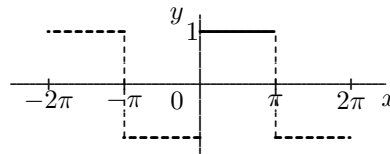
$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$$

が得られる。

余計なことではあるが, これは $S = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots$ において, 前出の $\frac{\pi^2}{8} = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots$ を用いて, $S - \frac{\pi^2}{8} = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \dots = \frac{1}{4} \times S$ これより $S = \frac{\pi^2}{6}$ として得る事もできる。

3 $0 < x < \pi$ で定義された関数の正弦展開

$$f(x) = 1 \quad (0 < x < \pi)$$



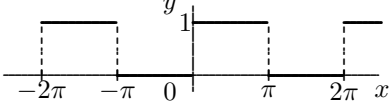
フーリエ正弦展開とは、 $0 < x < \pi$ で定義された関数を周期 2π の奇関数と見なして展開することだから、次のように展開できる。

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

$$b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin nx dx = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{4}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$$

これは、すでに求めた関数 $|x|$ のフーリエ級数の微分によって簡単に求めることもできる。さらに、周期 2π の関数

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi < x < 0) \\ 1 & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$


のフーリエ級数は、 $g(x) = \frac{1}{2}(1 + f(x))$ より

$$g(x) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\sin x + \frac{1}{3} \sin 3x + \frac{1}{5} \sin 5x + \dots)$$

となる。さらに、周期 2π の関数 $h(x)$

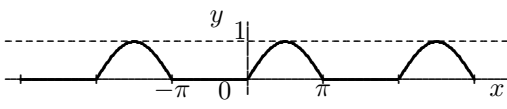
$$h(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi/2 < x \leq \pi/2) \\ 1 & (\pi/2 \leq x \leq 3\pi/2) \end{cases}$$


のフーリエ級数は、 $g(x)$ を $\pi/2$ だけ平行移動して

$$h(x) = g(x - \pi/2) = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} (\cos x - \frac{1}{3} \cos 3x + \frac{1}{5} \cos 5x - \dots)$$

となる。

4 周期 2π の周期関数のフーリエ級数展開 (正弦波の半波整流)

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-\pi \leq x \leq 0) \\ \sin x & (0 \leq x \leq \pi) \end{cases}$$


$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

$$a_0 = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x dx = \frac{2}{\pi}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\sin(n+1)x - \sin(n-1)x) dx$$

$$= -\frac{1}{\pi} \frac{1 + (-1)^n}{n^2 - 1} = \begin{cases} 0 & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ -\frac{2}{\pi} \frac{1}{n^2 - 1} & (n = 2, 4, \dots) \end{cases}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \sin nx dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} (\cos(n-1)x - \cos(n+1)x) dx$$

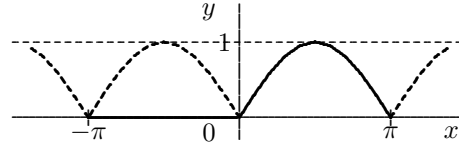
$$= \begin{cases} \frac{1}{2} & (n=1) \\ 0 & (n=2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \dots \right)$$

$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx$$

5 $0 \leq x \leq \pi$ で定義された正弦波の余弦展開

$$f(x) = \sin x \quad (0 \leq x \leq \pi)$$



これは、前問の $f(x)$ を用いて $f(x) + f(-x) \rightarrow f(x)$ によって求めることができる。したがって

$$f(x) = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \left(\frac{\cos 2x}{2^2-1} + \frac{\cos 4x}{4^2-1} + \dots \right)$$

$$= \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} \cos 2kx$$

パーセバルの等式を適用してみよう。 $\frac{1}{2}a_0 = \frac{2}{\pi}$ に注意して

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\sin x)^2 dx = \frac{1}{2} \left(\frac{4}{\pi} \right)^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{4}{\pi} \times \frac{1}{4n^2-1} \right)^2$$

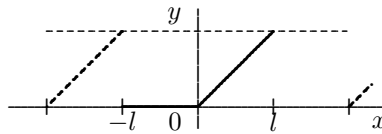
$$1 = \frac{8}{\pi^2} + \frac{16}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2-1} \right)^2$$

これより、級数の和

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4n^2-1} \right)^2 = \frac{\pi^2-8}{16}$$

6 周期 $2l$ の一部 1 次関数

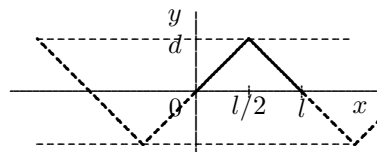
$$f(x) = \begin{cases} 0 & (-l \leq x \leq 0) \\ x & (0 \leq x \leq l) \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{l}{4} - \frac{2l}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k-1)^2} \cos \frac{(2k-1)\pi}{l} x + \frac{l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{(n-1)}}{n} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

7 $0 < x < l$ で定義された関数のフーリエ正弦展開

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2d}{l} x & (0 \leq x \leq l/2) \\ \frac{2d}{l} (l-x) & (l/2 < x < l) \end{cases}$$



$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x$$

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{2d}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx + \frac{2}{l} \int_{l/2}^l \frac{2d}{l} (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx$$

$l-x=y$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{2}{l} \int_{l/2}^l \frac{2d}{l} (l-x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx &= \frac{2}{l} \int_{l/2}^0 \frac{2d}{l} y \sin \frac{n\pi}{l} (l-y) (-dy) \\ &= \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{2d}{l} y \sin (n\pi - \frac{n\pi}{l} y) dy = (-1)^{n+1} \frac{2}{l} \int_0^{l/2} \frac{2d}{l} y \sin \frac{n\pi}{l} y dy \end{aligned}$$

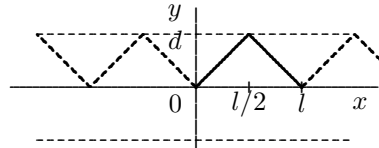
より

$$b_n = \begin{cases} \frac{4}{l} \int_0^{l/2} \frac{2d}{l} x \sin \frac{n\pi}{l} x dx & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} = \begin{cases} \frac{8d}{n^2 \pi^2} \sin \frac{n\pi}{2} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases}$$

$$f(x) = \frac{8d}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \sin \frac{\pi}{l} x - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} x + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{l} x - \dots \right]$$

8 $0 < x < l$ で定義された関数のフーリエ余弦展開

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2d}{l} x & (0 \leq x \leq l/2) \\ \frac{2d}{l} (l-x) & (l/2 < x < l) \end{cases}$$



これは $0 < x < l/2$ では元の関数と同じで周期 l の周期関数と見なしたものと同一になる。したがって

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l/2} x$$

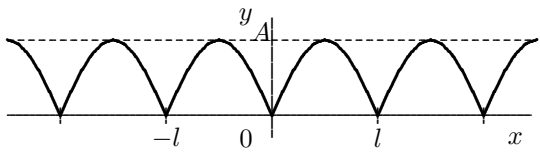
と余弦展開できる。

$$a_0 = \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} \frac{2d}{l} x dx = d$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l/2} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l/2} x dx = \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} \frac{2d}{l} x \cos \frac{n\pi}{l/2} x dx + \frac{2}{l/2} \int_{l/2}^l \frac{2d}{l} (l-x) \cos \frac{n\pi}{l/2} x dx \\ &= \frac{2d}{(n\pi)^2} (\cos n\pi - 1) \\ &= \begin{cases} -\frac{4d}{n^2 \pi^2} & (n = 1, 3, 5, \dots) \\ 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \end{cases} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{d}{2} - \frac{4d}{\pi^2} \left[\frac{1}{1^2} \cos \frac{2\pi}{l} x + \frac{1}{3^2} \cos \frac{6\pi}{l} x + \frac{1}{5^2} \cos \frac{10\pi}{l} x + \dots \right]$$

9 周期 l の全波整流

$$f(x) = \begin{cases} A \sin \frac{\pi}{l} x & (0 \leq x < l) \\ f(x+l) = f(x) \end{cases}$$


周期 l の偶関数となるから

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{2n\pi}{l}x$$

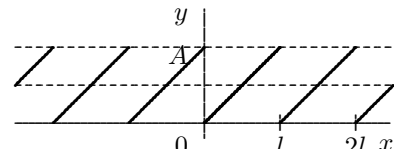
と展開できる。

$$a_0 = \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} f(x) dx = \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} A \sin \frac{\pi}{l} x dx = \frac{4A}{\pi}$$

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} f(x) \cos \frac{2n\pi}{l} x dx = \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} A \sin \frac{\pi}{l} x \cos \frac{2n\pi}{l} x dx \\ &= \frac{2A}{l} \int_0^{l/2} \left\{ \sin \frac{\pi}{l} (2n+1)x - \sin \frac{\pi}{l} (2n-1)x \right\} dx = -\frac{4A}{\pi} \cdot \frac{1}{(2n)^2 - 1} \end{aligned}$$

$$f(x) = \frac{2A}{\pi} - \frac{4A}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} \cos \frac{2n\pi}{l} x$$

10 鋸歯状波形

$$f(x) = \begin{cases} \frac{A}{l} x & (0 < x < l) \\ f(x+l) = f(x) \end{cases}$$


$$f(x) = \frac{A}{2} + g(x), \quad g(x) = -\frac{A}{2} + \frac{A}{l}x$$

とおくと, $g(x)$ は周期 l の奇関数となる。したがって

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l/2} x$$

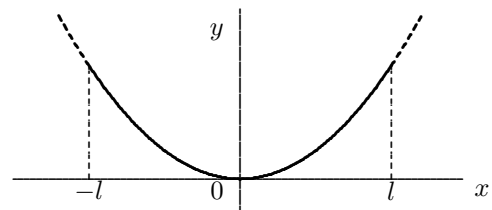
と展開できる。

$$b_n = \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} f(x) \sin \frac{n\pi}{l/2} x dx = \frac{2}{l/2} \int_0^{l/2} \left(-\frac{A}{2} + \frac{A}{l}x \right) \sin \frac{n\pi}{l/2} x dx = -\frac{A}{n\pi}$$

$$f(x) = \frac{A}{2} - \frac{A}{\pi} \left[\sin \frac{2\pi}{l} x + \frac{1}{2} \sin \frac{4\pi}{l} x + \frac{1}{3} \sin \frac{6\pi}{l} x + \dots \right]$$

11 原点近傍での 2 乗に比例する関数

$$f(x) = x^2 \quad (-l \leq x \leq l)$$



周期 $2l$ の余弦展開となるから

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos \frac{n\pi}{l}x$$

と展開できる。

$$a_0 = \frac{2}{l} \int_0^{l/2} f(x) dx = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 dx = \frac{2l^2}{3}$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \cos \frac{n\pi}{l}x dx = \frac{2}{l} \int_0^l x^2 \cos \frac{n\pi}{l}x dx$$

$$= \frac{2}{l} \left\{ \left[x^2 \cdot \frac{l \sin \frac{n\pi}{l}x}{n\pi} \right]_0^l - \int_0^l \frac{2lx}{n\pi} \sin \frac{n\pi}{l}x dx \right\} = -\frac{4}{n\pi} \int_0^l x \sin \frac{n\pi}{l}x dx = \frac{4l^2}{\pi^2 n^2} (-1)^n$$

$$f(x) = \frac{1}{3}l^2 + \frac{4l^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \cos \frac{n\pi}{l}x$$

$x = \frac{1}{2}\{x^2\}'$ を用いて,

$$\left. \begin{aligned} x \quad (-l < x \leq l) \\ f(x+2l) = f(x) \end{aligned} \right\} = \frac{2l}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} \sin \frac{n\pi}{l}x$$

を求めることもできる。

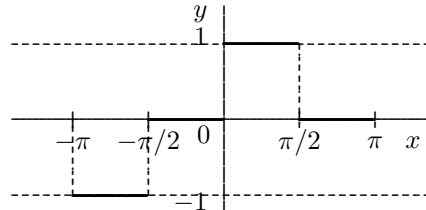
また $x = 0$ を代入して $1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{1}{5^2} - \dots = \frac{\pi^2}{12}$ が得られる。

またパーセバルの等式を適用すると $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}$ が得られる。

また余計なことであるが, これは $\frac{1}{1^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{5^4} + \dots = \frac{\pi^4}{96}$ から簡単に導ける。

12 区分的に一定の周期 2π の関数

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (-\pi < x \leq -\pi/2) \\ 0 & (-\pi/2 < x \leq 0) \\ 1 & (0 < x \leq \pi/2) \\ 0 & (\pi/2 < x \leq \pi) \end{cases}$$



$$f(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \{(-1)^{k-1} \cos(2k-1)x + \sin(2k-1)x\}$$

13 $-\pi < x \leq \pi$ で定義された関数の複素フーリエ級数

$$f(x) = e^x \quad (-\pi < x < \pi)$$

$$f(x) = \sum_{-\infty}^{\infty} c_n e^{inx}$$

とする。

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{(1-in)x} dx = \frac{1}{2\pi(1-in)} [e^{(1-in)x}]_{-\pi}^{\pi} \\ &= \frac{1+in}{2\pi(1+n^2)} (-1)^n (e^{\pi} - e^{-\pi}) \\ f(x) &= \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (-1)^n \frac{1+in}{1+n^2} e^{inx} \end{aligned}$$

$(1+in)e^{inx} + (1-in)e^{-inx} = 2(\cos nx - n \sin nx)$ を用いて, n 項と $-n$ 項をまとめて実数型に変形すると

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi} \left[\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos nx - n \sin nx) \right\} \right]$$

となる。

14 $f(x) = e^x$ ($0 < x < \pi$) の余弦展開

$$f(x) = \frac{e^{\pi} - 1}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{\pi}(-1)^n - 1}{1+n^2} \cos nx$$

15 $f(x) = e^x$ ($0 < x < \pi$) の正弦展開

$$f(x) = -\frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(e^{\pi}(-1)^n - 1)n}{1+n^2} \sin nx$$

16 $f(x) = \cos \mu x$ ($0 < x < \pi$) (μ は整数ではない) の余弦展開

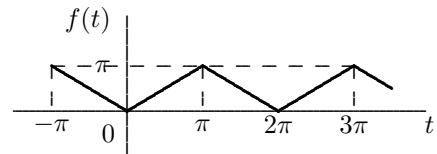
$$f(x) = \frac{2\mu \sin \mu\pi}{\pi} \left\{ \frac{1}{2\mu^2} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \cos nx}{n^2 - \mu^2} \right\}$$

1.1.4 常微分方程式への応用

周期的な非斉次項 $f(t)$ をふくむ常微分方程式

$$y''(t) + 4y(t) = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0 \quad (1.48)$$

を解いてみよう。



非斉次項は

$$f(t) = |t| (-\pi < t < \pi), \quad f(t) = f(t + 2\pi) \quad (1.49)$$

である。このフーリエ級数を求めておくと

$$f(t) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots \right) \quad (1.50)$$

同次方程式

$$y''(t) + 4y(t) = 0 \quad (1.51)$$

の一般解は

$$y_1 = A \sin 2t + B \cos 2t \quad (1.52)$$

である。また元の方程式（非斉次方程式）(1.48) の特解を

$$y_2 = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1,3,\dots} a_n \cos nt \quad (1.53)$$

とにおいて、(1.48) に代入すると

$$4 \times \frac{1}{2}a_0 + \sum_{n=1,3,\dots} (-n^2 a_n \cos nt + 4a_n \cos nt) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi}(\cos t + \frac{1}{3^2} \cos 3t + \frac{1}{5^2} \cos 5t + \dots)$$

各三角関数は独立として

$$a_0 = \frac{\pi}{4}, \quad a_n = \frac{4}{(n^2 - 4)n^2\pi}, \quad n = 1, 3, \dots$$

よって特解は

$$y_2 = \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4}{(n^2 - 4)n^2\pi} \cos nt \quad (1.54)$$

したがって元の方程式の一般解は

$$y = A \sin 2t + B \cos 2t + \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4}{(n^2 - 4)n^2\pi} \cos nt \quad (1.55)$$

となる。

初期条件より

$$\begin{aligned} y(0) = 0 &\rightarrow 0 = B + \frac{\pi}{8} + \sum \frac{4}{(n^2 - 4)n^2\pi} \\ y'(0) = 0 &\rightarrow 0 = 2A \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} y &= \left\{ -\frac{\pi}{8} - \sum \frac{4}{(n^2 - 4)n^2\pi} \right\} \cos 2t + \frac{\pi}{8} + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4}{(n^2 - 4)n^2\pi} \cos nt \\ &= \frac{\pi}{8}(1 - \cos 2t) + \sum_{n=1,3,\dots} \frac{4}{(n^2 - 4)n^2\pi} (\cos nt - \cos 2t) \end{aligned} \quad (1.56)$$

となる。

1.2 一般フーリエ級数

フーリエ級数を他の直交関数系を底にした級数に拡張したものを一般フーリエ級数という。偏微分方程式の境界値問題の解法に不可欠である。少しだけ触れておく。

1.2.1 Sturm-Liouville 型微分方程式

u に関する実数係数の同次型常微分方程式

$$\frac{d^2u}{dt^2} + f_1(t)\frac{du}{dt} + f_2(t)u = 0 \quad (1.57)$$

において

$$p(t) = e^{\int f_1(t)dt}, \quad q(t) = -f_2(t)e^{\int f_1(t)dt} \quad (1.58)$$

とおくと, Sturm-Liouville 型微分方程式

$$\frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{du}{dt} \right) - q(t)u = 0 \quad (1.59)$$

が得られる (もっと一般的な 2 階常微分方程式に対しては, 「有限積分変換」を通して, (1.59) に帰着できる)。微分演算子

$$L[u] = \frac{d}{dt} \left(p(t) \frac{du}{dt} \right) - q(t)u \quad (1.60)$$

を定義する。特定の境界条件にたいして

$$L[u] + \lambda \rho(t)u = 0, \quad (a \leq t \leq b) \quad (1.61)$$

を Sturm-Liouville 型固有値問題という。この時, λ を固有値, 解を固有値 λ に属する固有関数という。 $p(t), q(t), \rho(t)$ は実関数で $p(t) > 0, \rho(t) > 0$ (こうすることによって一般性は失われない) とする。(境界 a, b は少しの間曖昧にしておこう)。

境界条件は一般的に

$$\begin{cases} B_a[u] = p(a)u'(a) \sin \alpha - u(a) \cos \alpha = 0 \\ B_b[u] = p(b)u'(b) \sin \beta - u(b) \cos \beta = 0 \end{cases} \quad (1.62)$$

と表せる。 $\frac{d}{dt} \left(pu \frac{dv}{dt} \right) - quv = p \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + uL(v)$ を移行して

$$p \frac{du}{dt} \frac{dv}{dt} + quv = \frac{d}{dt} \left(pu \frac{dv}{dt} \right) - uL(v)$$

u, v を入れ替えて $p \frac{dv}{dt} \frac{du}{dt} + qvu = \frac{d}{dt} \left(pv \frac{du}{dt} \right) - vL(u)$

差をとり, 積分して

$$\int_a^b (vL(u) - uL(v))dt = \left[p(v \frac{du}{dt} - u \frac{dv}{dt}) \right]_a^b \quad (1.63)$$

u, v を境界条件 (1.62) を満たす方程式 (1.61) の解とすると, 右辺は 0 となる。 ϕ_m を固有値 λ_m に属する固有関数, $L(\phi_m) + \lambda_m \rho(t)\phi_m = 0$ とすると両辺の複素共役をとり $L(\overline{\phi_m}) + \overline{\lambda_m} \rho(t)\overline{\phi_m} = 0$ となり, $u = \overline{\phi_m}$ とおく。同様に $v = \phi_n$ を固有値 λ_n に属する固有関数とすると,

$$(\lambda_n - \overline{\lambda_m}) \int_a^b \rho(t)\phi_n(t)\overline{\phi_m(t)}dt = 0 \quad (1.64)$$

が得られる。 $m = n$ とすると直ちに固有値は実数であることがわかる。また

$$\int_a^b \rho(t)\phi_n(t)\overline{\phi_m(t)}dt = 0, \quad \lambda_m \neq \lambda_n \quad (1.65)$$

が得られる。そこで内積を

$$(u, v) = \int_a^b \rho(t)u(t)\overline{v(t)}dt \quad (1.66)$$

によって定義すると, 異なる固有値に属する固有関数は直交する, ことになる。

$$L(\phi_m) = -\lambda_m \rho(t)\phi_m$$

の両辺に $\overline{\phi_m(t)}$ をかけて積分すると,

$$\lambda_m(\phi_m, \phi_m) = - \int_a^b L(\phi_m) \overline{\phi_m(t)} dt = \int_a^b [p(t)|\phi'_m(t)|^2 + q(t)|\phi_m(t)|^2] dt - \left[p(t)\phi_m(t)\overline{\phi_m(t)} \right]_{t=a}^{t=b}$$

$q(t) \geq 0$ で, さらに,

$$\left[p(t)\phi_m(t)\overline{\phi_m(t)} \right]_{t=a}^{t=b} \leq 0 \quad (1.67)$$

とすると, 固有値は $\lambda_m \geq 0$ となる。

任意関数 $f(t)$ が正規化された直交系 $(\phi_k(t), k = 1, 2, \dots)$ で

$$f(t) \approx \sum_{k=1}^{\infty} a_k \phi_k(t) \quad (1.68)$$

と展開されたとすると,

$$a_k = \int_a^b \rho(t) f(t) \phi_k(t) dt \quad (k = 1, 2, \dots) \quad (1.69)$$

となる。次の定理が知られている。

- 1 Sturm-Liouville 型固有値問題は可算個の実数の固有値を持ち, これを $\lambda_1 < \lambda_2 < \dots$ と並べると, $\lambda_n \rightarrow +\infty (n \rightarrow \infty)$ 。
- 2 固有関数はヒルベルト空間の直交系をなし, 規格化によって, 完全正規直交系をつくる。
- 3 $[a, b]$ 上で 2 乗可積分な関数 $f(t)$ にたいして, 級数 (1.68) は $f(t)$ に平均収束する。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b \rho(t) \left[f(t) - \sum_{k=1}^n a_k \phi_k(t) \right]^2 dt = 0 \quad (1.70)$$

- 4 境界条件 (1.62) を満たし, $\int_a^b |f'(x)|^2 \rho(x) dx < +\infty$ の任意の関数 $f(t)$ は, 境界値問題 (1.61), (1.62) の固有関数によって, 一様収束する級数 (1.69) に展開される。

$(-l, l)$ で定義された関数 $f(x)$ に対する Fourier 級数

$$f(x) = \frac{1}{2} a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k \cos \frac{k\pi}{l} x + b_k \sin \frac{k\pi}{l} x \right)$$

は Sturm-Liouville の固有値問題

$$u'' + \lambda^2 u = 0, \quad u|_{x=-l} = u|_{x=l}$$

に対応する。

一般フーリエ級数は分野あるいは 2 階の方程式に応じて, それぞれ異なった特殊関数を底とする事になる。したがって, 応用のためには, それぞれの特殊関数についての知識が必要になる。また, 収束性や, 完全性については数学的にかなり高度な議論が必要であるが, 工学や物理学に関わる研究者や技術者の多くは, それらの厳密な議論には必ずしも関わらないで使うのが通例である。どうしても前提が怪しくなったり, 必要になったときに, あらためて学習しよう (?)。

1.2.2 ルジャンドルの多項式による展開

一般フーリエ級数の一番わかりやすい例として、ルジャンドルの多項式展開を考えよう。

$$(1-t^2)\frac{d^2y}{dt^2} - 2t\frac{dy}{dt} + \lambda y = 0 \quad \left(\frac{d}{dt}\left[(1-t^2)\frac{dy}{dt}\right] + \lambda y = 0\right) \quad (1.71)$$

を Legendre の方程式という。区間 $[-1, 1]$ で恒等的には 0 でない解で、特異点 $t = \pm 1$ で有界な解を求めよう。これは (1.61) で、 $p(t) = 1 - t^2, q(t) = 0, \rho(t) = 1, a = -1, b = 1$ に相当した固有値問題である。 $t = 1 - 2z$ とおくと (1.71) は

$$x(1-x)\frac{d^2y}{dz^2} + (1-2z)\frac{dy}{dz} + \lambda y = 0$$

となり、Gauss の微分方程式 (超幾何微分方程式)

$$z(1-z)\frac{d^2y}{dz^2} + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)z\}\frac{dy}{dz} - \alpha\beta y = 0$$

において、 $\alpha = n + 1, \beta = -n, \gamma = 1, \lambda = -\alpha\beta$ とおいたものである。特異点 $t = \pm 1$ で有界な解は n を整数として、 $\lambda = n(n + 1)$ の n 次の多項式の解が得られた (ラプラス変換と常微分方程式メモ 参照)。

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n, \quad \lambda = n(n + 1) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.72)$$

とし、これを Legendre の多項式と言った。(1.65) より、Legendre 多項式は直交系をなす。

$$\int_{-1}^1 P_n(t)P_m(t)dt = \begin{cases} 0 & (m \neq n) \\ \frac{2}{2n+1} & (m = n) \end{cases} \quad (1.73)$$

$P_n(t)$ は $P_n(-t) = (-1)^n P_n(t)$ の偶奇性を持っている。また

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} [(t+1)^n (t-1)^n]$$

に積の微分公式 (Leibniz の公式) を適用すると、

$$P_n(1) = 1$$

が得られる。

$$P_0(t) = 1, P_1(t) = t, P_2(t) = \frac{1}{2}(3t^2 - 1), P_3(t) = \frac{1}{2}(5t^3 - 3t), P_4(t) = \frac{1}{8}(35t^4 - 30t^2 + 3), P_5(t) = \frac{1}{8}(63t^5 - 70t^3 + 15t), \dots$$

いま、 $[-1, +1]$ で定義された任意の関数 $f(t)$ が Legendre の多項式による級数

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t) \quad (1.74)$$

に展開されたとすると、

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t)P_n(t)dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.75)$$

となる。Legendre の多項式が完全系をなすことは次のようにしてもわかる。

任意の n 次の多項式 $Q_n(t)$ は n 次までの Legendre の多項式の 1 次結合で表せる。

$$Q_n(t) = \sum_{k=0}^n C_k P_k(t)$$

「Weierstrass の多項式近似定理」によって、区間 $[-1, 1]$ の勝手な連続関数は多項式 $Q_n(t)$ によっていくらでも正確に一様に近似できる。従って任意の $\epsilon > 0$ に対して、適当に N が選べて、

$$|f(t) - \sum_{k=0}^N C_k P_k(t)| < \frac{\sqrt{\epsilon}}{2}$$

とできる。これより

$$\int_{-1}^1 [f(t) - \sum_{k=0}^N C_k P_k(t)]^2 dt < \epsilon$$

ところが、任意の連続な $f(t)$ にたいして、フーリエ係数 $(a_k, k = 0, 1, 2, \dots)$ は残差平方和 E_N を最小にする。(フーリエ級数の項を参照)

$$E_n = \int_{-1}^1 [f(t) - \sum_{k=0}^N C_k P_k(t)]^2 dt$$

したがって

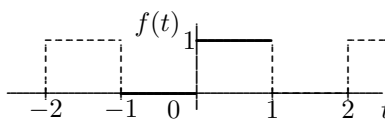
$$\int_{-1}^1 [f(t) - \sum_{k=0}^N a_k P_k(t)]^2 dt < \epsilon$$

よって Legendre 多項式によって一様に近似できる。

Legendre 多項式 $P_n(t)$ は $[-1, 1]$ での重み関数 $\rho(t) = 1$ に対する直交多項式である。 $[-1, 1]$ で定義された $m \leq 2n - 1$ 次元の多項式の $[-1, 1]$ での積分は n 次の Legendre 多項式の零点での値によって厳密に表すことができる。この性質はガウス型数値積分法に活かされる(数値計算メモ参照)。Legendre 多項式と同じような扱いができる関数を表にしておく。

直交多項式	区間	重み	微分方程式 (固有値 λ)	λ	固有関数
Legendre	$[-1, 1]$	1	$(1 - t^2)y'' - 2ty' + \lambda y = 0$	$n(n+1)$	$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$
Chebyshev	$[-1, 1]$	$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(1 - t^2)y'' - ty' + \lambda y = 0$	n^2	$T_n(t) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \cos^{-1} t)$
Laguerre	$[0, \infty)$	e^{-x}	$ty'' + (1 - t)y' + \lambda y = 0$	n	$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} (t^n e^{-t})$
Hermite	$(-\infty, \infty)$	e^{-x^2}	$y'' - 2ty' + \lambda y = 0$	$2n$	$H_n(t) = (-1)^n e^{t^2} \frac{d^n}{dt^n} (e^{-t^2})$

一つだけ簡単な例を考える。フーリエ級数で議論したと全く同じ関数である(ただし、フーリエ級数では $-\pi < t \leq \pi$ を考えていた)。

$$g(x) = \begin{cases} 0 & (-1 < t < 0) \\ 1 & (0 \leq t \leq 1) \end{cases}$$


はじめに、図では、 $t < -1, t > 1$ でも破線でグラフを描いているが、Legendre 多項式は $-1 \leq t \leq 1$ のみ定義されており、フーリエ級数の場合のように、級数が周期 2 の関数に拡張する働きはない。従って意味のある変域は $-1 \leq t \leq 1$ のみである。

$$a_n = \frac{2n+1}{2} \int_{-1}^1 f(t) P_n(t) dt = \frac{2n+1}{2} \int_0^1 P_n(t) dt$$

$n = 0$ のときは $a_n = \frac{1}{2}$ である。

$P_n(t)$ は $(-1)^n$ の偶奇性を持っており、 k を正の整数として、 $n = 2k$ では 1 との直交性を考慮すると、上

の積分は0となる。

$n = 2k + 1$ のときは

$$a_{2k+1} = \frac{2(2k+1)+1}{2} \frac{1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \int_0^1 \frac{d^{2k+1}}{dt^{2k+1}} (t^2-1)^{2k+1} dt = \frac{2(2k+1)+1}{2 \cdot 2^{2k+1}(2k+1)!} \left[\frac{d^{2k}}{dt^{2k}} (t^2-1)^{2k+1} \right]_0^1$$

右辺では因数 (t^2-1) が残り、 $t=1$ での値は0である。 $t=0$ のときは、 $((t^2-1)^{2k+1})$ を2項展開をして、 t の $2k$ 次の項のみが残るから、

$$a_n = \frac{2(2k+1)+1}{2} \frac{-1}{2^{2k+1}(2k+1)!} \times (-1)^{k+1} \times \frac{(2k+1)!(2k)!}{k!(k+1)!} = (-1)^k \frac{(4k+3)(2k)!}{2^{2(k+1)}(k+1)!k!}$$

よって

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(t) = \frac{1}{2} + \frac{3}{2^2} P_1(t) - \frac{7 \cdot 2!}{2^4 \cdot 2! \cdot 1!} P_3(t) + \frac{11 \cdot 4!}{2^6 \cdot 3! \cdot 2!} P_5(t) - \dots$$

1.2.3 Bessel 関数による展開

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dy}{dt} + \left(1 - \frac{\nu^2}{t^2}\right) y = 0 \quad (1.76)$$

をベッセルの微分方程式という。原点で正則な解をベッセル関数といい、

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu+k+1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (1.77)$$

となる。ベッセルの微分方程式で $t = kx$ として、 x を独立変数にすると

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + \frac{1}{x} \frac{dy}{dx} + \left(k^2 - \frac{\nu^2}{x^2}\right) y = 0 \quad (1.78)$$

となるが、

$$\frac{d}{dx} \left(x \frac{dy}{dx} \right) + \left(k^2 x - \frac{\nu^2}{x} \right) y = 0 \quad (1.79)$$

とも書け、 $p(x) = x, q(x) = \frac{\nu^2}{x}, \rho(x) = x, \lambda = k^2, a = 0, (b$ は後で決める) の Sturm-Liouville 型固有値問題である。(1.79) の原点で正則な解は $y = J_\nu(kx)$ となる。 $J_\nu(kx)$ には次の性質がある。

1 $\nu > -1$ ならば、 $J_\nu(x)$ は非実の複素数の零点を持たず、無限個の実数の零点を持っている。

零点は正、負の対で現れるから、全て正のみを扱う。 $J_\nu(\mu_i) = 0, \mu_i > 0 \quad i = 1, 2, \dots$

したがって、境界条件 $y(l) = 0$ に対する、固有値問題の解は

$$J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right), \quad J_\nu(\mu_i) = 0, \quad k_i = \frac{\mu_i}{l}, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$$

となる。

2 直交性と正規化

$$\int_0^l x J_\nu\left(\mu_i \frac{x}{l}\right) J_\nu\left(\mu_j \frac{x}{l}\right) dx = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ \frac{l^2}{2} J_\nu^2(\mu_i) = \frac{l^2}{2} J_{\nu+1}^2(\mu_i) & (j = i) \end{cases} \quad (\nu > -1) \quad (1.80)$$

3 [0, l] で定義された関数 $f(t)$ を

$$f(t) = \sum_{i=1}^{\infty} a_i J_{\nu}(\mu_i \frac{t}{l}) \quad (\nu > -1) \quad (1.81)$$

$$a_i = \frac{2}{l^2 J_{\nu+1}^2(\mu_i)} \int_0^l af(t) J_{\nu}(\mu_i \frac{t}{l}) dt \quad (1.82)$$

と展開することを, $f(t)$ の Fourier-Bessel 級数展開という。

例は円形領域での 2 次元波動方程式のところを参照。

また, もっと一般の $t = kx = kl$ にたいする境界条件

$$\alpha J_{\nu}(t) + \beta t J_{\nu}'(t) = 0 \quad (\nu > -1) \quad (1.83)$$

にたいして, 次のことが言える。

1 (1.83) の解は, $\alpha/\beta + \nu \geq 0$ ならば, 全て実数であり, その正の解を μ_i とする。
従って固有値問題の解は

$$J_{\nu}(\mu_i \frac{x}{l}), \quad \alpha J_{\nu}(\mu_i) + \beta \mu_i J_{\nu}'(\mu_i) = 0, \quad 0 < \mu_1 < \mu_2 < \dots$$

2 直交性と正規化

$$\int_0^l x J_{\nu}(\mu_i \frac{x}{l}) J_{\nu}(\mu_j \frac{x}{l}) dx = \begin{cases} 0 & (j \neq i) \\ \frac{l^2}{2} (1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 \nu^2}{\beta^2 \mu_i^2}) J_{\nu}^2(\mu_i) & (j = i) \end{cases} \quad (\nu > -1) \quad (1.84)$$

3 [0, l] で定義された関数 $f(x)$ に対して, 級数展開

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} b_i J_{\nu}(\mu_i \frac{x}{l}) \quad (1.85)$$

$$b_i = \frac{2}{l^2 (1 + \frac{\alpha^2 - \beta^2 \nu^2}{\beta^2 \mu_i^2}) J_{\nu}^2(\mu_i)} \int_0^l x f(x) J_{\nu}(\mu_i \frac{x}{l}) dx \quad (1.86)$$

を Deni-Bessel 級数展開という。

1.2.4 球関数による展開

球面座標 (θ, ϕ) , $-\pi \leq \theta \leq \pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ の方程式

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + p(p+1)Y = 0 \quad (1.87)$$

を解いてみよう。 $Y(\theta, \phi)$ の形を求めるため, 変数分離して,

$$Y(\theta, \phi) = \Theta(\theta)\Phi(\phi) \quad (1.88)$$

とおいて, 分離定数を m^2 とすると

$$\frac{d^2 \Phi}{d\phi^2} + m^2 \Phi = 0 \quad (1.89)$$

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{d}{d\theta} (\sin \theta \frac{d\Theta}{d\theta}) + \left\{ p(p+1) - \frac{m^2}{\sin^2 \theta} \right\} \Theta = 0 \quad (1.90)$$

Φ が一価の関数であるためには $\Phi(\phi + 2\pi) = \Phi(\phi)$ であり, (1.89) の解は m が (正の) 整数となる。(1.90) は, $\mu = \cos \theta$ とおくと,

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{d\Theta}{d\mu} \right\} + \left\{ p(p+1) - \frac{m^2}{1 - \mu^2} \right\} \Theta = 0 \quad (1.91)$$

これは, Legendre の陪関数の方程式とよばれている。 $p = l$ として $p(p+1) = l(l+1)$, $p = -(l+1)$ としても $p(p+1) = l(l+1)$ だから, (1.91) で $p = l \geq 0$ とする。 $\Theta(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} y$ とおくと,

$$(1 - \mu^2) \frac{d^2 y}{d\mu^2} - 2(m+1)\mu \frac{dy}{d\mu} + (l-m)(l+m+1)y = 0 \quad (1.92)$$

y は確定特異点 $\mu = \pm 1$ で有界である, という条件で解を求める。これが固有値問題の境界条件を設定している。これは方程式 (1.92) を超幾何方程式に変換したとき, $\mu = \pm 1$ のとき超幾何級数が収束するという条件となり, 級数が有限項で終わる条件となり, 結局 l が整数となる。さらに $m = 0$ のとき, (1.92) は

$$\frac{d}{d\mu} \left\{ (1 - \mu^2) \frac{dP_l}{d\mu} \right\} + l(l+1)P_l = 0 \quad (1.93)$$

すなわち, Legendre の方程式 (1.71) となり, 解 $P_l(\mu)$ は Legendre の多項式である。(1.93) を μ で m 回微分して,

$$(1 - \mu^2) \frac{d^{m+2} P_l}{d\mu^{m+2}} - 2(m+1)\mu \frac{d^{m+1} P_l}{d\mu^{m+1}} + (l-m)(l+m+1) \frac{d^m P_l}{d\mu^m} = 0$$

これと (1.92) を比較して, 結局 (1.91) の特解は

$$P_l^m(\mu) = (1 - \mu^2)^{m/2} \frac{d^m P_l}{d\mu^m} \quad (1.94)$$

あるいは,

$$P_l^m(\cos \theta) = \sin^m \theta \frac{d^m}{d(\cos \theta)^m} P_l(\cos \theta) \quad (m = 0, 1, 2, \dots, l) \quad (1.95)$$

となる。Legendre の陪関数は $\sin^m \theta$ を別にすると, $\cos \theta$ の多項式である。結局,

$$\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} + \lambda Y = 0 \quad (1.96)$$

の変数分離解が $Y = P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi, P_l^m(\sin \theta) \cos m\phi, \lambda = l(l+1)$ となった。(1.96) の l 次の解を $Y_l(\theta, \phi)$ で表し, l 次の球面 (調和) 関数という。

$2l+1$ 個の l 次の球面関数 $P_l(\theta), P_l^m(\theta) \cos m\phi, P_l^m(\theta) \sin m\phi, (m = 0, 1, 2, \dots, l), (l = 1, 2, \dots)$ は, 異なる m にたいしては三角関数 $1, \cos m\phi, \sin m\phi, m = 1, 2, \dots$ の直交性から, 同じ m でも異なる l に対しては $P_l^m(\theta)$ が固有値問題 (1.91) の $p = l$ の解であることから直交し, 直交関数系をなす。半径 1 の球面を Σ とすると

$$\iint_{\Sigma} [P_l(\cos \theta)]^2 dS = \frac{4\pi}{2l+1} \quad (1.97)$$

$$\iint_{\Sigma} [P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi]^2 dS = \iint_{\Sigma} [P_l^m(\cos \theta) \sin m\phi]^2 dS = \frac{2\pi(l+m)!}{(2l+1)(l-m)!} \quad (1.98)$$

となる。よって, l 次の球面関数 $Y_l(\theta, \phi)$ は

$$Y_l(\theta, \phi) = a_0 P_l(\cos \theta) + \sum_{m=1}^n (a_m \cos m\phi + b_m \sin m\phi) P_l^m(\cos \theta) \quad (1.99)$$

となる。さらに、球面上 Σ で一階偏導関数も含めて連続な関数 $f(\theta, \phi)$ は

$$f(\theta, \phi) = a_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_0 P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k (a_{mk} \cos m\phi + b_{mk} \sin m\phi) P_k^m(\cos \theta) \right] \quad (1.100)$$

と展開できる。

$$\begin{aligned} a_{0k} &= \frac{2k+1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(\theta', \phi') P_k(\cos \theta') dS \\ a_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \iint_{\Sigma} f(\theta', \phi') P_k^m(\cos \theta') \cos m\phi' dS \\ b_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \iint_{\Sigma} f(\theta', \phi') P_k^m(\cos \theta') \sin m\phi' dS \end{aligned} \quad (1.101)$$

1.3 フーリエ変換

1.3.1 フーリエ積分まとめ

一般区間 $(-l, l)$ で定義された関数に対するフーリエ級数 (1.4) を $(-\infty, \infty)$ に拡張しよう。いま $f(x)$ を絶対積分可能

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < M \quad (1.102)$$

とする。

$$\frac{k\pi}{l} = \omega_k, \quad \omega_{k+1} - \omega_k = \frac{\pi}{l} = \Delta\omega$$

とおくと

$$f(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \{A(\omega_k) \cos \omega_k x + B(\omega_k) \sin \omega_k x\} \Delta\omega$$

$$A(\omega_k) = \frac{l}{\pi} a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \cos \omega_k x dx, \quad B(\omega_k) = \frac{l}{\pi} b_k = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l f(x) \sin \omega_k x dx$$

また

$$a_0 \leq \frac{1}{l} \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx < \frac{M}{l}$$

したがって、 $l \rightarrow \infty$ で

フーリエ積分

$$f(x) = \int_0^{\infty} \{A(\omega) \cos \omega x + B(\omega) \sin \omega x\} d\omega \quad (1.103)$$

$$A(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi, \quad B(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi$$

特に $f(x)$ が偶関数 ($f(-x) = f(x)$) のとき

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega, \quad A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi \quad (1.104)$$

$f(x)$ が奇関数 ($f(-x) = -f(x)$) のとき

$$f(x) = \int_0^{\infty} B(\omega) \sin \omega x d\omega, \quad B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi \quad (1.105)$$

まとめると

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi \quad (1.106)$$

となる。cos は ω の偶関数だから $\cos \omega(\xi - x)$ としても同じである。cos $x = (e^{ix} + e^{-ix})/2$ を用いると、(1.106) から

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{i\omega(x-\xi)} d\xi \quad (1.107)$$

となる。(1.103) または (1.106), (1.107) をフーリエ積分 (Fourier integral) という。

1.3.2 フーリエ積分の収束定理

フーリエ積分の収束はフーリエ級数と同じように議論できる。(1.106) について

フーリエ重積分定理

$f(x)$ を絶対積分可能で, x の近傍で有界変動の関数のとき,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_0^R d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi = \frac{1}{2} [f(x+0) + f(x-0)] \quad (1.108)$$

が成立する。

$$\begin{aligned} s_R(f, x) &= \frac{1}{\pi} \int_0^R d\omega \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \omega(x - \xi) d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) d\xi \int_0^R \cos \omega(x - \xi) d\omega \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \frac{\sin R(x - \xi)}{x - \xi} d\xi = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x + \xi) \frac{\sin R\xi}{\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} [f(x + \xi) + f(x - \xi)] \frac{\sin R\xi}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

$f(x)$ を $[x - \delta, x + \delta]$ で有界変動とすると, $\phi(\xi) = \frac{1}{2} [f(x + \xi) + f(x - \xi)]$ として

$$s_R(f, x) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\delta} \phi(\xi) \frac{\sin R\xi}{\xi} d\xi + \frac{2}{\pi} \int_{\delta}^{\infty} \phi(\xi) \frac{\sin R\xi}{\xi} d\xi$$

右辺第2項は, Riemann-Lebesgue の補題より, $R \rightarrow \infty$ で0に収束する。第1項も $R \rightarrow \infty$ で, (1.44) の証明と同じで $\phi(+0)$ に収束する。

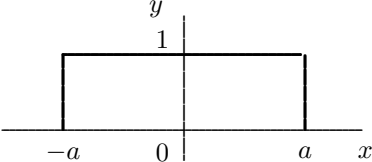
この定理もフーリエ級数の収束条件と同様「有界変動」の条件は, 「区分的に滑らか」の条件で置き換えて用いることが出来る。

1.3.3 フーリエ積分の例

フーリエ積分は, 後で出てくるフーリエ変換の枠組みの中で議論した方がスッキリするから, 以下ではごく少数例のみを取り上げる。また不連続点での表現を省略するときもある。

1

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$



The graph shows a rectangular pulse function f(x) on a coordinate system. The horizontal axis is labeled x and the vertical axis is labeled y. The pulse has a constant height of 1 and extends from x = -a to x = a. The origin (0,0) is marked, and the points -a and a are also marked on the x-axis.

$f(x)$ は偶関数より,

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega\xi d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^a \cos \omega\xi d\xi = \frac{2}{\pi} \frac{\sin a\omega}{\omega}$$

よって

$$f(x) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega \cos \omega x}{\omega} d\omega$$

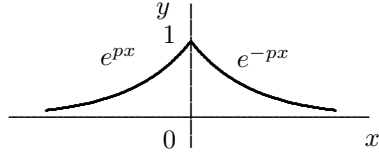
不連続点も考慮して、これより積分公式

$$\int_0^\infty \frac{\sin \omega a \cos \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (|x| < a) \\ \frac{\pi}{4} & (|x| = a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}, \quad \int_0^\infty \frac{\sin x \cos ax}{x} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & (|a| < 1) \\ \frac{\pi}{4} & (|a| = 1) \\ 0 & (|a| > 1) \end{cases}$$

特に $a = 0$ とすると、つぎの積分公式が得られる。

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \frac{\pi}{2}$$

2 $f_e(x) = e^{-p|x|} \quad (p > 0)$



これも偶関数だから

$$A(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_e(\xi) \cos \omega \xi d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-p\xi} \cos \omega \xi d\xi = \frac{2}{\pi} \frac{p}{p^2 + \omega^2}$$

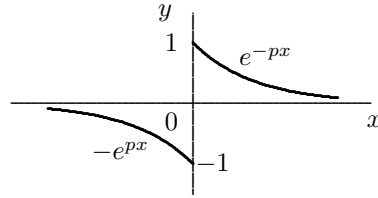
(ラプラス変換公式を思い出そう!)

$$f_e(x) = \int_0^\infty A(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{p^2 + \omega^2} d\omega$$

これより次の積分公式が得られる。

$$\int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\omega|} \quad (a > 0)$$

3 $f_o(x) = \begin{cases} e^{-px} & (x > 0) \\ -e^{px} & (x < 0) \end{cases}$



$f_o(x)$ は奇関数だから

$$B(\omega) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty f_o(\xi) \sin \omega \xi d\xi = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty e^{-p\xi} \sin \omega \xi d\xi = \frac{2}{\pi} \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

(またまた ラプラス変換公式を思い出そう!)

$$f_o(x) = \int_0^\infty B(\omega) \sin \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{p^2 + \omega^2} d\omega$$

(注) $f'_e(x) = \begin{cases} -pe^{-px} & (x > 0) \\ pe^{+px} & (x < 0) \end{cases} = -pf_o(x)$

より

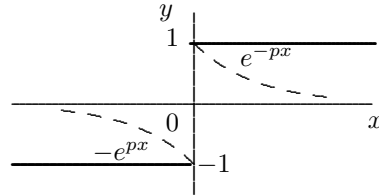
$$f_o(x) = -\frac{1}{p} f'_e(x) = -\frac{1}{p} \frac{d}{dx} \frac{2p}{\pi} \int_0^\infty \frac{\cos \omega x}{p^2 + \omega^2} d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\omega \sin \omega x}{p^2 + \omega^2} d\omega$$

また不連続点も考慮して次の積分公式が得られる。

$$\int_0^\infty \frac{x \sin \omega x}{x^2 + a^2} dx = \begin{cases} \frac{\pi}{2} e^{-a\omega} & (\omega > 0) \\ 0 & (\omega = 0) \\ -\frac{\pi}{2} e^{a\omega} & (\omega < 0) \end{cases}$$

4

$$f(x) = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$



これは前題の $f_o(x)$ で $p \rightarrow 0$ とすることによって得られる。

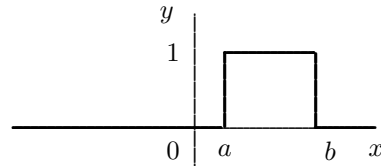
$$\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} -1 & (x < 0) \\ 0 & (x = 0) \\ 1 & (x > 0) \end{cases}$$

また単位関数 $U(x)$ 次のように表せる。

$$U(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega$$

5

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (a < x < b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases} = U(x-a) - U(x-b)$$



$$U(x-a) - U(x-b) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega(x-a) - \sin \omega(x-b)}{\omega} d\omega$$

$$U(x+a) - U(x-a) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \frac{\sin \omega a \cos \omega x}{\omega} d\omega$$

1.3.4 フーリエ変換まとめ

関数 $f(x)$ に対して, (1.107) を 2 段の形にして

フーリエ変換と反転公式

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi = \mathcal{F}\{f(x)\} \quad (\text{フーリエ変換}) \quad (1.109)$$

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} \quad (\text{フーリエ反転公式}) \quad (1.110)$$

となる。これらのフーリエ変換の収束性は (1.108) で保証される。

フーリエ変換の収束定理

$f(x)$ が絶対積分可能で, x の近傍で有界変動の関数のとき,

(1) $f(x)$ が連続な点 x では, $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = f(x)$

(2) $f(x)$ が不連続な点 x では, $\mathcal{F}^{-1}\{F(\omega)\} = \frac{1}{2}(f(x-0) + f(x+0))$

となる。

次の定理は積分の順序を交換して簡単に証明できる。

フーリエ変換の微分

- (1) $f(x), f'(x)$ のフーリエ変換が存在するとき

$$\mathcal{F}\{f'(x)\} = i\omega F(\omega)$$
 さらに $f''(x)$ のフーリエ変換が存在するとき

$$\mathcal{F}\{f''(x)\} = -\omega^2 F(\omega)$$
- (2) $xf(x)$ のフーリエ変換, および $F'(\omega)$ が存在するとき

$$F'(\omega) = \mathcal{F}\{-ixf(x)\}$$
 となる。

$f(x), g(x)$ のフーリエ変換を $F(\omega), G(\omega)$, $g(x), G(\omega)$ の複素共役を $g^*(x), G^*(\omega)$ とすると

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi}d\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g^*(\zeta)e^{+i\omega\zeta}d\zeta \right] d\omega \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{i\omega(\zeta-\xi)}d\xi \right) d\omega \right] g^*(\zeta)d\zeta \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\zeta)g^*(\zeta)d\zeta \end{aligned}$$

これはそれぞれの空間での内積を

$$(f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx, \quad (F, G) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega$$

で定義し, それぞれの空間でのノルムを $\|f\| = \sqrt{|(f, f)|}, \|F\| = \sqrt{|(F, F)|}$ で定義したとき, 変換の前後でノルムが変わらないことを意味する。

$$\|f\| = \|F\|$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)g^*(x)dx = \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)G^*(\omega)d\omega \tag{1.111}$$

とくに $f(x) = g(x)$ のとき

パーセバルの等式

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} |F(\omega)|^2 d\omega \tag{1.112}$$

が成り立つ。

合成積 (たたみ込み) を

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - \xi)g(\xi)d\xi$$

で定義する（ラプラス変換で用いた合成積と定義が違うことに注意）。合成積 $f * g$ は他の合成積と同様 $f * g = g * f, (f * g) * h = f * (g * h), f * (g + h) = f * g + f * h$ などの性質がある。

$$\begin{aligned} F(\omega)G(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi} d\xi \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\zeta)e^{-i\omega\zeta} d\zeta \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(\zeta)e^{-i\omega(\xi+\zeta)} d\xi d\zeta \end{aligned}$$

$\xi + \zeta = x$ において、積分変数を (ξ, ζ) から (ξ, x) に変換する。

$$d\xi d\zeta = \begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial \xi} & \frac{\partial \xi}{\partial x} \\ \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} & \frac{\partial \zeta}{\partial x} \end{vmatrix} d\xi dx = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} d\xi dx = d\xi dx$$

だから

$$\begin{aligned} F(\omega)G(\omega) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi)e^{-i\omega x} d\xi dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\omega x} \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)g(x-\xi) d\xi \right] dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathcal{F}\{f * g\} \end{aligned}$$

合成積のフーリエ変換（合成積定理）

合成積（たたみ込み）を

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-\xi)g(\xi) d\xi \quad (1.113)$$

で定義すると

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi} \mathcal{F}\{f\} \mathcal{F}\{g\} \quad (1.114)$$

（フーリエ変換の定義によっては、係数 $\sqrt{2\pi}$ がつかない表現もあることに注意！）

フーリエ積分と同様に、 $f(x)$ が偶関数のとき、

$$\begin{aligned} C(\omega) \equiv F(\omega) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi} d\xi \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 f(\xi)e^{-i\omega\xi} d\xi + \int_0^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi} d\xi \right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} f(\xi)e^{i\omega\xi} d\xi + \int_0^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi} d\xi \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega\xi d\xi \end{aligned}$$

したがって $C(\omega)$ も偶関数 ($C(-\omega) = C(\omega)$) である。また反転公式は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega)e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 C(\omega)e^{i\omega x} d\omega + \int_0^{\infty} C(\omega)e^{i\omega x} d\omega \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(\omega) \cos \omega x d\omega \end{aligned}$$

同様に $f(x)$ が奇関数のとき，フーリエ変換を $S(\omega) = iF(\omega)$ とおくと

$$\begin{aligned} S(\omega) &\equiv iF(\omega) = i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \\ &= i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi + \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right\} = i \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_0^{\infty} f(-\eta) e^{i\omega\eta} d\eta + \int_0^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega\xi} d\xi \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \frac{e^{i\omega\xi} - e^{-i\omega\xi}}{2i} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \omega\xi d\xi \end{aligned}$$

となり $S(\omega)$ は奇関数 ($S(-\omega) = -S(\omega)$) となる。また反転公式は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \frac{S(\omega)}{i} e^{i\omega x} d\omega \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^0 \frac{S(\omega)}{i} e^{i\omega x} d\omega + \int_0^{\infty} \frac{S(\omega)}{i} e^{i\omega x} d\omega \right\} \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega x d\omega \end{aligned}$$

となる。

フーリエ余弦変換 $f(x)$ が偶関数 ($f(-x) = f(x)$) のとき

$$C(\omega) \equiv F(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega\xi d\xi, \quad (C(-\omega) = C(\omega)) \quad (1.115)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(\omega) \cos \omega x d\omega \quad (1.116)$$

フーリエ正弦変換 $f(x)$ が奇関数 ($f(-x) = -f(x)$) のとき

$$S(\omega) \equiv iF(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \omega\xi d\xi, \quad (S(-\omega) = -S(\omega)) \quad (1.117)$$

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega x d\omega \quad (1.118)$$

が成り立つ。フーリエ余弦変換，正弦変換はフーリエ余弦級数，正弦級数の場合と同じように， $(0, \infty)$ で定義された関数をそれぞれ偶関数，奇関数とみなしてフーリエ変換したものでもあり，関数の定義域の拡張にもなっている。収束の良さは原点での連続性に大きく支配される。

また，パーセバルの等式は次のように簡単になる。

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega \quad (f(x) \text{ が偶関数のとき}) \quad (1.119)$$

$$\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |S(\omega)|^2 d\omega \quad (f(x) \text{ が奇関数のとき}) \quad (1.120)$$

1.3.5 フーリエ変換の性質

応用上役立つフーリエ変換の性質をまとめておこう。

	関数	フーリエ変換	性質
1	$\lambda f(x) + \eta g(x)$	$\lambda F(\omega) + \eta G(\omega)$	線形性
2	$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) ^2 dx$	$\int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) ^2 d\omega$	パーセバルの法則
3	$f(x) * g(x)$	$\sqrt{2\pi} F(\omega) G(\omega)$	合成積定理
4	$f(\lambda x)$	$\frac{1}{ \lambda } F\left(\frac{\omega}{\lambda}\right)$	相似法則
5	$f(x - x_0)$	$F(\omega) e^{-i\omega x_0}$	座標上の移動
6	$f(x) e^{i\omega_0 x}$	$F(\omega - \omega_0)$	ω 軸上の移動
7	$\frac{d^n f(x)}{dx^n}$	$(i\omega)^n F(\omega)$	座標微分
8	$\int_{-\infty}^x f(\tau) d\tau$	$\frac{F(\omega)}{i\omega}$	座標積分
9	$(ix)^n f(x)$	$\frac{d^n F(\omega)}{d\omega^n}$	ω 微分
10	$f^*(x)$	$F^*(-\omega)$	複素共役

これらは、工学、特に、フーリエ変換にもとづくデータ処理に重要な役割を持つが、ここでは省略する。

1.3.6 超関数のフーリエ変換

通常のフーリエ積分が収束しない場合でも、超関数と見なすとフーリエ変換が可能な場合がある。超関数の扱いは「ラプラス変換と常微分方程式メモ」を参照下さい。厳密に扱いたいときは「物理数学の方法」L. シュワルツ著、吉田、渡辺訳、岩波書店 を参照して下さい。以下に一部の超関数のフーリエ変換を証明無しで記します。

	$f(t) = \mathcal{F}^{-1}[F(s)]$	$F(s) = \mathcal{F}[f(t)]$	参考
0	$\delta(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$	
1	$\delta(t - t_0)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-i\omega t_0}$	
2	1	$\sqrt{2\pi} \delta(\omega)$	
3	$e^{i\omega_0 t}$	$\sqrt{2\pi} \delta(\omega - \omega_0)$	
4	$\cos \omega_0 t$	$\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0))$	
5	$\sin \omega_0 t$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}} (\delta(\omega + \omega_0) - \delta(\omega - \omega_0))$	
6	$U(t)$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (\pi \delta(\omega) + \frac{1}{i\omega})$	
7	$\frac{d^n \delta(t)}{dt^n}$	$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} (i\omega)^n$	
8	t^n	$\sqrt{2\pi} i^n \frac{d^n \delta(\omega)}{d\omega^n}$	
9	$ t $	$-\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{\omega^2}$	
10	$tU(t)$	$i\sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{\delta(\omega)}{\omega} - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{1}{\omega^2}$	
11	$s_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(t - nT)$	$s_{\omega_0}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - n\omega_0), \omega_0 = \frac{2\pi}{T}$	

ただし $U(t) = 0(t \leq 0), 1(t > 0)$ はヘビサイドの単位関数

$xT = 0$ を満たす超関数 T は, $T = C\delta(x)$ である (ラプラス変換と常微分方程式メモ 参照)。同様に $(x - \alpha)(x - \beta)T = 0$ を満たす超関数は $T = a\delta(x - \alpha) + b\delta(x - \beta)$ となる。これらを用いて常微分方程式をラプラス変換の場合と似た手続きで解くこともできる。

$$\frac{d^2 y(t)}{dt^2} - 4 \frac{dy(t)}{dt} + 3y(t) = \sin t, \quad y(0) = 0, \quad \frac{dy(0)}{dt} = 0$$

両辺をフーリエ変換して,

$$Y(\omega)((i\omega)^2 - 4i\omega + 3) = i\sqrt{\frac{\pi}{2}}(\delta(\omega + 1) - \delta(\omega - 1))$$

$$Y(\omega)(\omega + i)(\omega + 3i) = -i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega + 1) + i\sqrt{\frac{\pi}{2}}\delta(\omega - 1)$$

$F(\omega)\delta(\omega) = F(0)\delta(\omega)$ を用いて

$$Y(\omega) = a\delta(\omega + i) + b\delta(\omega + 3i) + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 - i)\delta(\omega + 1)}{10} + \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 + i)\delta(\omega - 1)}{10}$$

逆変換して,

$$y(x) = ae^t + be^{3t} + \frac{(2 - i)e^{-it}}{20} + \frac{(2 + i)e^{it}}{20} = ae^t + be^{3t} + \frac{1}{5} \cos t + \frac{1}{10} \sin t$$

初期条件 $y(0) = 0, \frac{dy(0)}{dx} = 0$ より

$$a = \frac{1}{20}, b = \frac{1}{4}$$

したがって

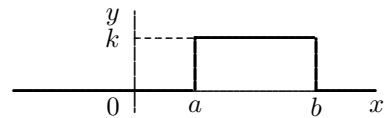
$$y(x) = -\frac{1}{4}e^t + \frac{1}{20}e^{3t} + \frac{1}{5} \cos t + \frac{1}{10} \sin t$$

となる。定数係数の常微分方程式は, ラプラス変換で簡潔に解けるから, これ以上立ち入らない。

1.3.7 フーリエ変換の例

すでに述べたフーリエ積分の応用もフーリエ変換の枠組みの中で, 統一的に理解しておいた方が整理しやすい。フーリエ変換は数学の基礎的な分野で重要な位置を占めるというだけでなく, あらゆる分野で広汎な応用があります。以下には公式に慣れることを主眼においた計算例をいくつか示すに過ぎません。データ処理分野についてはFFTの項を見てください。

$$\boxed{1} \quad f(x) = \begin{cases} k & (a < x < b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases}, \quad (a < b)$$



$$\begin{aligned} F(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-i\omega\xi} d\xi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_a^b ke^{-i\omega\xi} d\xi \\ &= \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-i\omega b} - e^{-i\omega a}}{-i\omega} \right) = \frac{k(e^{-i\omega a} - e^{-i\omega b})}{i\omega\sqrt{2\pi}} \end{aligned}$$

反転公式によって

$$\begin{aligned}
 f(x) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{e^{-iaw} - e^{-ibw}}{i\omega} \right) e^{i\omega x} d\omega \\
 &= \frac{k}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{\cos(x-a)\omega - \cos(x-b)\omega}{i\omega} + \frac{\sin(x-a)\omega - \sin(x-b)\omega}{\omega} \right) d\omega \\
 &= \frac{k}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin(x-a)\omega - \sin(x-b)\omega}{\omega} d\omega = \begin{cases} 0 & (x < a) \\ \frac{k}{2} & (x = a) \\ k & (a < x < b) \\ \frac{k}{2} & (x = b) \\ 0 & (b < x) \end{cases}
 \end{aligned}$$

$x = 0, a$ で $f(x)$ は不連続であり, 最後の積分はフーリエ積分で求めた $\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin \omega x}{\omega} d\omega = -1(x < 0), 0(x = 0), 1(x > 0)$ を用いた結果であるが, 確かに, これは反転公式が示す不連続点での両極限の平均値と一致している。この例のように一般には, 実関数であってもフーリエ変換は複素数となる。

2 $f(x) = \begin{cases} e^{-x} \cos x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$

$$\begin{aligned}
 F(\omega) &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \cos \xi e^{-i\omega \xi} d\xi \\
 &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_0^{\infty} \frac{1}{2} \{ e^{-(1-i+i\omega)\xi} + e^{-(1+i+i\omega)\xi} \} d\xi = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\omega^2 + 2 - i\omega^3}{\omega^4 + 4}
 \end{aligned}$$

よって反転公式により

$$f(x) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\omega^2 + 2 - i\omega^3}{\omega^4 + 4} e^{i\omega x} d\omega = \begin{cases} e^{-x} \cos x & (x > 0) \\ \frac{1}{2} & (x = 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

$f(x)$ は原点 $x = 0$ で不連続であり, $x = 0$ では反転公式による $f(x)$ はギャップの平均値となることを考慮した。確かに $x = 0$ のときに対応して, 積分

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2 + 2}{x^4 + 4} dx = \frac{1}{2}$$

が成立する。

3 $f(x) = \begin{cases} e^{ipx} & (a < x < b) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$

$$F(\omega) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) e^{-i\omega \xi} d\xi = \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{e^{ia(p-\omega)} - e^{ib(p-\omega)}}{p-\omega}$$

$a = -b, b > 0$ のとき,

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin b(\omega - p)}{\omega - p}$$

フーリエ変換の対象をあたかも実関数に限定していたかのように思えるが, たとえそうであっても, 複素関数を実部, 虚部独立に変換したと考えればフーリエ変換の線形性から実関数に対する収束の議論は, 全く変更なく複素関数に適用できることがわかる。

4 すでにフーリエ積分のところで議論した偶関数

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| < a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

をフーリエ変換で考えてみる。フーリエ余弦変換より

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \cos \omega \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \cos \omega \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega}$$

したがって、フーリエ積分は反転公式より

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} C(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin a\omega \cos \omega x}{\omega} d\omega$$

パーセバルの等式 $\int_0^{\infty} |f(x)|^2 dx = \int_0^{\infty} |C(\omega)|^2 d\omega$ を適用すると

$$\int_0^a dx = \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\sin a\omega}{\omega} \right)^2 d\omega, \quad a = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\sin^2 a\omega}{\omega^2} d\omega$$

これより、積分公式

$$\int_0^{\infty} \frac{\sin^2 ax}{x^2} dx = \frac{\pi a}{2}$$

が得られる。フーリエ変換は多くの公式があるが、この例のように関数の対称性を活かした公式は手続きの大幅な簡略化を導く。

また

$$f_{\epsilon}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2\epsilon} & (|x| \leq \epsilon) \\ 0 & (|x| > \epsilon) \end{cases}$$

のフーリエ積分は

$$f_{\epsilon}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \epsilon\omega}{\epsilon\omega} e^{i\omega x} d\omega$$

となるが、 $\epsilon \rightarrow 0$ では $f_{\epsilon}(x) \rightarrow \delta(x)$ であり、形式的に

$$\delta(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \epsilon\omega}{\epsilon\omega} e^{i\omega x} d\omega \approx \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega x} d\omega \approx \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \cos \omega x d\omega$$

と表せることがわかる。これは超関数 $\delta(t)$ のフーリエ変換が

$$\mathcal{F}[\delta(t)] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \mathcal{F}^{-1}[1] = \sqrt{2\pi}\delta(t)$$

であることと合致している。

5 $f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x \leq a) \\ -1 & (-a \leq x \leq 0) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$
奇関数より

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} f(\xi) \sin \omega \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^a \sin \omega \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1 - \cos a\omega}{\omega}$$

したがってフーリエ積分は

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{(1 - \cos a\omega) \sin \omega x}{\omega} d\omega = \begin{cases} 1 & (0 < x < a) & , & -1 & (-a < x < 0) \\ 0 & (|x| > a, x = 0) \\ \frac{1}{2} & (x = a) & , & -\frac{1}{2} & (x = -a) \end{cases}$$

6 $f(x) = e^{-a|x|}$ ($a > 0$) のフーリエ変換を行おう。

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a\xi} \cos \omega \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2} \quad (\text{ラプラス変換の公式を用いよ})$$

したがってフーリエ積分は

$$e^{-a|x|} = \frac{2a}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega$$

となる。積分公式の形にしておくと

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\omega|}$$

またパーセバルの等式を適用すると

$$\int_0^{\infty} (e^{-a|x|})^2 dx = \int_0^{\infty} \left(\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{\omega^2 + a^2}\right)^2 d\omega, \quad \text{したがって} \quad \frac{1}{2a} = \frac{2a^2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{1}{(\omega^2 + a^2)^2} d\omega$$

これよりつぎの積分公式が得られる。

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{\pi}{4a^3}$$

同様に $f(x) = e^{-ax}$ ($a > 0$) のフーリエ正弦変換を行おう。

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-a\xi} \sin \omega \xi d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{\omega}{\omega^2 + a^2}$$

よって

$$e^{-ax} = \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\omega \sin \omega x}{\omega^2 + a^2} d\omega \quad (x > 0)$$

$x \rightarrow m$ ($m > 0$), $\omega \rightarrow x$ とおくと

$$\int_0^{\infty} \frac{x \sin mx}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-am} \quad (m > 0)$$

が得られる。

7 $f(x) = e^{-x}(\sin x + \cos x)$ のフーリエ余弦変換を行おう。

$$\begin{aligned} C(\omega) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-\xi} (\sin \xi + \cos \xi) \cos \omega \xi d\xi \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\xi} \{ \sin(1+\omega)\xi + \sin(1-\omega)\xi + \cos(1+\omega)\xi + \cos(1-\omega)\xi \} d\xi \\ &= \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{8}{\omega^4 + 4} \end{aligned}$$

したがってフーリエ積分は

$$f(x) = \frac{8}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^4 + 4} d\omega$$

すなわち

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{\omega^4 + 4} d\omega = \frac{\sqrt{2}\pi}{8} e^{-x} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$$

ここで $x \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}}\lambda$, $\omega \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{a}x$ と置き換えると積分公式

$$\int_0^\infty \frac{\cos \lambda x}{x^4 + a^4} dx = \frac{\pi}{2a^3} \exp\left(-\frac{\lambda a}{\sqrt{2}}\right) \sin\left(\frac{\lambda a}{\sqrt{2}} + \frac{\pi}{4}\right)$$

が得られる。

- 8 $f(x) = \frac{1}{x^2 + a^2}$ のフーリエ変換を行おう。

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos \omega \xi}{\xi^2 + a^2} d\xi = \frac{1}{a} \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-a|\omega|}$$

ここで $e^{-a|x|}$ のフーリエ余弦変換の結果を用いた。

- 9 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{|x|}}$ のフーリエ変換を行おう。

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{\cos \omega \xi}{\sqrt{|\xi|}} d\xi = 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \cos(\omega t^2) dt = \frac{1}{\sqrt{\omega}}$$

ここで, $\sqrt{\xi} = t$ とおいて, フレネルの積分 $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{2}}$ (ラプラス変換と常微分方程式メモ参照) を用いた。

- 10 $f(x) = \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)$ のフーリエ変換を行おう。

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{\xi^2}{2}\right) \cos \omega \xi d\xi = \exp\left(-\frac{\omega^2}{2}\right)$$

ここで Laplace の積分 $\int_0^\infty e^{-ax^2} \cos bx dx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$ ($b > 0$) (ラプラス変換と常微分方程式メモ参照) を用いた。

- 11 方程式 $\int_0^\infty f(\xi) \cos \omega \xi d\xi = \begin{cases} 1 - \omega & (0 \leq \omega \leq 1) \\ 0 & (\omega > 1) \end{cases}$ を解いてみよう。
解 $f(x)$ のフーリエ余弦変換を $C(\omega)$ とすると

$$C(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \cos \omega \xi d\xi = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}}(1 - \omega) & (0 \leq \omega \leq 1) \\ 0 & (\omega > 1) \end{cases}$$

反転公式で

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty C(\omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \int_0^1 (1 - \omega) \cos \omega x d\omega = \frac{2(1 - \cos x)}{\pi x^2}$$

- 12 方程式 $\int_0^\infty f(\xi) \sin \omega \xi d\xi = \begin{cases} 1 & (0 \leq \omega \leq 1) \\ 2 & (1 \leq \omega < 2) \\ 0 & (\omega \geq 2) \end{cases}$ を解いてみよう。
解 $f(x)$ のフーリエ正弦変換を $S(\omega)$ とすると

$$S(\omega) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f(\xi) \sin \omega \xi d\xi = \begin{cases} \sqrt{\frac{2}{\pi}} & (0 \leq \omega \leq 1) \\ 2\sqrt{\frac{2}{\pi}} & (1 \leq \omega < 2) \\ 0 & (\omega > 2) \end{cases}$$

反転公式で

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} S(\omega) \sin \omega x d\omega = \frac{2}{\pi} \left\{ \int_0^1 \sin \omega x d\omega + \int_1^2 2 \sin \omega x d\omega \right\} = \frac{2}{\pi x^2} (1 + \cos x - 2 \cos 2x)$$

13 積分方程式

$$y(x) = g(x) + \int_{-\infty}^{\infty} y(\xi) r(x - \xi) d\xi$$

を解いてみよう (FFT の応用のところで再度議論)。

$y(x), g(x), r(x)$ のフーリエ変換を $Y(\omega), G(\omega), R(\omega)$ とし, フーリエ変換の合成法則を用いて, 方程式の両辺をフーリエ変換すると

$$Y(\omega) = G(\omega) + \sqrt{2\pi} Y(\omega) R(\omega)$$

となる。これより

$$Y(\omega) = \frac{G(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi} R(\omega)}, \quad y(x) = \mathcal{F}^{-1} \left\{ \frac{G(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi} R(\omega)} \right\}$$

よって

$$y(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{G(\omega)}{1 - \sqrt{2\pi} R(\omega)} e^{i\omega x} d\omega$$

第2章 2次元偏微分方程式

ここでは授業で取り上げる話題の視覚化を主な目標に議論をすすめます。数学的詳細は授業で行います。

2.1 主な偏微分方程式

波動方程式（弾性波，音波，電磁波など）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.1)$$

熱伝導方程式（熱伝導，拡散など）

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) \quad (2.2)$$

Laplace の方程式（電荷がないときの静電場など）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0 \quad (2.3)$$

Poisson の方程式（熱的定常状態など）

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = f(x, y, z) \quad (2.4)$$

以下では主に，波動方程式，熱伝導方程式については空間を1次元に，ラプラスの方程式については空間を2次元の問題を対象としますが，一部，波動方程式は空間2次元で，ラプラス方程式では3次元で取り扱います。波動方程式の一般解については，「電磁気学メモ」も参照して下さい。

2.2 弦の横振動

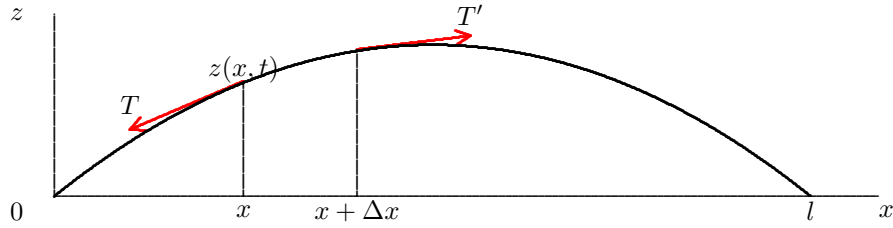
2.2.1 1次元波動方程式とフーリエの方法

長さ l ，線密度 ρ ，張力 T_0 の弦の平面内の運動を考える。弦の長さ方向に x 軸をとり振動方向に z 軸をとる。任意時間 t における位置 x での弦の変位を $z(x, t)$ とし，微小振動を仮定すると，次の波動方程式が得られる。

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad k = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (2.5)$$

この振動を支配する方程式に弦の弾性定数（バネ定数）が入らないことは注目すべきことである。弦の運動は定数 k を通してのみ弦の組成に依存する。

弦の横振動



(2.5) は次のように導かれる。

弦の線密度は $\rho(x)$ としておこう。弦に沿っての長さ座標を s とする。点 x における弦の張力を T , 点 $x + \Delta x$ における張力を T' とする。弦の微小区間 $[x, x + \Delta x]$ の運動方程式を考える。 x 軸方向の加速度は 0 と考えられるから $0 = T'_x - T_x$, したがって $T'_x = T_x = T_0$ (一定) となる。 z 軸方向の運動方程式は

$$\Delta m \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T'_z - T_z, \quad \Delta m = \rho(x) \Delta s \approx \rho \Delta x \quad \dots \text{微小振動}$$

$$T'_z = T_z(x + \Delta x, t) = T_z(x, t) + \frac{\partial T_z}{\partial x} \cdot \Delta x + O((\Delta x)^2), \quad T'_z - T_z = \frac{\partial T_z}{\partial x} \cdot \Delta x$$

$$T_z = T_0 \tan \theta = T_0 \frac{\partial z}{\partial x}, \quad T'_z - T_z = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_0 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \cdot \Delta x = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

したがって

$$\rho(x) \Delta x \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \cdot \Delta x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \frac{T_0}{\rho(x)} \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}$$

となる (図では模式的に有限振幅になっているが, 以下でも振幅は微小とする)。

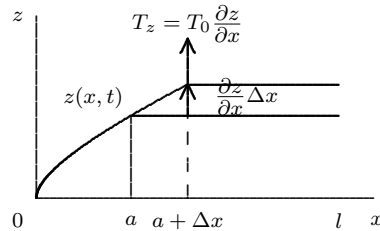
振動のエネルギーを求めておこう。

弦の点 x における幅 Δx の運動エネルギーは $\frac{1}{2} \rho \Delta x \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2$ となるから運動エネルギーの全体は

$$K = \int_0^l \frac{1}{2} \rho(x) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx$$

となる。つぎにポテンシャルエネルギーを求めてみる。点 x における張力の z 成分は $T_z = T_0 \frac{\partial z}{\partial x}$ である。

いま平衡状態の弦 $z(x) = 0$, ($0 \leq x \leq l$) が $z(x) = z(x, t)$, ($0 \leq x \leq a$), $z(x) = z(a, t)$, ($a \leq x \leq l$) まで変位しているとす。これを $z(x) = z(x, t)$, ($0 \leq x \leq a + \Delta x$), $z(x) = z(a + \Delta x, t)$, ($a \leq x \leq l$) まで変位させるとする。そのためには弦の点 $(a + \Delta x, z(a + \Delta x))$ に力を加え z 軸方向に $\frac{\partial z}{\partial x} \Delta x$ だけ引っ張ればよい。そのときの引っ張る力の z 成分は $(a + \Delta x, z(a + \Delta x))$ からの変位に比例し, $T_z = 0$ から $T_z = T_0 \frac{\partial z}{\partial x}$ に変わる。



よってこの作業に要する仕事は

$$(0 + T_0 \frac{\partial z}{\partial x}) / 2 \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \Delta x = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \Delta x$$

となる。したがって全体のポテンシャルエネルギーは

$$U = \int_0^l \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx$$

となる。よって振動のエネルギーは

$$E = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho(x) \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} dx \quad (2.6)$$

となる。

連続体に対する Lagrange の方程式

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{z}} \right) + \frac{d}{dx} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial z} = 0$$

を理解していると、この場合ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \mathcal{K} - \mathcal{U} = \frac{1}{2}\rho(x)\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}T_0\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2$$

となり、直ちに (2.5) が得られる。また、解析力学は (2.6) によって与えられる E が全エネルギーを与えることを教える。

全く同様に、断面積 S が一定の様な棒の長さ方向の振動の場合は、長さ方向には Hook の法則 ($F = Y\xi$, ξ : 単位長さ当たりの伸び, Y : 伸びの弾性率) の応力が働くとして、各部 x の変位を η とすると、ラグランジアン密度は

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\rho\left(\frac{\partial \eta}{\partial t}\right)^2 - \frac{1}{2}Y\left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2$$

となる。したがって弾性棒の縦振動の方程式は

$$\frac{\partial^2 \eta}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2}, \quad k = \sqrt{\frac{Y}{\rho}}, \quad \rho: \text{棒の密度}, Y: \text{伸びの弾性率}$$

となる。

また、弦の横振動で、空気抵抗などの速度に比例した抵抗

$$\int_0^l -2k_0 \frac{\partial z}{\partial t} dx$$

また、重力などの外力

$$\int_0^l p(x, t) dx$$

が作用するときは

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} + 2h \frac{\partial z}{\partial t} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + g(x, t), \quad k = \sqrt{\frac{T_0}{\rho}}, \quad h = \frac{k_0}{\rho(x)}, \quad g = \frac{p(x, t)}{\rho(x)} \quad (2.7)$$

となる。ただしこのとき、 $\rho = \text{一定}$ のときは、 $z = \zeta e^{-ht}$ とおくと

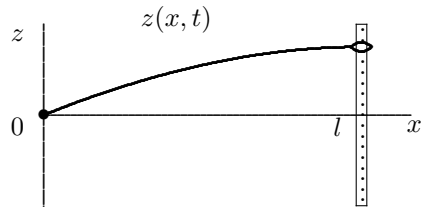
$$\frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 \zeta}{\partial x^2} + h^2 \zeta + g(x, t) e^{ht} \quad (2.8)$$

と変換できる。しかし、非斉次方程式 (2.8) の初期値問題 $\zeta(x, t_0) = 0, \zeta_t(x, t_0) = 0$ は解析的に求まり、(2.5) に対する以下に述べる方法と同様の手続きで (2.8) の斉次方程式の初期値問題の解と重ね合わせて解くことができる。

実現する弦の運動は方程式の他にいくつかの条件によって変わる。これを境界条件と初期条件に分離して指定することが多い。

端点を固定するとき、境界条件は $z(0, t) = 0$ あるいは $z(l, t) = 0$ となる。

一方、端点での「自由」はたとえば次のように実現できる。
 $x = 0$ を固定端、 $x = l$ を自由端とする。 $x = l$ で弦の振動方向 (z 軸方向) に棒をたて、弦は $x = l$ では摩擦力無しに棒に沿って運動するとする。たとえば弦の端を質量無しの滑らかな輪で棒に連結すればよい。このとき棒は z 軸方向に力をおよぼさないから、張力の z 軸方向分力は 0、すなわち $T_z = T_0 \tan \theta = 0$ となる。したがって端点では $\theta = 0$ 。



「自由端における弦の傾きはいつも 0 である」

といえる。則ち、自由端では $z_x(0, t) = 0$ あるいは $z_x(l, t) = 0$ となる。

代表的な次の境界条件が考えられる。

(1) 両端固定の場合 $z(0, t) = 0, z(l, t) = 0$

(2) 両端自由の場合 $z_x(0, t) = 0, z_x(l, t) = 0$

(3) 一端固定、他端自由の場合 $z(0, t) = 0, z_x(l, t) = 0$

ただし、一般にはこれらの混合型もあり得る。ここでは波動方程式 (2.5) を

$$\text{境界条件} \quad z(0, t) = 0, \quad z(l, t) = 0 \quad \cdots \text{両端固定} \quad (2.9)$$

$$\text{初期条件} \quad z(x, 0) = f(x), \quad z_t(x, 0) = \left\{ \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0} = g(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.10)$$

の場合について、フーリエ級数を用いて解いてみよう。

変数分離型の解

$$z(x, t) = X(x) \cdot T(t) \quad (2.11)$$

を仮定する。方程式に代入して

$$X(x) \cdot T''(t) = k^2 X''(x) \cdot T(t) \quad (2.12)$$

$$k^2 \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{T''(t)}{T(t)} \quad (2.13)$$

を得る。ここで (2.13) の左辺は x のみ、右辺は t のみに依存するから定数となる。この定数を $-\omega^2 < 0$ とおく。 $-\omega^2$ または ω を分離定数という。負に選んだ理由は振動解を得るためである（正にすると発散解となる）。したがって

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \rightarrow T(t) = a \cos \omega t + b \sin \omega t \quad (2.14)$$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{\omega^2}{k^2} X = 0 \rightarrow X(x) = c \cos \frac{\omega}{k} x + d \sin \frac{\omega}{k} x \quad (2.15)$$

ここで a, b, c, d は定数である。境界条件を適用して

$$z(0, t) = 0 \quad \text{より} \quad c = 0$$

$$z(l, t) = 0 \quad \text{より} \quad \sin \frac{\omega}{k} l = 0 \quad \text{したがって} \quad \frac{\omega}{k} l = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{よって} \quad \omega = \frac{n\pi}{l} k \equiv \omega_n$$

すなわち、境界条件は分離定数 ω に離散的な値 $\omega = \omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots$ を要求する。 $\{\omega_n\}$ を固有値 (eigen value) という。したがって境界条件を満たす分離型の解は

$$z_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (2.16)$$

これを方程式の固有値 ω_n に属する固有関数 (eigen function) という。 $n = 1, 2, 3, \dots$ に対する固有振動を基音 (fundamental tone), 第二倍音 (2nd harmonics), 第3倍音 (3rd harmonics), ... という。各固有状態に対する振動のエネルギーは

$$E_n = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z_n}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial z_n}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2)$$

境界条件に適合した一般解は方程式が線形であることから、重ね合わせができ

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{l} x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t) \quad (2.17)$$

となる。初期条件 $z(x, 0) = f(x)$ を適用する。これは $f(x)$ のフーリエ正弦展開となり

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (2.18)$$

また $z_t(x, 0) = g(x)$ より

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad b_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l g(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (2.19)$$

振動のエネルギーは

$$E = \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{4} \rho l \omega_n^2 (a_n^2 + b_n^2) \right\} = \sum_{n=1}^{\infty} E_n \quad (2.20)$$

となる。振動のエネルギーは各モードのエネルギーの単純和であり、それぞれは時間の経過によって変化しないことがわかる。これは方程式が線形であり、各モードが独立に振動していることによる。

このように初期値問題や境界値問題をフーリエ級数を用いて解く方法を「フーリエの方法」という。

式 (2.17) から

$$\begin{aligned} z(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \omega_n t + b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \sin \omega_n t \right) \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} (x - kt) + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi}{l} (x + kt) \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi}{l} (x + kt) - \sum_{n=1}^{\infty} b_n \cos \frac{n\pi}{l} (x - kt) \right\} \end{aligned}$$

となる。ところが、式 (2.19) の項別積分は

$$G(x) = \int^x g(\xi) d\xi = \int^x \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n b_n \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = \sum_{n=1}^{\infty} -k b_n \cos \frac{n\pi}{l} x + c$$

であり、 $g(x)$ のフーリエ正弦級数が一様収束するとき、右辺の級数も一様収束する。したがって

$$z(x, t) = \frac{f(x - kt) + f(x + kt)}{2} + \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} g(\xi) d\xi \quad (2.21)$$

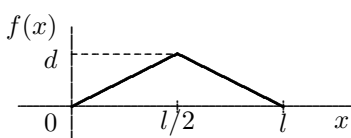
これは後述するストークス (Stokes) の波動公式そのものである。

具体例としてつぎの初期条件で解いてみよう。

$t = 0$ では

$$z(x, 0) = f(x) = \begin{cases} \frac{2d}{l}x & (0 < x < \frac{l}{2}) \\ \frac{2d}{l}(l-x) & (\frac{l}{2} < x < l) \end{cases} \quad (2.22)$$

$$z_t(x, 0) = \left\{ \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0} = g(x) = 0$$



すなわち弦の中央をピンと張って静かに離したときの弦の振動を考える。 $f(x)$ のフーリエ正弦展開の係数は

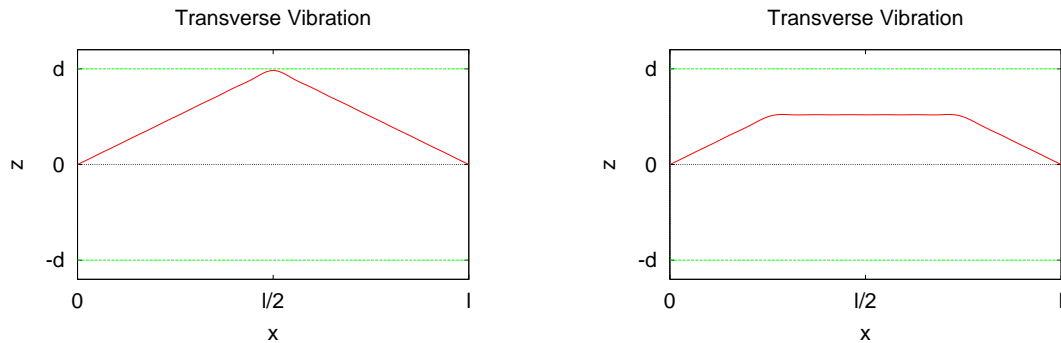
$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(x) \sin \frac{n\pi}{l} x dx = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \frac{8d}{\pi^2} \times \left(\frac{1}{1^2}, -\frac{1}{3^2}, \frac{1}{5^2}, \dots \right) & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases} \quad (2.23)$$

よって解は

$$z(x, t) = \frac{8d}{\pi^2} \left\{ \sin \frac{\pi}{l} x \cos \omega_1 t - \frac{1}{3^2} \sin \frac{3\pi}{l} x \cos \omega_3 t + \frac{1}{5^2} \sin \frac{5\pi}{l} x \cos \omega_5 t + \dots \right\}, \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} k \quad (2.24)$$

解を GNUPLOT で表示してみる。

GNUPLOT のスクリプトファイル 'transv0.txt', 'transv.txt' を LOAD して弦がどのように時間的に変化するか調べてみよう。その際 'move.txt' を同じディレクトリーにおいて下さい。



解は各固有モード

$$z_n(x, t) = \sin \frac{n\pi}{l} x \cos \omega_n t$$

を初期変位に対応したフーリエ係数 a_n の重み付き重ね合わせになっている。特に、 $z(x, 0) = f(x)$ だから解の $t = 0$ の値は初期条件のフーリエ展開そのものである。

各モードの振動数 ν_n は

$$\nu_n = \frac{\omega_n}{2\pi} = \frac{nk}{2l} = \frac{n}{2l} \sqrt{\frac{T_0}{\rho}} \quad (2.25)$$

周期 τ_n は $1/\nu_n$ である。

各モードの振動のエネルギーは $\omega_n^2 a_n^2$ 、従って $1/n^2$ に比例し、 n が大きくなると急激にエネルギーは小さくなる。弦の振動によって励起される音波のエネルギーも同じことが言え、耳には主に基音が聞こえることになる。第3倍音以上は音色に関わることになる。

別の境界条件、両端自由の場合について見る。

$$\text{境界条件} \quad z_x(0, t) = 0, \quad z_x(l, t) = 0 \quad \cdots \text{両端自由} \quad (2.26)$$

$$\text{初期条件} \quad z(x, 0) = f(x), \quad z_t(x, 0) = \left\{ \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0} = g(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.27)$$

同様にフーリエの方法で解くと

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{l} x (a_n \cos \omega_n t + b_n \sin \omega_n t), \quad \omega_n = \frac{n\pi}{l} k \quad (2.28)$$

$$a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi, \quad b_n = \frac{2}{\omega_n l} \int_0^l g(\xi) \cos \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (2.29)$$

となる。(各自必ずやっておこう)

また、一端固定他端自由の場合

$$\text{境界条件} \quad z(0, t) = 0, \quad z_x(l, t) = 0 \quad \cdots \text{一端固定他端自由} \quad (2.30)$$

$$\text{初期条件} \quad z(x, 0) = f(x), \quad z_t(x, 0) = \left\{ \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0} = g(x), \quad (0 \leq x \leq l) \quad (2.31)$$

同様にフーリエの方法で解くと

$$z(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x (a_{2n+1} \cos \omega_{2n+1} t + b_{2n+1} \sin \omega_{2n+1} t), \quad \omega_{2n+1} = \frac{(2n+1)\pi}{2l} k \quad (2.32)$$

となる。初期条件を適用する。これは周期 $4l$ のフーリエ展開 (1.10) (1.11) となり

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \quad a_{2n+1} = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} \xi d\xi \quad (2.33)$$

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \omega_{2n+1} b_{2n+1} \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} x, \quad b_{2n+1} = \frac{2}{\omega_{2n+1} l} \int_0^l g(\xi) \sin \frac{(2n+1)\pi}{2l} \xi d\xi \quad (2.34)$$

となる。

2.2.2 波動方程式の一般解と反射条件

波動方程式 (2.5) は (4.46) の双曲形方程式の第 1 の標準形に変換できる。すなわち

$$\xi = x - kt, \quad \eta = x + kt$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial t} &= \frac{\partial z}{\partial \xi}(-k) + \frac{\partial z}{\partial \eta}(+k), & \frac{\partial z}{\partial x} &= \frac{\partial z}{\partial \xi} + \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} k^2 - 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} k^2 + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} k^2, & \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 z}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 z}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

を波動方程式 (2.5) に代入して

$$\frac{\partial^2 z}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial z}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (2.35)$$

となる。したがって両辺を積分して、積分定数を $f(\xi)$ とおくと

$$\frac{\partial z}{\partial \xi} = f(\xi) \quad \text{さらに} \quad \xi \text{ で積分して} \quad z = \int f(\xi) d\xi + \psi(\eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

となる。よって波動方程式の一般解は

$$z(x, t) = \phi(x - kt) + \psi(x + kt), \quad \phi, \psi \text{ は任意関数} \quad (2.36)$$

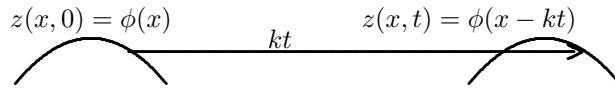
d'Alembert の解

となる。 $\phi(x-kt)$ および $\psi(x+kt)$ はそれぞれ正行波 (前進波), 逆行波 (後退波) である。解 $z(x, t) = \phi(x-kt)$ は $t=0$ の時, $z(x, 0) = \phi(x)$ である, すなわち, $z(x, t)$ のグラフは $z(x, 0)$ を x の方向に kt だけ平行移動したグラフである。したがって $\phi(x-kt)$ は速度 k の正行波であることが解る。同様に $\psi(x+kt)$ は速度

k の逆行波であることが解る。移動速度 k は波の伝播速度（位相速度）である。

前進波

$$z(x, t) = \phi(x - kt)$$



つぎに、初期条件

$$z(x, 0) = f(x), \quad z_t(x, 0) = \left\{ \frac{\partial z(x, t)}{\partial t} \right\}_{t=0} = g(x) \quad (2.37)$$

が与えられたとき、解 (2.36) の形を求めてみよう。条件は

$$z(x, 0) = \phi(x) + \psi(x) = f(x), \quad z_t(x, 0) = -k\phi'(x) + k\psi'(x) = g(x)$$

第 2 式を積分して

$$-\phi(x) + \psi(x) = \frac{1}{k} \int_0^x g(\xi) d\xi + c$$

第 1 式と合わせて

$$\phi(x) = \frac{1}{2}f(x) - \frac{1}{2k} \int_0^x g(\xi) d\xi - \frac{c}{2}, \quad \psi(x) = \frac{1}{2}f(x) + \frac{1}{2k} \int_0^x g(\xi) d\xi + \frac{c}{2} \quad (2.38)$$

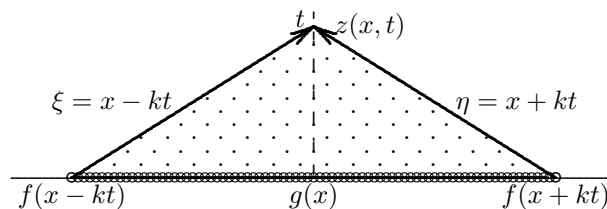
これを式 (2.36) に代入して、

$$z(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - kt) + f(x + kt)) + \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} g(\xi) d\xi \quad (2.39)$$

ストークス (Stokes) の波動公式

を得る。

ストークス (Stokes) の波動公式は $z(x, t)$ が初期条件の領域 ($x - kt, x + kt$) の値のみに依存していることを示している。



d'Alembert の解 (2.36) は、 ϕ, ψ が $(-\infty, +\infty)$ で定義されている時はそのまま適用できた。

つぎに両端の境界条件が与えられたとき解 (2.36) が適用できるためには ϕ, ψ したがって f, g をどうすればよいかを見ておこう。

(1) 両端固定の場合

そのために境界条件を満たしながらそれぞれの定義域を $(0, l)$ の外の領域まで拡張する。

$z(0, t) = 0, z(l, t) = 0$ より

$$\phi(-kt) + \psi(kt) = 0, \quad \phi(l - kt) + \psi(l + kt) = 0$$

kt は任意の正数より

$$\phi(-\xi) + \psi(\xi) = 0, \quad (\xi > 0), \quad \phi(-\xi + 2l) + \psi(\xi) = 0, \quad (\xi \geq l)$$

したがって

$$\xi > 2l \text{ に対して } \psi(\xi) = -\phi(-\xi + 2l) = \psi(\xi - 2l)$$

$$\xi > 0 \text{ に対して } \phi(-\xi) = -\psi(\xi) = \phi(-\xi + 2l)$$

となり, ϕ, ψ は周期 $2l$ の周期関数である。いま ξ を任意に拡張すると,

$$f(-x) = \phi(-x) + \psi(-x) = -\psi(x) - \phi(x) = -f(x)$$

となり, $f(x)$ は奇関数になっている。また

$$\frac{1}{k} \int_0^x g(\xi) d\xi = \psi(x) - \phi(x) - c = -\phi(-x) + \psi(-x) - c$$

が偶関数だから $g(x)$ も奇関数となっている。逆に, $f(x), g(x)$ を周期 $2l$ の奇関数に拡張しておけば, 式 (2.39) で表される解は, 両端固定の境界条件 (2.9) を満たす。したがって,

境界条件が両端固定の場合, 初期条件 (2.37) の $f(x), g(x)$ が周期 $2l$ の奇関数のとき, 解は式 (2.39) となる。スクリプトファイル 'wave1.txt' によって, 前進波及び後退波の伝播, 固定端での波の反射を調べてみよう。'wave2.txt' は条件 (2.22) の弦の振動をストークスの解で表したものであり, フーリエの方法の解 'transv.txt' との一致が確認できる。

(2) 両端自由の場合

気柱振動で両端開, 水面の表面波で両端が堰き止められている場合などに相当する。

境界条件 $z_x(0, t) = 0, z_x(l, t) = 0$ より

$$\phi'(-kt) + \psi'(kt) = 0, \quad \phi'(l - kt) + \psi'(l + kt) = 0$$

定義域を拡張して

$$\phi'(-\xi) + \psi'(\xi) = 0, \quad \phi'(2l - \xi) + \psi'(\xi) = 0$$

したがって

$$\psi'(\xi) = -\phi'(2l - \xi) = \psi'(\xi - 2l), \quad \phi'(\xi) = -\psi'(-\xi) = \phi'(\xi - 2l)$$

より $\phi'(x), \psi'(x)$ は周期 $2l$ の周期関数である。さらに

$$f'(-x) = \phi'(-x) + \psi'(-x) = -\psi'(x) - \phi'(x) = -f'(x)$$

$$g(-x) = -k\phi'(-x) + k\psi'(-x) = k\psi'(x) - k\phi'(x) = g(x)$$

だから $f(x), g(x)$ は偶関数となる。したがって

境界条件が両端自由の場合, 初期条件 (2.37) の $f(x), g(x)$ が周期 $2l$ の偶関数のとき, 解は式 (2.39) となる。ファイル 'wave3.txt' はファイル 'wave1.txt' と同じ初期条件で, 開放端のシミュレーションを行うものである。

(3) 一端固定, 他端自由の場合

境界条件 $z(0, t) = 0, z_x(l, t) = 0$ より

$$\phi(-kt) + \psi(kt) = 0, \quad \phi'(l - kt) + \psi'(l + kt) = 0$$

定義域を拡張して

$$\begin{aligned}\phi(-\xi) + \psi(\xi) &= 0, \quad \text{したがって} \quad -\phi'(-\xi) + \psi'(\xi) = 0 \\ \phi'(2l - \xi) + \psi'(\xi) &= 0, \quad \text{したがって} \quad -\phi(2l - \xi) + \psi(\xi) = c \quad (c \text{ は定数})\end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned}\psi(\xi) &= \phi(2l - \xi) + c = -\psi(\xi - 2l) + c = \psi(\xi - 4l) \\ \phi(\xi) &= -\psi(-\xi) = -\psi(-\xi - 4l) = \phi(\xi + 4l)\end{aligned}$$

より $\phi(x), \psi(x)$ は周期 $4l$ の周期関数である。これによって

$$\begin{aligned}f(-x) &= \phi(-x) + \psi(-x) = -\psi(x) - \phi(x) = -f(x) \\ g(-x) &= -k\phi'(-x) + k\psi'(-x) = -k\psi'(x) + k\phi'(x) = -g(x)\end{aligned}$$

だから $f(x), g(x)$ は奇関数となる。さらに

$$\begin{aligned}f(2l - x) &= \phi(2l - x) + \psi(2l - x) = \psi(x) + \phi(x) = f(x) \\ g(2l - x) &= -k\phi'(2l - x) + k\psi'(2l - x) = k\psi'(x) - k\phi'(x) = g(x)\end{aligned}$$

したがって

境界条件が一端固定，他端自由の場合，初期条件 (2.37) の $f(x), g(x)$ が周期 $4l$ の奇関数で， $f(2l - x) = f(x), g(2l - x) = g(x)$ のとき，解は式 (2.39)

となる。フーリエの方法で解くとき，特殊な周期 $4l$ の周期関数のフーリエ級数が表れる。

2.2.3 波動方程式のコーシー問題と解の一意性

次の条件を満たす波動方程式 (2.5) の解を求めることを Cauchy 問題という。

- (1) 初期条件 $z(x, 0) = f(x), z_t(x, 0) = g(x)$
- (2) 境界条件 $x = 0$ と $x = l$ に対して，時間経過の間の z あるいは z_x が与えられている。

波動方程式 (2.5) の両辺に $\frac{\partial z}{\partial t}$ をかけて積分すると

$$\begin{aligned}\int_0^l \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \frac{\partial z}{\partial t} dx &= k^2 \int_0^l \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \frac{\partial z}{\partial t} dx \\ \frac{d}{dt} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 dx &= k^2 \left[\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} \right]_{x=0}^{x=l} - k^2 \frac{d}{dt} \int_0^l \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 dx\end{aligned}$$

したがって

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} k^2 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = k^2 \left[\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} \right]_{x=0}^{x=l} \quad (2.40)$$

両辺に ρ を掛けると，

$$\frac{d}{dt} \int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = T_0 \left[\frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial t} \right]_{x=0}^{x=l}$$

式 (2.6) より, 左辺の被積分関数の第 1 項は運動エネルギー, 第 2 項は変形による位置エネルギーを表し, 従って左辺は全エネルギーの変化の割合であり, それは右辺の境界で外力がした仕事率に等しいことを意味している。両端固定などの境界条件を与えると右辺は 0 となり,

$$\int_0^l \left\{ \frac{1}{2}\rho \left(\frac{\partial z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}T_0 \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = \text{const.}$$

となる。これはエネルギー積分あるいは第一積分といわれる。エネルギー積分は偏微分方程式そのものが持っている性質であり, 外部から持ち込まれるものでない。

いまコーシー問題の 2 つの解を z_1, z_2 とし, その差を $Z = z_1 - z_2$ とする。解 Z は初期条件 $Z(x, 0) = 0, Z_t(x, 0) = 0, x = 0, x = l$ に対して境界条件 $Z(x, t) = 0, Z_x(x, t) = 0$ を満たす。このとき Z について式 (2.40) の右辺は 0 となる。したがって時間の経過に対して

$$\int_0^l \left\{ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial Z}{\partial t} \right)^2 + \frac{1}{2}k^2 \left(\frac{\partial Z}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = \text{一定}$$

となる。 $t = 0$ に対して, 左辺は 0 だから積分は常に 0 となる。これより $\frac{\partial Z}{\partial t}, \frac{\partial Z}{\partial x}$ は常に 0 となり, Z は t, x によらず定数となる。 Z は $t = 0$ で 0 だから Z は恒等的に 0 となる。これにより, コーシー問題の解の一意性が証明された。

2.2.4 ラプラス変換による偏微分方程式の解法

偏微分方程式がラプラス変換で簡単に解けるものがある。

1 1 階偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4xt + 3 \sin x, \quad u(x, 0) = x^2 \quad (2.41)$$

を解いておこう。 u の t に関するラプラス変換を $\mathcal{L}[u(x, t)] = U(x, s)$ とすると, 方程式の両辺をラプラス変換して

$$sU(x, s) - u(x, 0) = 4x \cdot \frac{1}{s^2} + 3 \sin x \cdot \frac{1}{s}$$

$$U(x, s) = 4x \cdot \frac{1}{s^3} + 3 \sin x \cdot \frac{1}{s^2} + \frac{x^2}{s}$$

よって

$$u = 2xt^2 + 3 \sin x \cdot t + x^2$$

2 1 階偏微分方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u(0, t) = 0 \quad (2.42)$$

も同様に, u の x に関するラプラス変換を $\mathcal{L}[u(x, t)] = U(s, t)$ とすると, 方程式の両辺をラプラス変換すると

$$\frac{dU(s, t)}{dt} + k(sU(s, t) - u(0, t)) = 0$$

したがって

$$U(s, t) = ce^{-kst}, \quad c : \text{定数}$$

$U(s, 0) = \mathcal{L}[u(x, 0)] = \mathcal{L}[f(x)] = F(s) = c$ だから

$$U(s, t) = F(s)e^{-kst}$$

よって

$$u(x, t) = f(x - kt)U(x - kt), \quad U : \text{unit step function} \quad (2.43)$$

これは前進波そのものである。

- 3** 静止して一直線上にある無限に長いロープの左端に変位 $z(0, t) = f(t)$, $t > 0$ を与えたとき、ロープの形状を求めよう。微小振動を仮定し、

$$\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \quad x > 0, \quad t > 0$$

初期条件は

$$z(x, 0) = 0, \quad z_t(x, 0) = 0$$

境界条件は

$$z(0, t) = f(t), \quad \text{さらに} \quad z(x, t) \text{ は 有界}$$

とする。方程式および境界条件の両辺 t に関してラプラス変換して

$$s^2 Z(x, s) - sz(x, 0) - z_t(x, 0) = k^2 \frac{d^2 Z(x, s)}{dx^2}, \quad \text{したがって} \quad \frac{d^2 Z(x, s)}{dx^2} = \frac{s^2}{k^2} Z(x, s)$$

$$Z(0, s) = F(s), \quad \text{さらに} \quad Z(x, s) \text{ は 有界}$$

方程式の解は

$$Z(x, s) = ae^{sx/k} + be^{-sx/k}$$

であるが、 $Z(x, s)$ の有界性より、 $a = 0$, よって $Z(x, s) = ae^{sx/k}$ 。境界条件から $b = F(s)$ となる。

$$Z(x, s) = F(s)e^{-sx/k}$$

これを逆変換して

$$z(x, t) = f(t - x/k)U(t - x/k), \quad U : \text{unit step function}$$

となる。点 x は時刻 x/k まで全く変位せず、それ以後、原点での変位 $f(t)$ に遅れること x/k で原点と同じ変位を起こす。

- 4** 2 階偏微分方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} = 2x \cos t, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u(0, t) = 3t \quad (2.44)$$

両辺を t に関してラプラス変換して

$$\frac{\partial}{\partial x} \{sU(x, s) - u(x, 0)\} = 2x \cdot \frac{s}{s^2 + 1}, \quad U(0, s) = \frac{3}{s^2}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} U(x, s) = 2x \cdot \frac{1}{s^2 + 1} + \frac{2x}{s}$$

$$\text{積分して} \quad U(x, s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot x^2 + \frac{x^2}{s} + c, \quad U(0, s) = \frac{3}{s^2} = c$$

$$U(x, s) = \frac{1}{s^2 + 1} \cdot x^2 + \frac{x^2}{s} + \frac{3}{s^2}$$

よって

$$u(x, t) = x^2(\sin t + 1) + 3t$$

2.3 1次元熱伝導

2.3.1 1次元熱伝導方程式とフーリエの方法

厚さ l , 密度 ρ , 比熱 c の十分に広がった板状の物体を考える。板の垂直方向を x 軸にとり温度を u 軸にとる。任意時間 t における位置 x での温度を $u(x, t)$ とすると, つぎの熱伝導方程式が成り立つ。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad k = \frac{\kappa}{c\rho} \quad (2.45)$$

ここで κ は熱伝導率, k は温度伝導率である。

(2.45) は次のように導かれる。

(2.45) と同じ設定として, 図のような熱伝導性のある棒を考え, 長さ方向に x 軸をとる。棒の断面積は A は一定, また棒は断面方向に外界と断熱的である。棒の温度を $u(x, t)$ とすると, 単位時間に断面積 A を流れる熱量は

$$J(x, t) = -\kappa A \frac{\partial u}{\partial x} \quad (\text{Fourier の法則}) \quad (2.46)$$

となる。ここで κ は熱伝導率 (thermal conductivity)。また単位時間に $(x, x + \Delta x)$ に溜まる熱量は

$$\Delta Q = J(x, t) - J(x + \Delta x) = -\frac{\partial J}{\partial x} \cdot \Delta x$$

となる。したがって

$$\Delta Q = \kappa A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

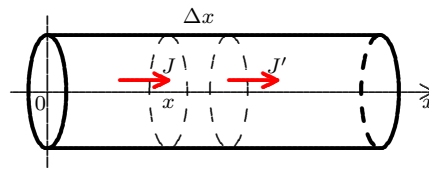
棒の材質の密度を ρ とすると, $(x, x + \Delta x)$ の質量は $\Delta m = \rho A \Delta x$ となる。棒の材質の比熱を c とし, 時間幅 Δt に温度が Δu 上昇したとすると

$$\Delta Q = c \Delta m \Delta u / \Delta t = c \rho A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t}$$

よって

$$c \rho A \Delta x \frac{\partial u}{\partial t} = \kappa A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \cdot \Delta x$$

となる。



境界条件として

(1) 温度固定 $\cdots u(0, t) = U_0$ あるいは $u(l, t) = U_l$ など

(2) 断熱境界 $\cdots u_x(0, t) = 0$ あるいは $u_x(l, t) = 0$ など

(端点での熱の流れ $J = -\kappa A u_x(x, t) = 0$)

などがある。

はじめに定常的な熱の流れを見ておこう。

温度分布が時間に無関係だから

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0 \quad (2.47)$$

$x = 0$ で $u = U_0$, $x = l$ で $u = U_l$ とすると

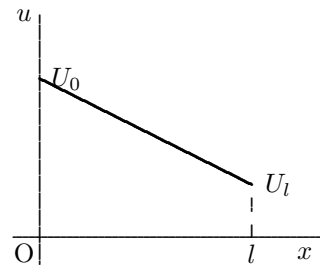
$$u = \frac{U_l - U_0}{l} x + U_0 \quad (2.48)$$

となり, 温度分布は1次関数的にかわる。

これによってすべての断面積では熱の流れが同じになる。

次に両端温度固定の条件で方程式 (2.45) をフーリエの方法で解いてみよう。解を変数分離で表してみる。

$$u(x, t) = X(x)T(t)$$



方程式 (2.45) に代入して

$$X(x)T'(t) = kX''(x)T(t) \quad \therefore \frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{1}{k} \frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2$$

分離定数 $-\lambda^2 < 0$ は $t \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0$ となるようにしたためである。これより

$$\begin{aligned} \frac{dT}{dt} + k\lambda^2 T &= 0, & T(t) &= ce^{-k\lambda^2 t} \quad (c \text{ は積分定数}) \\ \frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X &= 0, & X &= a \cos \lambda x + b \sin \lambda x \quad (a, b \text{ は積分定数}) \end{aligned}$$

よって方程式 (2.45) の基本解は

$$u(x, t) = e^{-k\lambda^2 t} (a \cos \lambda x + b \sin \lambda x) \quad (2.49)$$

となる。

両端での温度を固定する。即ち境界条件を $u(0, t) = 0, u(l, t) = 0$ とする。

$$u(0, t) = 0 \text{ より, } a = 0$$

$$u(l, t) = 0 \text{ より, } \sin \lambda l = 0, \quad \lambda l = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots)$$

したがって分離定数 λ は

$$\lambda = \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

よって固有値 λ_n に属する固有関数は

$$u_n = b_n e^{-k\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x$$

方程式の線形性より重ね合わせにより、両端固定の境界条件を満たす一般解は

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-k\lambda_n^2 t} \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (2.50)$$

となる。いま初期条件を $u(x, 0) = f(x)$ とすると

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin \frac{n\pi}{l} x \quad (2.51)$$

これは $f(x)$ のフーリエ正弦展開だから

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi \quad (2.52)$$

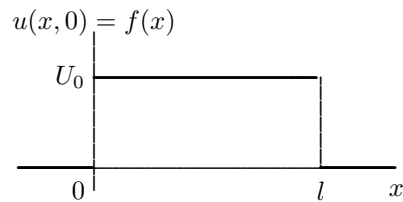
となる。

例として初期条件を

$$u(x, 0) = f(x) = U_0 \quad (\text{一定})$$

とする。これは境界条件 $u(0, t) = u(l, t) = 0$ と矛盾するものではなく、ただ $x = 0, l$ で初期条件が不連続なだけである。

初期条件



$f(x)$ のフーリエ正弦展開は

$$b_n = \frac{2}{l} \int_0^l U_0 \sin \frac{n\pi}{l} \xi d\xi = \frac{2U_0}{n\pi} \{1 - (-1)^n\} = \begin{cases} 0 & (n = 2, 4, 6, \dots) \\ \frac{4U_0}{n\pi} & (n = 1, 3, 5, \dots) \end{cases}$$

よって解は

$$u(x, t) = \frac{4U_0}{\pi} \sum_{n=1,3,\dots} \frac{1}{n} \exp(-k\lambda_n^2 t) \sin \frac{n\pi}{l} x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l} \quad (2.53)$$

解を GNUPLOT で表示してみる。

解は固有モード

$$u_n(x, t) = \exp(-k\lambda_n^2 t) \sin \frac{n\pi}{l} x$$

の重ね合わせである。時間経過とともに、たとえば板の中央 $x = \frac{l}{2}$ のところでは

$$u(l/2, t) = \frac{4U_0}{\pi} \left\{ e^{-k\lambda_1^2 t} - \frac{1}{3} e^{-k\lambda_3^2 t} + \dots \right\}$$

時間が十分経過すると、

$$\exp\left(-\frac{k\pi^2}{l^2} t\right) \gg \frac{1}{3} \exp\left(-9\frac{k\pi^2}{l^2} t\right)$$

であり、1 次の項のみが主要項として残ることがわかる。

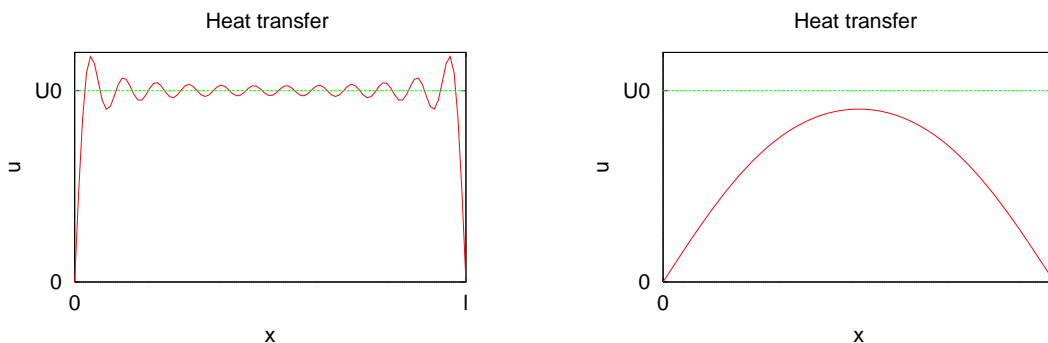
厚さ $l = 10\text{cm}$ 、温度 $U_0 = 100^\circ\text{C}$ の鋼板 ($\kappa = 0.835\text{W/cm.deg}$) が 0°C の水につけられると、2 分後では

$$\kappa = \frac{0.835}{4.2} \text{cal/sec.cm.deg}, \quad \rho = 7.86\text{g/cm}^3, \quad c = 0.107\text{cal/g.deg}, \quad k = \frac{\kappa}{\rho c} = 0.236\text{cm}^2/\text{sec}$$

したがって、たとえば $u(\text{中央}) = 7.78^\circ\text{C}$ となる。

解で $u(x, 0) = f(x)$ だから解の $t = 0$ の値は初期条件のフーリエ展開そのものである。

初期条件が不連続のため Gibbs 現象がおこり、有限オーダーのフーリエ級数による表現は、内点にもその影響を引き起こす。しかし時刻が少し経過するとこれは改善される。



GNUPLOT のスクリプトファイル 'heatt0.txt', 'heatt.txt' を LOAD して弦がどのように時間的に変化するか試してみよう。その際 'move.txt' を同じディレクトリーにおいて下さい。

次に温度差がある両端温度固定の場合を考える。

$$u(0, t) = U_0, \quad u(l, t) = U_l, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (0 < x < l)$$

これは

$$u_1(x) = \frac{U_l - U_0}{l}x + U_0, \quad u(x, t) = u_1(x) + u_2(x, t)$$

を定義すると,

$$u_2(0, t) = u_2(l, t) = 0, \quad u_2(x, 0) = u(x, 0) - u_1(x) = f(x) - u_1(x)$$

$$\frac{\partial u_2}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}$$

となり, 両端温度 0 の問題に帰着できる。

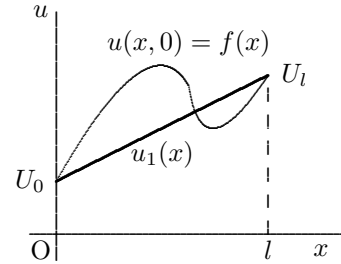
また断熱境界

$$u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad (0 < x < l)$$

では

$$u(x, t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_1^{\infty} a_n e^{-k\lambda_n^2 t} \cos \frac{n\pi}{l}x, \quad \lambda_n = \frac{n\pi}{l}, \quad a_n = \frac{2}{l} \int_0^l f(\xi) \cos \frac{n\pi}{l}\xi d\xi$$

となる。



2.3.2 熱伝導方程式の一般解

1次元熱伝導方程式 (2.45) を初期条件

$$u(x, 0) = f(x), \quad (-\infty < x < \infty) \tag{2.54}$$

で解いてみよう。解は基本解 (2.49) の無限領域での重ね合わせで表せるはずだから

$$u(x, t) = \int_0^{\infty} e^{-k\lambda^2 t} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda \tag{2.55}$$

初期条件を考慮すると

$$f(x) = \int_0^{\infty} (A(\lambda) \cos \lambda x + B(\lambda) \sin \lambda x) d\lambda$$

これは $f(x)$ のフーリエ積分であり,

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \cos \lambda \xi d\xi, \quad B(\lambda) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \sin \lambda \xi d\xi$$

これを式 (2.55) に代入して

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \int_0^{\infty} e^{-k\lambda^2 t} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) (\cos \lambda \xi \cos \lambda x + \sin \lambda \xi \sin \lambda x) d\xi d\lambda \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \int_0^{\infty} e^{-k\lambda^2 t} \cos \lambda (\xi - x) d\lambda d\xi \end{aligned}$$

となる。積分公式 (ラプラス変換と常微分方程式メモ 参照)

$$\int_0^{\infty} e^{-ax^2} \cos bxdx = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{b^2}{4a}\right)$$

を適用すると

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4kt}\right\} d\xi \quad (2.56)$$

となる。

無限領域に対する熱方程式の解 (2.56) は次のようにフーリエ変換を用いても求めることができる。
解 $u(x, t)$ の x に関するフーリエ変換を $U(\omega, t)$ とすると、1次元熱伝導方程式 (2.45) の両辺それぞれのフーリエ変換は

$$\mathcal{F}\left[\frac{\partial u}{\partial t}\right] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t} e^{-i\omega x} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\partial}{\partial t} \int_{-\infty}^{\infty} u e^{-i\omega x} dx = \frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t}, \quad \mathcal{F}\left[k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right] = -k\omega^2 U(\omega, t)$$

だから

$$\frac{\partial U(\omega, t)}{\partial t} = -k\omega^2 U(\omega, t)$$

変数分離, 積分して

$$U(\omega, t) = C(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

となる。初期条件 $u(x, 0) = f(x)$, $(-\infty < x < \infty)$ のフーリエ変換 $U(\omega, 0) = F(\omega)$ から, 積分定数 $C(\omega)$ は $C(\omega) = F(\omega)$ となる。これより

$$U(\omega, t) = F(\omega) e^{-k\omega^2 t}$$

逆変換して

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} F(\omega) e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega x} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[\int_{-\infty}^{\infty} e^{-k\omega^2 t} e^{i\omega(x-\xi)} d\omega \right] d\xi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \left[\int_0^{\infty} e^{-k\omega^2 t} \cos \omega(x-\xi) d\omega \right] d\xi = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi) \exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4kt}\right\} d\xi \end{aligned}$$

解 (2.56) のうち, $f(x) = \delta(x - \xi)$ に対する解

$$G(x, \xi, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4kt}\right\} \quad (2.57)$$

を基本解あるいは, グリーン関数という。任意の初期条件 (2.54) に対する解 (2.56) は

$$u(x, t) = \int_{-\infty}^{\infty} G(x, \xi, t) f(\xi) d\xi \quad (2.58)$$

で表される。

波動と違い, 熱は有限の速度で伝わるのではない。いま初期条件として

$$f(x) = \begin{cases} \bar{v} & (\alpha \leq x \leq \beta) \\ 0 & (x < \alpha, x > \beta) \end{cases}$$

とすると解は

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \int_{\alpha}^{\beta} f(\xi) \exp\left\{-\frac{(\xi - x)^2}{4kt}\right\} d\xi$$

となる。これは x がいくら大きくても, t がいくら小さくても, 常に $u(x, t) > 0$ 。すなわち熱は無限の速さで伝わっていることになる。(物理的なこうした矛盾はモデル化の過程での近似に起因している)。

グリーン関数は明白な物理的な意味を表している。初期分布

$$f(x) = \begin{cases} u_0 & (x_0 - h < x < x_0 + h) \\ 0 & (x < x_0 - h, x > x_0 + h) \end{cases}$$

を与える熱量は $Q = 2hAc\rho u_0$ (c は比熱, ρ は密度)。このときの温度分布は

$$u(x, t) = \frac{Q}{Ac\rho \times 2\sqrt{\pi kt}} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \exp\left\{-\frac{(\xi-x)^2}{4kt}\right\} d\xi$$

となる。ここで Q 一定で, $h \rightarrow 0$ を考える。平均値の定理より

$$\frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \exp\left\{-\frac{(\xi-x)^2}{4kt}\right\} d\xi = \exp\left\{-\frac{(\xi_0-x)^2}{4kt}\right\}, \quad (x_0-h < \xi_0 < x_0+h)$$

$h \rightarrow 0$ のとき, $\xi_0 \rightarrow x_0$ だから

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{Q}{Ac\rho \times 2\sqrt{\pi kt}} \frac{1}{2h} \int_{x_0-h}^{x_0+h} \exp\left\{-\frac{(\xi-x)^2}{4kt}\right\} d\xi = \frac{Q}{Ac\rho \times 2\sqrt{\pi kt}} \exp\left\{-\frac{(x_0-x)^2}{4kt}\right\}$$

よって「グリーン関数 $G(x, \xi, t)$ は $t = 0, x = \xi$ での強さ $Q = Ac\rho$ の「瞬間点熱源」による温度分布を表している」。これがグリーン関数 $G(x, \xi, t)$ は $f(x) = \delta(x - \xi)$ に対する解であるということの意味である。したがって (2.56) が表す任意の初期条件 $u(x, 0) = f(x)$ にたいする温度分布は, 各点 $x = \xi$ で初期温度分布 $f(\xi)$ が得られるように幅 $d\xi$ に $dQ = Ac\rho f(\xi)d\xi$ の熱量を与えたときの温度分布

$$\frac{Ac\rho f(\xi)d\xi}{Ac\rho} \cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi kt}} \exp\left\{-\frac{(\xi-x)^2}{4kt}\right\}$$

を, 各 ξ について重ね合わせたものになっている。

積分公式 $\int_0^\infty e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{a}}$ を用いると, グリーン関数の性質

$$\int_{-\infty}^\infty G(x, \xi, t) dx = \int_{-\infty}^\infty G(x, \xi, t) d\xi = 1 \quad (2.59)$$

が得られるから

$$\int_{-\infty}^\infty u(x, t) dx = \int_{-\infty}^\infty f(x) dx \quad (2.60)$$

となる。これは熱の保存則を意味している。

方程式 (2.45) を $x = a$ から $x = b$ まで積分すると

$$\frac{d}{dt} \int_a^b u(x, t) dx = k \left[\frac{\partial u}{\partial x} \right]_a^b$$

両辺に $Ac\rho$ を掛けると

$$\frac{d}{dt} \int_a^b Ac\rho u(x, t) dx = J(a, t) - J(b, t) \quad (2.61)$$

となり, $[a, b]$ 間の熱量の変化は両端からの流入量に等しい。 $a \rightarrow -\infty, b \rightarrow \infty$ の時 (2.61) は (2.60) に対応する。

ファイル 'heatt1.txt' はグリーン関数を表示するものである。

無限領域に対する熱伝導問題の例を考えよう。

解 (2.56) で変数変換

$$\frac{(\xi-x)^2}{4kt} = z^2, \quad \xi = 2\sqrt{kt}z + x \quad (2.62)$$

を行うと,

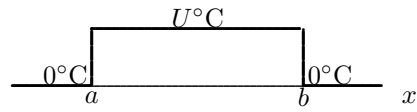
$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^\infty f(2\sqrt{kt}z + x) e^{-z^2} dz \quad (2.63)$$

となる。

例として

$$u(0, x) = f(x) = \begin{cases} U & (a < x < b) \\ 0 & (x < a, x > b) \end{cases}$$

とすると



$$\xi = a \text{ のとき } z = z_1 = \frac{a-x}{2\sqrt{kt}}, \quad \xi = b \text{ のとき } z = z_2 = \frac{b-x}{2\sqrt{kt}}$$

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left\{ \int_{-\infty}^{z_1} + \int_{z_1}^{z_2} + \int_{z_2}^{\infty} \right\} f(\xi) e^{-z^2} dz \\ &= \frac{U}{\sqrt{\pi}} \left\{ -\int_0^{z_1} e^{-z^2} dz + \int_0^{z_2} e^{-z^2} dz \right\} \end{aligned}$$

誤差関数

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-\xi^2} d\xi$$

を用いると

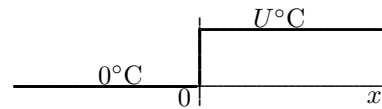
$$u(x, t) = \frac{U}{2} \{ \operatorname{erf}(z_2) - \operatorname{erf}(z_1) \} \quad (2.64)$$

また $a = 0, b \rightarrow \infty$ とすると

$$\xi = 0 \cdots z_1 = -\frac{x}{2\sqrt{kt}}, \quad \xi = \infty \cdots z_2 = \infty$$

となる。

$$u(x, t) = \frac{U}{2} \left\{ 1 + \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{kt}} \right\}$$



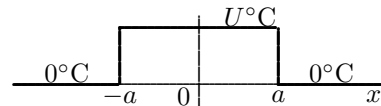
$x = 0$ では常に $u = U/2$, また $t \rightarrow \infty$ ではすべての点で $u \rightarrow U/2$ となる。

また

$a \rightarrow -a, b \rightarrow a$ とすると

$$\xi = -a \cdots z_1 = -\frac{a+x}{2\sqrt{kt}}, \quad \xi = a \cdots z_2 = \frac{a-x}{2\sqrt{kt}}$$

$$u(x, t) = \frac{U}{2} \left\{ \operatorname{erf} \frac{a+x}{2\sqrt{kt}} + \operatorname{erf} \frac{a-x}{2\sqrt{kt}} \right\}$$



$t \rightarrow \infty$ で $u \rightarrow 0^\circ\text{C}$, $x = a$ では $u = U/2 \operatorname{erf} \frac{a}{2\sqrt{kt}}$ となる。

また

$$\frac{\partial z}{\partial t} + u \frac{\partial z}{\partial x} = d \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \quad (u, d \text{ は定数}) \quad (2.65)$$

を対流拡散方程式という。(2.65) に対する解 z を

$$z(x, t) = y(x - ut, t)$$

とし, $\xi = x - ut$ とおくと

$$\frac{\partial y}{\partial t} = d \frac{\partial^2 y}{\partial \xi^2}$$

となる。したがって (2.65) の解は熱伝導方程式の解を x 軸方向に ut だけずらしたものになる。

JAVA アプレットには (2.65) にたいする数値解を図示している。

波動方程式や (2.65) のような対流項がある方程式の数値解法は不連続の伝播を通じて難しい問題が現れる。例では MacCormack のスキームと呼ばれる方法で解いているが、時間とともに波形が変形している。初等な水準でも、実用のためにはそれぞれの問題に応じた数値解法の選択や工夫が必要となる。

2.3.3 熱伝導方程式のコーシー問題と解の一意性

次のいずれかの条件を満たす熱伝導方程式 (2.45) の解を求めることを Cauchy 問題という。

(1) 無限の導体の場合

$$u(x, 0) = f(x) \quad (-\infty < x < \infty)$$

解は (2.56) となる。

(2) 1つの端を持つ制限された導体の場合

初期条件 $u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < \infty)$

境界条件 $u(0, t) = 0$, または $u_x(0, t) = 0$

(3) 2つの端を持つ制限された導体の場合

初期条件 $u(x, 0) = f(x) \quad (0 < x < l)$

境界条件 $u(0, t) = u(l, t) = 0$, または $u_x(0, t) = u_x(l, t) = 0$

いまコーシー問題 (3) の2つの解を u_1, u_2 とし、その差を $U = u_1 - u_2$ とする。 U は初期条件を $U(x, 0) = 0$ 、境界条件を $x = 0, x = l$ に対して $U(x, t) = 0$ または $U_x(x, t) = 0$ とする (2.45) の解である。熱伝導方程式 (2.45) の両辺に U をかけて積分すると

$$\int_0^l \frac{\partial U}{\partial t} U dx = k \int_0^l \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} U dx$$

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^l U^2 dx = k \left[\frac{\partial U}{\partial x} U \right]_0^l - k \int_0^l \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 dx$$

右辺第1項は U に対する境界条件により0、第2項は0以下となる。したがって $\int_0^l U^2 dx$ は t の非増加関数、かつ $t = 0$ のときは0だから、恒等的に0となる。よって U も0となる。これでコーシー問題の解の一意性が示された。

2.4 ラプラスの方程式

2.4.1 2次元ラプラスの方程式とフーリエの方法

複素数 $z = x + iy$ の関数 $f(z)$ が微分可能とは、 Δz のとりかたによらず

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z}$$

が一意的に決まることである。また $\delta > 0$ に対して $|z - z_0| < \delta$ のすべての z で $f'(z)$ が存在するとき $f(z)$ は $z = z_0$ で解析的という。関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が解析的である必要十分条件 (コーシーリーマンの方程式) は

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

である。このとき u および v はラプラスの方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \tag{2.66}$$

を満たす。2次元ラプラス方程式はこのように複素関数論と深く結びついており、それを用いて解かれることが多い。

一般にラプラスの方程式の解を調和関数という。非圧縮2次元定常流れ、定常熱伝導問題、静電場などがラプラス方程式になる。

また、湧き出しのある定常熱伝導問題はポアソン (Poisson) の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -g(x, y) \quad (2.67)$$

となる。これらはいずれも楕円型方程式と呼ばれ、ほとんど同じ扱いができる。

ラプラス方程式の境界値問題では大きく2つが考えられる。

- (1) 与えられた境界の解の値を指定する … ディリクレ問題
- (2) 与えられた境界の法線方向の微分を与える … ノイマン問題

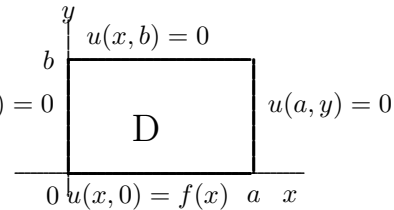
矩形領域でのディリクレ問題

矩形領域 $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ で境界条件

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f(x), u(x, b) = 0, \\ u(0, y) &= u(a, y) = 0 \end{aligned} \quad (2.68)$$

を満たすラプラス方程式の解をフーリエの方法で解いてみよう。

矩形領域でのディリクレ問題



変数分離型の解

$$u(x, y) = X(x) \cdot Y(y) \quad (2.69)$$

を仮定する。方程式 (2.66) に代入して

$$X''(x) \cdot Y(y) + X(x) \cdot Y''(y) = 0 \quad (2.70)$$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} \quad (2.71)$$

を得る。ここで左辺は x のみ、右辺は y のみに依存するから定数となる。この分離定数を $\lambda^2 > 0$ とおく (分離定数を負に選ぶと、恒等的に0となる解となる)。したがって

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0 \quad \rightarrow \quad X(x) = A \cos \lambda x + B \sin \lambda x \quad (2.72)$$

$$Y''(y) - \lambda^2 Y(y) = 0 \quad \rightarrow \quad Y(y) = C e^{\lambda y} + D e^{-\lambda y} \quad (2.73)$$

ここで A, B, C, D は定数である。境界条件を適用して

$$u(0, y) = 0 \quad \text{より} \quad A = 0$$

$$z(a, y) = 0 \quad \text{より} \quad \sin \lambda a = 0 \quad \text{したがって} \quad \lambda a = n\pi, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$\text{よって} \quad \lambda = \frac{n\pi}{a} \equiv \lambda_n$$

また境界条件 $u(x, b) = 0$ より

$$C e^{\lambda b} + D e^{-\lambda b} = 0 \quad \rightarrow \quad D = -C e^{2\lambda b}$$

したがって境界条件を満たす分離型の解は

$$\begin{aligned} u_n(x, y) &= BC \sin \lambda_n x (e^{\lambda_n y} - e^{2\lambda_n b} e^{-\lambda_n y}) \\ &= -BC e^{\lambda_n b} \sin \lambda_n x (e^{\lambda_n (b-y)} - e^{-\lambda_n (b-y)}) \end{aligned}$$

あらためて $-2BCe^{\lambda b}$ を B_n とおいて

$$u_n(x, y) = B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a} \quad (2.74)$$

よって重ね合わせによる一般解は

$$u_n(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi x}{a} \sinh \frac{n\pi(b-y)}{a} \quad (2.75)$$

境界条件 $u(x, 0) = f(x)$ より

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sinh \frac{n\pi b}{a} \sin \frac{n\pi x}{a} = f(x) \quad (2.76)$$

これは $B_n \sinh \frac{n\pi b}{a}$ が $f(x)$ のフーリエ正弦係数であることを示している。よって

$$B_n \sinh \frac{n\pi b}{a} = \frac{2}{a} \int_0^{\pi} f(\xi) \sin \frac{n\pi \xi}{a} d\xi \quad (2.77)$$

となる。

また境界条件が

$$u(x, 0) = f(x), \quad u(x, b) = 0, \quad u(0, y) = g(y), \quad u(a, y) = 0, \quad (0 \leq x \leq a, \quad 0 \leq y \leq b)$$

の時は方程式、境界条件の重ね合わせができる。

$$u = u_1 + u_2, \quad \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial y^2} = 0$$

$$u_1(x, 0) = f(x), \quad u_1(x, b) = 0, \quad u_1(0, y) = 0, \quad u_1(a, y) = 0$$

$$u_2(x, 0) = 0, \quad u_2(x, b) = 0, \quad u_2(0, y) = g(y), \quad u_2(a, y) = 0$$

したがってそれぞれ u_1, u_2 を独立に解き、加えあわせればよい。

同様の考えを矩形領域の全境界に適用することができ、矩形領域の任意のディリクレ問題が解ける。

付属の JAVA アプレットには、ラプラス方程式として、境界条件が

$$f(x) = \sin \frac{x}{l}, \quad (0 \leq x \leq l)$$

の場合の解が示してある。ただしこれは数値計算に基づくものである。

また同じアプレットにはすべての矩形の境界で値が0のポアソンの方程式の解が示してある。

数値解法にふれておく。領域に $\Delta x = \Delta y$ の等間隔の格子を用い、解を $u_{i,j} = u(x_i, y_j)$, $i, j = 0, 1, \dots$ とする。ポアソンの方程式 (2.67) に中心差分を適用すると

$$\frac{u_{i+1,j} - 2u_{i,j} + u_{i-1,j}}{\Delta x^2} + \frac{u_{i,j+1} - 2u_{i,j} + u_{i,j-1}}{\Delta y^2} = -g_{i,j}$$

となる。 $\Delta x = \Delta y$ として、 u_{ij} について解くと

$$u_{ij} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j} + u_{i-1,j} + u_{i,j+1} + u_{i,j-1}) + \frac{\Delta x^2}{4} g_{i,j}$$

となる。各格子点 (i, j) についてこれが成り立ち、直接解法はそのまま連立して解く。しかし点の数が増えてくると、直接解法は処理時間や精度の問題で困難がでてくる。上式を

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^n + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^n) + \frac{\Delta x^2}{4} g_{i,j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

とし、くりかえしで解を求めることが考えられる。反復を、 i を決めて順次 j について求め、つぎに i を 1 増やしてまた j について求める、ようにすると、 $n+1$ 段の $(i-1, j), (i, j-1)$ の u はすでに求まっているから

$$u_{ij}^{n+1} = \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^{n+1}) + \frac{\Delta x^2}{4} g_{i,j}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

としても同じことである。これに収束を速めるために、加速緩和係数 ω を導入し

$$u_{ij}^{n+1} = (1 - \omega)u_{ij}^n + \omega \left\{ \frac{1}{4}(u_{i+1,j}^n + u_{i-1,j}^{n+1} + u_{i,j+1}^n + u_{i,j-1}^{n+1}) + \frac{\Delta x^2}{4} g_{i,j} \right\}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

とする。これを SOR 法という。 $\omega = 1$ は元の反復法になっており、通常 $1 \leq \omega \leq 2$ が用いられる。正方形領域を $N \times N$ に分割するときは $\omega = 2 / \{1 + \sin(\pi/N)\}$ が最適だという。

円領域でのディリクレ問題

円領域 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ におけるディリクレ問題をフーリエの方法で解いてみよう。座標を (x, y) から極座標 (r, θ) に変換しておく。

円領域でのディリクレ問題

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

このときラプラス方程式 (2.66) は (4.31) から

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = 0 \quad (2.78)$$

となり、境界条件は

$$u(a, \theta) = f(\theta), \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi), \quad f(2\pi) = f(0) \quad (2.79)$$

となる。
変数分離

$$u(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.80)$$

を仮定すると、方程式 (2.78) は

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} = -\frac{\Theta''}{\Theta} \quad (2.81)$$

となる。変数分離解が円領域 D で一価であるためには $\Theta(\theta + 2\pi) = \Theta(\theta)$ 。分離定数を λ^2 とおくと

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + \lambda^2 \Theta = 0 \quad (2.82)$$

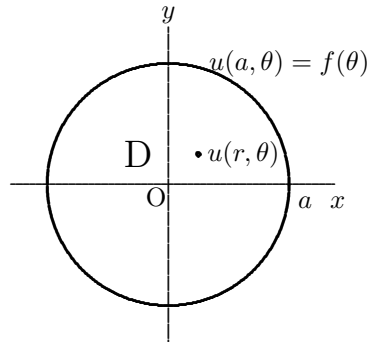
$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} - \frac{\lambda^2}{r^2} R = 0 \quad (2.83)$$

方程式 (2.82) の一般解

$$\Theta(\theta) = A \cos \lambda \theta + B \sin \lambda \theta$$

となる。解が周期 2π の解を持つことから、まず $\Theta(-\pi) = \Theta(\pi)$ を要請して、

$$A \cos \lambda \pi - B \sin \lambda \pi = A \cos \lambda \pi + B \sin \lambda \pi$$



より

$$\sin \lambda \pi = 0 \rightarrow \lambda = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad \text{または } B = 0$$

となる。 $B = 0$ のときは、 $\Theta(2\pi) = \Theta(0)$ より

$$A \cos 2\lambda \pi = A, \quad A \neq 0 \text{ として } \lambda = n \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

いずれの場合も結局

$$\Theta(\theta) = A \cos n\theta + B \sin n\theta \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.84)$$

となる。各 $\lambda = n$ にたいして、方程式 (2.83) の解を

$$R = r^p$$

とすると、

$$p(p-1)r^{p-2} + pr^{p-2} - n^2r^{p-2} = 0 \rightarrow p = \pm n$$

$n \neq 0$ のとき、独立な 2 つの解は r^n, r^{-n} であるが、 r^{-n} は $r \rightarrow 0$ で発散する。また $n = 0$ のとき、方程式 (2.83) は

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left(r \frac{dR}{dr} \right) = 0, \quad \text{よって独立な 2 つの解は } R = 1, \log r$$

$\log r$ も $r \rightarrow 0$ で発散する。したがって求める解は

$$u(r, \theta) = \frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} r^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta), \quad (0 \leq r < a) \quad (2.85)$$

の形で求められる。境界条件 (2.79) より

$$\frac{A_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a^n (A_n \cos n\theta + B_n \sin n\theta) = f(\theta)$$

だから係数 A_n, B_n は

$$A_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi, \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad B_n = \frac{1}{\pi a^n} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi, \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (2.86)$$

で求まり、円領域でのディリクレ問題の解が (2.85) で表されたことになる。

解 (2.85) は級数の係数を代入してまとめると

$$\begin{aligned} u(r, \theta) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) d\phi + \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \left\{ \cos n\theta \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \cos n\phi d\phi + \sin n\theta \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \sin n\phi d\phi \right\} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left\{ 1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^n \cos n(\phi - \theta) \right\} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left\{ 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{i(\phi - \theta)}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{a} e^{-i(\phi - \theta)}\right)^n \right\} d\phi \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \left\{ \frac{1}{1 - \frac{r}{a} e^{i(\phi - \theta)}} + \frac{\frac{r}{a} e^{-i(\phi - \theta)}}{1 - \frac{r}{a} e^{-i(\phi - \theta)}} \right\} d\phi \end{aligned}$$

となり、

$$u(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\phi) \frac{a^2 - r^2}{a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi, \quad (0 \leq r < a) \quad (2.87)$$

となる (ポアソンの積分公式)。

解 (2.87) は複素関数論を使うと簡単に導かれる。
Cauchy の積分公式より、関数 $f(z)$ が曲線 C で囲まれた単連結領域 D で解析的であると

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = 0, \quad (z \notin D) \quad (2.88)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = f(z), \quad (z \in D) \quad (2.89)$$

が成り立つ。今領域 D を原点を中心とする半径 a の円とし、 $z = re^{i\theta}$ とすると

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(a, \phi)}{ae^{i\phi} - re^{i\theta}} d(ae^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a, \phi)(a^2 - are^{-i(\phi-\theta)})}{a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi$$

また点 $z = \frac{a^2}{r}e^{i\theta}$ は円 C の外にあるから

$$0 = \frac{1}{2\pi i} \oint_C \frac{f(a, \phi)}{ae^{i\phi} - \frac{a^2}{r}e^{i\theta}} d(ae^{i\phi}) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a, \phi)(-are^{-i(\phi-\theta)} + r^2)}{a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi$$

2式の差をとると

$$f(r, \theta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(a, \phi)(a^2 - r^2)}{a^2 - 2ar \cos(\phi - \theta) + r^2} d\phi$$

となる。境界条件 $u(a, \phi) = f(a, \phi)$ を満たす調和関数 $u(r, \theta)$ が存在するとすると、これを実部とする正則関数 $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, $z = x + iy$ が存在する。したがって上式の実部をとって解が得られる。正則関数は何回でも微分可能である。したがって調和関数 $u(r, \theta)$ も何回でも微分可能である。

2.4.2 Laplace の方程式の基本性質

ここでは3次元 Laplace の方程式に拡張して議論しよう。

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (2.90)$$

閉領域 V において、連続で、そのすべての内点で調和 ((2.90) を満たす) であり、また V が無限領域の時は x が無限遠で0となる $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ を「閉領域 V で調和」と定義しよう。

「閉領域 V で調和な関数 $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ は V と境界からなる領域 \bar{V} で連続ならば、境界で最大値、最小値をとる。」(最大値の原理)

境界 S における最大値を m とする。いま $u(x)$ が V の内点で m より大きかったとする。よって \bar{V} での $u(x)$ の最大値 M となるのは V の内点 $P(x)$ である。新たに関数 $v(\xi) = v(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を定義する。

$$v(\xi) = u(\xi) + \frac{M - m}{2d^2} |\xi - x|^2, \quad |\xi - x|^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2$$

ここで d は閉領域 V の2点の距離の上限とする。したがって $|\xi - x|^2 < d^2$ である。 $v(x) = u(x) = M$ であるが、境界上では

$$v(\xi) \leq m + \frac{1}{2}(M - m) = \frac{m + M}{2} < M$$

したがって $v(\xi)$ は $u(\xi)$ と同様に領域 V の内点で最大値をとる。しかしこれは

$$\Delta_{\xi} v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_3^2} = \frac{M - m}{d^2} > 0, \quad \xi \in V$$

と矛盾する。よって境界で最大値をとる。また内点で最小値とならないことは $-u$ を考えて、同様に示される。

最大値の原理から、全空間で調和な関数は一定値 (0) となることがわかる (Liouville の定理)。

十分大きな閉領域を V とし、その境界での最大値、最小値を M, m とすると、 $m < M$, $|M| \leq \epsilon$, $|m| \leq$

$\epsilon, \epsilon > 0$ (無限遠では $u = 0$ を用いている) となる。 V の任意の内点 x では $|u(x)| \leq \epsilon$, したがって $u(x) = 0$ 。

また, 最大値の原理から「導体 (同じ電位) で囲まれた空洞内の電界は 0」が得られる。 つぎに「調和関数の除去可能な特異点」の定理を考える。(この項はコシリヤコフ, グリニエル, スミルノフ「偏微分方程式」岩波書店の展開にしたがった。)

「点 $\xi = x$ を関数 $u(\xi)$ の孤立特異点とし, 点 x の近傍のすべての点 $u(\xi)$ で調和であるとする。 そうすると, x, ξ の距離を $r = |\xi - x|$ として, $\xi \rightarrow x$ のとき, 関数 $u(\xi)$ は $1/r$ より遅くなく発散するか, あるいは点 x において除去可能な特異点であり, この点で調和になるように拡張できる。」

$u(\xi)$ が調和な点 x の近傍に含まれる球 $r \leq a$ を考える。 後述する 3次元 Poisson の定理 (これはこの定理を用いなくて導かれる) から, 球面上で $u(\xi)$ に一致する調和な関数 $v(\xi)$ が存在する。 $(1/r - 1/a)$ はこの球内で非負であり, 球 $r \leq a$ から十分小さな近傍 $r \leq \epsilon$ を除いた領域 V_ϵ で調和であり, $\xi \rightarrow x$ のとき $1/r$ での形で増加する。 そこで $u(\xi)$ が $\xi \rightarrow x$ のとき $1/r$ より遅く発散するとすると, $\epsilon \rightarrow 0$ で 0 に近づく η が存在して, $r = \epsilon, a$ で

$$|u - v| \leq \eta \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

がなりたつ。 関数 $u - v, \eta(1/r - 1/a)$ は共に, 領域 V_ϵ で調和だから, 最大値の原理より, この不等式は $\epsilon \leq r \leq a$ でなりたつ。 ξ を固定し, $\epsilon \rightarrow 0$ とすると, 右辺は 0 となり, $\xi \neq x, r \leq a$ で $u = v$ となる。 したがって, $u(\xi)$ は $\xi \neq x$ で有界な関数 v に一致し, 特異点 $\xi = x$ では $u(x) = v(x)$ と定義すれば, $u(\xi)$ から特異点を除去出来たことになる。

V を無限領域に拡張するため, 変換

$$\xi_i = x_i \frac{a^2}{|x|^2}, \quad (i = 1, 2, 3, |x|^2 = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2, \quad a = \text{const}) \quad (2.91)$$

を定義し, 原点 $x = 0$ を中心とする半径 a の球面に関する反転といい, x と ξ を球面に対する調和共役点 (鏡像の位置) という。 $\xi_i/x_i = a^2/|x|^2$ だから, 2点 ξ, x は原点から出る同じ動径上にあり, $|\xi||x| = a^2$ である。 一方は他方の半径 a の球面に対する像になっており, 原点を含む領域は無限領域に, 無限領域は原点を含む領域に変換される。 それぞれの変換された領域を互いに共役という。 半径 $a = 1$ の球に関する反転で共役な領域を V, V' とする。 このとき次の定理が成り立つ。

「関数 $u(x)$ が V で調和ならば, 関数

$$v(\xi) = \frac{1}{|\xi|} u \left(\frac{\xi_1}{|\xi|}, \frac{\xi_2}{|\xi|}, \frac{\xi_3}{|\xi|} \right) \quad (2.92)$$

は V' で調和である。」 (Kelvin の定理)

$x = 0$ を原点とする極座標を (r, θ, ϕ) とし, $x(r, \theta, \phi) \in V$ の調和共役点を $\xi(r', \theta, \phi) \in V'$ とする。

はじめに V' が $r' = 0$ を含まないとして証明する。 また $r' = 1/r$ 。 したがって

$$\frac{\partial}{\partial r'} = \frac{\partial r}{\partial r'} \frac{\partial}{\partial r} = -\frac{1}{r'^2} \frac{\partial}{\partial r} = -r^2 \frac{\partial}{\partial r}$$

このとき (2.92) は

$$v(r', \theta, \phi) = ru(r, \theta, \phi) = \frac{1}{r'} u \left(\frac{1}{r'}, \theta, \phi \right)$$

となる。式 (4.29) を用いると

$$\begin{aligned}
 r'^2 \Delta_\xi v &= \frac{\partial}{\partial r'} (r'^2 \frac{\partial v}{\partial r'}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial v}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 v}{\partial \phi^2} \\
 &= r^2 \frac{\partial^2}{\partial r^2} [ru(r, \theta, \phi)] + \dots \\
 &= r \left[\frac{\partial}{\partial r} (r^2 \frac{\partial u}{\partial r}) + \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta}) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} \right] \\
 &= 0
 \end{aligned}$$

よって $v(\xi)$ は V' で調和である。

V' が $r' = 0$ を含むとき、関数 $v = u(1/r', \theta, \phi)/r'$ は $r' = 0$ は特異点となるが、これは次のようにして除去可能な特異点であることがわかる。

ξ' を $\xi' \neq 0$ の V' の任意の点とし、 $r' = 0$ を中心とし、 ξ' を含まない十分小さな球を ω とする。領域 $V' - \omega$ は $r' = 0$ を含まず、 v は調和である。したがって v は r' を除いた r' の近傍で調和である。 $r'v(r', \theta, \phi) = u(1/r', \theta, \phi)$ は $r' \rightarrow 0$ のとき、 $u(1/r', \theta, \phi) \rightarrow 0$ より 0、すなわち $\lim_{r' \rightarrow 0} r'v = 0$ となり、 $r' = 0$ は v の除去可能な特異点となる。よって常に Kelvin の定理が成り立つことがわかった。

Kelvin の定理から無限遠での調和関数の条件が得られる。 ξ を x の調和共役点とすると $v(\xi) = |x|u(x)$ は原点近傍で調和、したがって有界である。十分大きな正数を A とすると $|u(x)| \leq A/|x|$ となる。同様な議論によって微分についても $|\frac{\partial u}{\partial x_i}| \leq A/|x|^2$, ($i = 1, 2, 3$) がえられる。

最大値の原理を使うと、Laplace および Poisson の方程式のデリクレ問題について、解の一意性が証明できる。

閉領域 V の場合、同じ境界条件を満たす 2 つの解を u_1, u_2 とする。 $w = u_1 - u_2$ は境界条件が常に 0 の調和関数である。最大値の原理によって、領域 V のすべての内点で $w = u_1 - u_2 = 0$ となり、 $u_1 = u_2$ となるからである。領域 V が原点を含まない無限領域ならば、変換 $\xi_i = x_i/|x|^2$ を行い、関数 $v(\xi) = |x|w(x)$ をつくれば、Kelvin の定理から $v(\xi)$ は領域 V に共役な閉領域 V' で調和であり、その境界条件は 0 だから、 V' で 0 となる。したがって $w(x) = |\xi|v(\xi)$ も V で 0 となり、証明された。

また境界条件に関して解は連続であることがわかる。

2 つの関数 u_1, u_2 をそれぞれ境界条件 $u_1(x) = f_1(x)$, $u_2(x) = f_2(x)$, $x \in S$ を満たす解とする。 $|f_1 - f_2| < \epsilon, x \in S, \epsilon > 0$ とする。境界で $-\epsilon < f_1 - f_2 < \epsilon$ だから、最大値の定理によって $-\epsilon < u_1 - u_2 < \epsilon$ となる。すなわち $|u_1 - u_2| < \epsilon$ となり、境界条件に関して連続となる。

以上で Laplace 方程式を解く準備が出来た。

はじめに 2 点 ξ, x の距離を $r = |\xi - x| = \sqrt{\sum_{i=1}^3 (\xi_i - x_i)^2}$ とすると

$$\Delta \frac{1}{r} = 0, \quad (\xi \neq x) \tag{2.93}$$

が ξ の微分に関しても、 x の微分に関しても成立する。いま $\phi(\xi, x)$ を領域 V で ξ に関して調和であり、かつ 1 階導関数まで連続な関数としたとき、

$$L(\xi, x) = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{1}{r} + \phi(\xi, x) \right] \tag{2.94}$$

を領域 V における Laplace の方程式の基本解という。

有界領域 V で x が V に含まれていないとき、 L は ξ に関して領域 V で調和である。Green の公式 (4.9

で $v(\xi) = L(\xi, x)$ とおくと,

$$\int \int_S (L \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial L}{\partial n}) dS_\xi = \int \int \int_V L \Delta u dV_\xi, \quad (x \notin V)$$

x が V の内部 $V - S$ にあるとき, V から中心が x , 任意に小さな半径 ϵ の球を Ω_ϵ , 球面を S' とし, V から Ω_ϵ を除いた領域 V' に Green の公式を適用して

$$\int \int_S (L \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial L}{\partial n}) dS_\xi = \int \int \int_{V'} L \Delta u dV_\xi - \left[\int \int_{S'} L \frac{\partial u}{\partial n} dS_\xi - \int \int_{S'} u \frac{\partial L}{\partial n} dS_\xi \right], \quad (x \in V - S)$$

積分 $\int \int \int_V L \Delta u dV_\xi$ が存在するなら, 右辺第 1 項は $\epsilon \rightarrow 0$ でそれに収束する。右辺第 2 項の $\int \int_{S'} L \frac{\partial u}{\partial n} dS_\xi$ について, $\frac{\partial u}{\partial n}$ は有界であり, $\epsilon \rightarrow 0$ で $L(\xi, x)$ は $1/\epsilon$ で増大し, S' は ϵ^2 で減少するから, 極限值は 0 となる。第 3 項は

$$\int \int_{S'} u \frac{\partial L}{\partial n} dS_\xi = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S'} u \frac{\partial \phi}{\partial n} dS_\xi + \frac{1}{4\pi} \int \int_{S'} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_\xi$$

となるが,

$$\frac{1}{4\pi} \int \int_{S'} u \frac{\partial \phi}{\partial n} dS_\xi \rightarrow 0, \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \int_{S'} u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS_\xi = \frac{1}{4\pi} \int \int_{S'} \frac{u}{r^2} dS_\xi = \frac{1}{4\pi \epsilon^2} \int \int_{S'} u dS_\xi \rightarrow u(x), \quad (\epsilon \rightarrow 0)$$

したがって点 x が領域 V の外部および内部にあるときをまとめると

$$\int \int_S (L \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial L}{\partial n}) dS_\xi = \int \int \int_V L \Delta u dV_\xi + \begin{cases} 0, & (x \notin V) \\ u(x), & (x \in V - S) \end{cases} \quad (2.95)$$

となる。とくに点 x が領域 V の境界 S 上にあれば右辺の u が $\frac{1}{2}u$ であることが知られている。したがって u が領域 V で調和ならば

$$\int \int_S (L \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial L}{\partial n}) dS_\xi = \begin{cases} 0, & (x \notin V) \\ \frac{1}{2}u(x), & (x \in S) \\ u(x), & (x \in V - S) \end{cases} \quad (2.96)$$

となる。(2.96) は無限領域 V についても成り立つ。式 (2.96) を S と S を含む十分大きな半径 r の球 Ω の共通部分に適用すると, 左辺には付加項

$$\int \int_{S_\Omega} (L \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial L}{\partial n}) dS_\xi$$

が表れる。しかしこの積分は, 被積分関数が 2 つの項のどちらも $1/r^3$ で減少し, 積分面 S_Ω は r^2 で増加するから, $r \rightarrow \infty$ で 0 となる。よって (2.96) は常に成り立つ。(2.96) を調和関数論の基本公式という。

調和関数は無限回微分可能である。式 (2.96) で領域 V の内点を x とする。 $L = 1/4\pi r$ とおくと, L は x に関して無限回微分可能であり, それらは ξ に関して有界である。したがって面 S 上の点で u が 1 階連続微分可能ならば, 面積分も x に関して無限回微分可能となる。また面 S 上で u の 1 階導関数が連続でないならば, 面積分を x を含む V 内の面積分に置き換えると, V 内では u は調和だから 2 階微分可能であり, 上の議論がなりたつ。

2.4.3 Poisson の公式

球 $|x| \leq a$ に対する Dirichlet 問題

$$\begin{cases} \Delta u = 0 & (|x| < a) \\ u = \psi & (|x| = a) \end{cases} \quad (2.97)$$

を考える。 x を球の内点として、 $u(x)$ を調和な関数とする。 x に調和共役な点を式 (2.91) にしたがって ξ (2.91) とし、動点 ζ にたいして

$$\rho = |x|, \quad r = |\zeta - x|, \quad r^* = |\zeta - \xi|$$

とする。基本公式 (2.96) を適用すると

$$\frac{1}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} \left\{ \frac{1}{r^*} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} \right) \right\} dS_\zeta = 0 \quad (2.98)$$

$$\frac{1}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS_\zeta = u(x) \quad (2.99)$$

ζ が球面上の点 ($|\zeta| = a$) では、 $r^*/r = a/\rho$ である。(2.98) に $-a/\rho$ をかけて (2.99) と加え合わせると

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} u \left\{ \frac{a}{\rho} \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r^*} \right) - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS_\zeta$$

となる。球面での法線方向は ζ の方向だから

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^3 \zeta_i \frac{\partial}{\partial \zeta_i}$$

となる。これを上式に実行すると Poisson の公式

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} u(\zeta) \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} dS_\zeta, \quad (|x| < a) \quad (2.100)$$

が得られる。右辺の $|\zeta| = a$ 上の $u(\zeta)$ に連続な関数 $\psi(\zeta)$ を代入すると

$$u(x) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} \psi(\zeta) \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} dS_\zeta, \quad (|x| < a) \quad (2.101)$$

となる。これが Dirichlet 問題 (2.98) の解となっていることは次のようにして解る。 $u(x)$ が $|x| < a$ で調和となっていることは、被積分関数が ζ に関して連続で、有界だから微分と積分の順序が交換でき、 x に関する 2 階微分を直接行うことによって確かめられる。したがって球面上の任意の点 y に関して $|x - y| \rightarrow 0$ で確かに $u(x) \rightarrow \psi(y)$ となっていることを証明すればよい。

球面上で $u = 1$ である調和関数を考える。これは Poisson の公式の条件を満たしているので

$$1 = \frac{1}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} dS_\zeta$$

したがって

$$u(x) - \psi(y) = \frac{1}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} [\psi(\zeta) - \psi(y)] dS_\zeta$$

となる。球面 $|\zeta| = a$ での積分を、球面上で y を中心とし、半径 η の円内の部分 S_η と残りの部分 S' に分ける。 $\zeta \in S_\eta$ では、 $|\psi(\zeta) - \psi(y)|$ の上限を M とすると

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4\pi} \int \int_{S_\eta} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} [\psi(\zeta) - \psi(y)] dS_\zeta \right| &\leq \frac{M}{4\pi} \int \int_{S_\eta} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} dS_\zeta \\ &\leq \frac{M}{4\pi} \int \int_{|\zeta|=a} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} dS_\zeta = M \end{aligned}$$

$\psi(\zeta)$ の球面上での連続性により、 $\eta \rightarrow 0$ で $M \rightarrow 0$ である。また $\psi(\zeta)$ は連続性から球面上で有界であり $|\psi(\zeta)| \leq A$ とすると

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{4\pi} \int \int_{S'} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} [\psi(\zeta) - \psi(y)] dS_\zeta \right| &\leq \frac{2A}{4\pi} \int \int_{S'} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} dS_\zeta \\ &\leq \frac{2A}{4\pi} \int \int_{S'} \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^3} dS_\zeta \leq 2AM^* \end{aligned}$$

ここで M^* は S' 面上での $(a^2 - |x|^2)/|\zeta - x|^3$ の上限である。 η を固定し、球内の x に関して $x \rightarrow y$ とすると、 r は η のオーダーであるが、 $a^2 - |x|^2$ は η よりいくらでも小さくなり、 $M^* \rightarrow 0$ なる。よって球内の x に関して

$$|u(x) - \psi(y)| \rightarrow 0, \quad (x \rightarrow y)$$

となり、(2.101) で求める u は境界条件を満たすことがわかる。

2次元の場合は、閉曲線 l で囲まれた閉局面 S について

$$L(\xi, x) = \frac{1}{2\pi} \left[\log \frac{1}{r} + \phi(\xi, x) \right] \quad (2.102)$$

とおくと、閉曲線 C で囲まれた閉局面 S について式 (2.95) に対応して

$$\int \int_C \left(L \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial L}{\partial n} \right) d\ell = \begin{cases} 0, & (x \notin S) \\ \frac{1}{2} u(x), & (x \in C) \\ u(x), & (x \in S - C) \end{cases} \quad (2.103)$$

となる。これは Cauchy の積分公式 (2.88), (2.89) に対応している。3次元の Poisson の公式 (2.100) に対応して

$$u(x) = \frac{1}{2\pi} \int \int_{|\zeta|=a} u(\zeta) \frac{a^2 - |x|^2}{|\zeta - x|^2} dS_\zeta, \quad (|x| < a) \quad (2.104)$$

となり、これから Poisson の積分公式 (2.87) が得られる。

2.5 ヘルムホルツの方程式と波動，熱伝導

2.5.1 ヘルムホルツの方程式

はじめに、2次元ヘルムホルツの方程式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + kF = 0 \quad (2.105)$$

を考える。領域 D が有界で、その境界 C が区分的に滑らかな曲線からなるとし、

$$F(x, y) = 0 \quad (x, y) \text{ は } C \text{ 上の点} \quad (2.106)$$

を満たす解を求めることを、ヘルムホルツ方程式の固有値問題という。

2次元でのグリーンの定理

$$\iint_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx dy = \int_C (P dy - Q dx)$$

で、 $P = FF_x, Q = FF_y$ を代入すると

$$\text{左辺} = \iint_D \{F\Delta F + (F_x^2 + F_y^2)\} dx dy = -k \iint_D F^2 dx dy + \iint_D (F_x^2 + F_y^2) dx dy$$

右辺は、境界C上では0だから $P = Q = 0$ で0となる。したがって

$$k \iint_D F^2 dx dy = \iint_D (F_x^2 + F_y^2) dx dy$$

両辺の被積分関数は F が恒等的に0でない限り正となり、 $k > 0$ となる。したがって $k = \lambda_i^2 (\lambda_i > 0)$ のとき解があるとして、 $(\lambda_i, i = 1, 2, \dots)$ を固有値、その解を固有関数という。

同様に3次元のヘルムホルツ方程式

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} + kF = 0 \quad (2.107)$$

で、境界条件

$$F(x, y, z) = 0 \quad (x, y, z) \text{ は } \Sigma \text{ 上の点} \quad (2.108)$$

を満たす解を求めることを、ヘルムホルツ方程式の固有値問題という。2次元の時と同様に3次元のグリーンの定理

$$\int_{\Sigma} \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dv$$

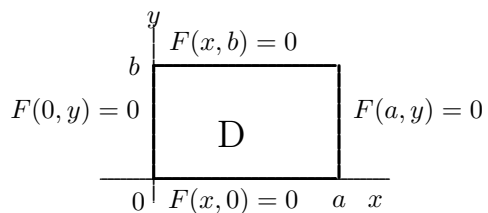
に、 $\phi = \psi = F$ を代入し、境界条件 (2.108) を考慮すると、 $k > 0$ のときのみ解があることがわかる。 $k = \lambda_i^2 (\lambda_i > 0)$ として、 $(\lambda_i, i = 1, 2, \dots)$ を固有値、その解を固有関数という。

- 1 はじめに、**矩形領域でヘルムホルツ方程式の固有値問題**を解いておこう。
 矩形領域 $D: 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ で境界条件

$$\begin{aligned} F(x, 0) &= 0, F(x, b) = 0, \\ F(0, y) &= F(a, y) = 0 \end{aligned} \quad (2.109)$$

のもとで

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \lambda^2 F = 0 \quad (2.110)$$



を解く。これは「矩形領域でのディリクレ問題」と対応している。

変数分離解を $F(x, y) = X(x)Y(y)$ とする。これが境界条件を満たすとすると

$$X(0)Y(y) = 0, \quad X(a)Y(y) = 0, \quad X(x)Y(0) = 0, \quad X(x)Y(b) = 0$$

したがって

$$X(0) = X(a) = 0, \quad Y(0) = Y(b) = 0$$

となる。 $F(x, y) = X(x)Y(y)$ を (2.110) に代入して、

$$x''Y + XY'' + \lambda^2 XY = 0$$

$$-\frac{X''(x)}{X(x)} = \frac{Y''(y)}{Y(y)} + \lambda^2$$

したがって、両辺は定数で、しかも、 $X(0) = X(a) = 0$ からその定数が負の時は満たす解が存在しない。したがって

$$X'' + \mu^2 X = 0 \quad (2.111)$$

$$Y'' + (\lambda^2 - \mu^2)Y = 0 \quad (2.112)$$

となる。ただし $\mu > 0$ とする。(2.111) は

$$\mu_m = \frac{m\pi}{a}, \quad X_m(x) = \sin \frac{m\pi x}{a} \quad (m = 1, 2, \dots)$$

(2.112) は $\lambda^2 - \mu^2 = \nu^2 (\nu > 0)$ とおいて

$$\nu_m = \frac{n\pi}{b}, \quad Y_n(y) = \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

となる。したがって (2.110) の固有値は

$$\lambda_{mn} = \sqrt{\mu_m^2 + \nu_n^2} = \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2} \pi \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.113)$$

であり、変数分離解は

$$F_{nm}(x, y) = A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (m, n = 1, 2, \dots) \quad (2.114)$$

$$k = \lambda_{mn}^2 = \left\{ \left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2 \right\} \pi^2$$

一般解は

$$F(x, y) = \sum_{m, n=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (A_{mn} \text{ は任意定数}) \quad (2.115)$$

で求まる。

2 続いて、円領域でヘルムホルツ方程式の固有値問題を解いておこう。

円領域 $D: x^2 + y^2 \leq a^2$ とし、境界条件

$$F(a, \theta) = 0, \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad (2.116)$$

のもとで

$$\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \lambda^2 F = 0 \quad (2.117)$$

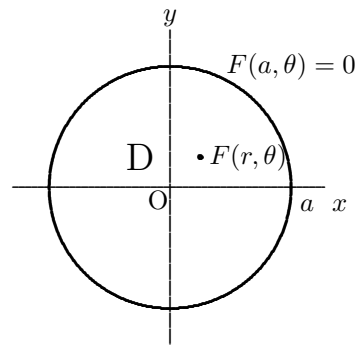
を解く。

変数分離

$$F(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta) \quad (2.118)$$

を仮定すると、方程式 (2.117) は

$$r^2 \frac{R''}{R} + r \frac{R'}{R} + \lambda^2 r^2 = -\frac{\Theta''}{\Theta} \quad (2.119)$$



したがって

$$\Theta'' + \mu^2\Theta = 0 \quad (2.120)$$

$$r^2R'' + rR' + (\lambda^2r^2 - \mu^2)R = 0 \quad (2.121)$$

$$(2.122)$$

となる。\$\Theta(\theta)\$ は周期 \$2\pi\$ を持たねばならないから (2.120) の解は

$$\mu = n \quad (n = 1, 2, \dots), \quad \Theta(\theta) = \Theta_n(\theta) = C_n \cos n\theta + D_n \sin n\theta \quad (C_n, D_n \text{ は定数}) \quad (2.123)$$

となる。一方 (2.121) は \$\rho = \lambda r\$ とすると

$$\rho^2 \frac{d^2R}{d\rho^2} + \rho \frac{dR}{d\rho} + (\rho^2 - n^2)R = 0, \quad R(\lambda a) = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.124)$$

となる。これは \$\nu = n\$ 次のベッセル方程式で、原点で有界な解 \$J_\nu(x)\$ は \$\nu\$ 次のベッセル関数である。(ラプラス変換と常微分方程式メモ 参照)

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k! \Gamma(\nu + k + 1)} \left(\frac{t}{2}\right)^{\nu+2k} \quad (2.125)$$

条件 \$R_n(\lambda a) = 0\$ によって、\$J_n\$ の零点を \$\mu_{nm}\$ (\$m = 1, 2, \dots\$) とすると \$\lambda = \mu_{nm}/a\$ である。したがって

$$R_n(r) = J_n(\mu_{nm}r/a) \quad (2.126)$$

よって、変数分離解は

$$F_{nm} = J_n(\mu_{nm}r/a)(C_{nm} \cos n\theta + D_{nm} \sin n\theta) \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (2.127)$$

$$k = \lambda_{nm}^2 = (\mu_{nm}/a)^2, \quad J_n(\mu_{nm}) = 0$$

重ね合わせによって、ヘルムホルツの方程式 (2.117) の一般解は

$$F(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} J_n(\mu_{nm}r/a)(C_{nm} \cos n\theta + D_{nm} \sin n\theta) \quad (2.128)$$

となる。

3 3次元の Helmholtz の方程式

$$\Delta u + k^2u \equiv \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2u = 0 \quad (2.129)$$

を考えよう。これを3次元極座標で書くと (4.29) より

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial u}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \phi^2} + k^2u = 0 \quad (2.130)$$

となる。変数分離で

$$u = R(r)Y(\theta, \phi) \quad (2.131)$$

とおき、分離定数を \$\lambda\$ とすると

$$\frac{r^2}{R} \left\{ \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + k^2 \right\} = \lambda \quad (2.132)$$

$$\frac{1}{Y} \left[\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial Y}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2 Y}{\partial \phi^2} \right] = -\lambda \quad (2.133)$$

となる。このとき、(2.133) は $\lambda = l(l+1), l = 0, 1, 2, \dots$ の固有値を持ち、変数分離解が $Y = P_l^m(\cos \theta) \cos m\phi, P_l^m(\sin \theta) \cos m\phi$ となった。 l 次解を $Y_l(\theta, \phi)$ で表し、 l 次の球面 (調和) 関数と言った。

$2l+1$ 個の l 次の球面関数 $P_l(\theta), P_l^m(\theta) \cos m\phi, P_l^m(\theta) \sin m\phi, (m = 0, 1, 2, \dots, l), (l = 1, 2, \dots)$ は、直交関数系をなし、球面上 Σ で一階偏導関数も含めて連続な任意の関数 $f(\theta, \phi)$ は

$$f(\theta, \phi) = a_{00} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[a_0 P_k(\cos \theta) + \sum_{m=1}^k (a_{mk} \cos m\phi + b_{mk} \sin m\phi) P_k^m(\cos \theta) \right] \quad (2.134)$$

と展開できる。

$$\begin{aligned} a_{0k} &= \frac{2k+1}{2\pi} \iint_{\Sigma} f(\theta', \phi') P_k(\cos \theta') dS \\ a_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \iint_{\Sigma} f(\theta', \phi') P_k^m(\cos \theta') \cos m\phi' dS \\ b_{mk} &= \frac{2k+1}{2\pi} \frac{(k-m)!}{(k+m)!} \iint_{\Sigma} f(\theta', \phi') P_k^m(\cos \theta') \sin m\phi' dS \end{aligned} \quad (2.135)$$

動径方向について、(2.132) で $\lambda = l(l+1)$ とすると

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{2}{r} \frac{dR}{dr} + \left(k^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} \right) R = 0 \quad (2.136)$$

となる。

$$R(r) = \frac{V}{\sqrt{r}}$$

とおくと

$$\frac{d^2 V}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dV}{dr} + \left(k^2 - \frac{(l+1/2)^2}{r^2} \right) V = 0 \quad (2.137)$$

これはベッセルの微分方程式であり、 $r = 0$ で有限な解は

$$V = A J_{l+1/2}(kr)$$

となる。 $J_{l+1/2}(kr)$ は特に球ベッセル (spherical Bessel function) と呼ばれる。したがって、解は

$$u = \sum \frac{A_l}{\sqrt{r}} Y_l(\theta, \phi) J_{l+1/2}(kr) \quad (2.138)$$

となる。

2.5.2 2次元波動方程式

さて、平面上の境界 C で囲まれた領域 D での2次元波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (2.139)$$

で、

$$\text{境界条件} \quad u(x, y, t) = 0 \quad (x, y) \text{ は } C \text{ 上の点} \quad (2.140)$$

$$\text{初期条件} \quad u(x, y, 0) = f(x, y), \quad u_t(x, y, 0) = g(x, y) \quad (2.141)$$

を満たす解を求めよう。ただし、境界が滑らかとすると、境界条件から、境界C上では $f(x, y) = g(x, y) = 0$ でなければならない。

まず、(2.139) の変数分離解を求めよう。

$$u(x, y, t) = F(x, y)T(t) \quad (2.142)$$

$$FT'' = c^2(F_{xx} + F_{yy})T, \quad \frac{T''}{c^2T} = \frac{1}{F}(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}) \rightarrow -k$$

両辺は定数となり、分離定数を $-k$ とおくと

$$\Delta F + kF = 0 \quad (2.143)$$

$$T'' + c^2kT = 0 \quad (2.144)$$

となる。(2.143) はヘルムホルツの方程式である。ヘルムホルツの方程式は境界条件によって固有値問題となる。 $k = \lambda^2$ とおいて、各固有値 λ_{nm} に属する固有関数を F_{nm} とする。一方 (2.144) は $k = \lambda_{nm}^2$ として

$$T_{nm}(t) = A_{nm} \cos \lambda_{nm}ct + B_{nm} \sin \lambda_{nm}ct \quad (2.145)$$

となる。したがって、(2.139) の解は重ね合わせによって

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} F_{nm}(x, y)(A_{nm} \cos \lambda_{nm}ct + B_{nm} \sin \lambda_{nm}ct) \quad (2.146)$$

となる。

- 1** いま、領域Dを矩形領域 $D : 0 \leq x \leq a, 0 \leq y \leq b$ とし、境界条件、初期条件が (2.140), (2.140) の場合を考えよう。

境界条件を満たす一般解 (2.146) は (2.114) より

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} (A_{nm} \cos \lambda_{nm}ct + B_{nm} \sin \lambda_{nm}ct) \quad (2.147)$$

初期条件 (2.140) より

$$u(x, y, 0) = f(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.148)$$

$$u_t(x, y, 0) = g(x, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} \lambda_{mn}cB_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.149)$$

これらは $f(x, y), g(x, y)$ の2次元フーリエ正弦展開となっており、

$$A_{mn} = \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a f(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\xi d\eta \quad (2.150)$$

$$B_{mn} = \frac{1}{c\lambda_{mn}} \frac{4}{ab} \int_0^b \int_0^a g(\xi, \eta) \sin \frac{m\pi\xi}{a} \sin \frac{n\pi\eta}{b} d\xi d\eta \quad (2.151)$$

- 2** また、領域Dが円領域 $D : x^2 + y^2 \leq a^2$ とし、境界条件、初期条件が (2.140), (2.140) の場合を考えよう。

境界条件を満たす一般解 (2.146) は (2.127) より

$$u(x, y, t) = \sum_{n,m=1}^{\infty} J_n(\mu_{nm}r/a)(C_{nm} \cos n\theta + D_{nm} \sin n\theta)(A_{nm} \cos \lambda_{nm}ct + B_{nm} \sin \lambda_{nm}ct) \quad (2.152)$$

より簡単な場合に話を限定しよう。解は θ に無関係で、 r 方向にのみ依存するとする。すなわち $n = 0$ で u は $u = u(r, t)$ 。したがって、初期条件も

$$u(r, 0) = f(r), \quad u_t(r, 0) = g(r)$$

とする。このとき、

$$u(x, y, t) = \sum_{m=1}^{\infty} J_0(\mu_m r/a)(a_m \cos \lambda_m ct + b_m \sin \lambda_m ct), \quad \lambda_m = \frac{c\mu_m}{a}, J_0(\mu_m) = 0 \quad (2.153)$$

初期条件 $u(r, 0) = f(r)$ より

$$u(r, 0) = f(r) = \sum_{m=1}^{\infty} a_m J_0(\mu_m r/a) \quad (2.154)$$

$$u_t(r, 0) = g(r) = \sum_{m=1}^{\infty} c\lambda_m b_m J_0(\mu_m r/a) \quad (2.155)$$

(2.154) より $a_m, c\lambda_m b_m$ はフーリエ・ベッセル級数の係数だから (1.82) より

$$a_m = \frac{2}{a^2 J_1^2(\mu_m)} \int_0^a r f(r) J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) dr \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.156)$$

$$b_m = \frac{2}{ac\mu_m J_1^2(\mu_m)} \int_0^a r g(r) J_0\left(\frac{\mu_m}{a} r\right) dr \quad (m = 1, 2, \dots) \quad (2.157)$$

である。

2.5.3 球の中での熱伝導

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nabla^2 u \quad (2.158)$$

を

$$r = a, t > 0 \text{ のとき, } u = 0 \quad (\text{境界条件}) \quad (2.159)$$

$$r < a, t = 0 \text{ のとき, } u = f(r, \theta, \phi) \quad (\text{初期条件}) \quad (2.160)$$

で解くことを考える。変数分離で $u = T(t)v(r, \theta, \phi)$ とおくと

$$\frac{1}{T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{v} \nabla^2 v = -k^2$$

$$T = C e^{-k^2 t}$$

$$\nabla^2 v + k^2 v = 0$$

となる。従って

$$u = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{l,i}}{\sqrt{r}} e^{-k_{i,l}^2 t} Y_l(\theta, \phi) J_{l+1/2}(k_{i,l} r)$$

となる。ただし、 $k_{i,l}$ は $J_{l+1/2}(ka) = 0$ の i 番目の零点である。また $A_{l,i}$ は初期条件

$$f(r, \theta, \phi) = \frac{1}{\sqrt{r}} \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_{l,i}}{\sqrt{r}} Y_l(\theta, \phi) J_{l+1/2}(k_{i,l} r)$$

満たすように決められる。これは可能である (省略)。

第3章 付録1 – 高速フーリエ変換

3.1 離散フーリエ変換

あらためて関数 $x(t)$ に対するフーリエ級数を定義しておく。

フーリエ級数 (周期 T の関数 $x(t)$ に対する複素フーリエ級数)

$$x(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) \exp(2\pi i k t / T) \quad (3.1)$$

$$c(k) = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \exp(-2\pi i k t / T) dt \quad (3.2)$$

t 軸上に等区間 $\Delta t = T/N$ の点 $j\Delta t (j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$ をとると

$$x(j\Delta t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c(k) e^{2\pi i j k / N} = \sum_{k=0}^{N-1} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(k + lN) \right\} e^{2\pi i j k / N}$$

三角関数の直交性

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{imt} e^{-int} dt = \delta_{m,n} \quad m, n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

には、積分を台形公式に置き換えたことに相当する選点直交関係

$$\frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(m-n)j\right) = \delta_{0,m-n}$$

が対応する。ここに δ はクロネッカーのデルタで、 $m-n$ は $\text{mod } N$ で N の整数倍は無視するとする。

離散フーリエ変換

周期 T の周期関数 $x(t)$ とそのフーリエ係数 $c(k)$ について、

$$c_p(k) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} c(k + lN) \quad (3.3)$$

および $\Delta t = T/N$ とすると

$$c_p(k) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} x(j\Delta t) \exp(-2\pi i j k / N) \quad (3.4)$$

$$x(j\Delta t) = \sum_{k=0}^{N-1} c_p(k) \exp(2\pi i j k / N) \quad (3.5)$$

N を十分大きくして, $|k| > N/2$ の k にたいして, $c(k) = 0$ ならば

$$c_p(k) = c(k) \quad (k = 0, 1, \dots, N/2), \quad c_p(k) = c(k - N) \quad (k = N/2, \dots, N)$$

一方フーリエ変換およびフーリエ逆変換は以下のように定義する。

フーリエ変換

関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega) = \mathcal{F}\{x(t)\}$ とその逆変換 $x(t) = \mathcal{F}^{-1}\{X(\omega)\}$

$$X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-i\omega t) dt \quad (3.6)$$

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) \exp(i\omega t) d\omega \quad (3.7)$$

また応用上, 角振動数 ω を用いるのではなく, 振動数 $f = \omega/2\pi$ を用いることもある。

フーリエ変換

関数 $x(t)$ のフーリエ変換 $X(f)$ とその逆変換

$$X(f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t) \exp(-2\pi i f t) dt \quad (3.8)$$

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(2\pi i f t) df \quad (3.9)$$

フーリエ変換は様々な定義がなされる。要するに式 (3.6) または式 (3.8) で定義された $x(t)$ のフーリエ変換 $X(\omega), X(f)$ を用いて逆変換 (3.7), (3.9) でもとの関数 $x(t)$ になるように係数を定義しておけばよい。また

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{i\omega t} dt = \delta(\omega) \quad (3.10)$$

を用いると式 (3.6), (3.7) による定義も, 式 (3.8), (3.9) による定義もノルム $\|g(\xi)\|$

$$\|g(\xi)\| = \sqrt{\int_{-\infty}^{\infty} |g(\xi)|^2 d\xi} \quad (3.11)$$

の定義のもとでつぎのパーセバルの等式を満たすことがわかる。

$$\|x(t)\| = \|X(\omega)\| = \|X(f)\| \quad (3.12)$$

t 軸上の等間隔 Δt の点 $j\Delta t$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) は式 (3.9) より

$$x(j\Delta t) = \int_{-\infty}^{\infty} X(f) \exp(2\pi i j \Delta t f) df = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{nF}^{(n+1)F} X(f) \exp(2\pi i j f / F) df$$

ここで $F = 1/\Delta t$ である。 $\exp(2\pi i j f / F)$ は周期 F の周期関数だから

$$x(j\Delta t) = \int_0^F X_p(f) \exp(2\pi i j f / F) df \quad (3.13)$$

$$X_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f + nF) \quad (3.14)$$

$X_p(f)$ は周期 F の周期関数だからフーリエ級数に展開でき, (3.13) を考慮すると

$$X_p(f) = \frac{1}{F} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j\Delta t) \exp(-2\pi i f j / F) \quad (3.15)$$

となる。 f 軸上に等区間 $\Delta f = F/N$ の点 $k\Delta f$ ($k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) をとると

$$X_p(k\Delta f) = \frac{1}{F} \sum_{j=-\infty}^{\infty} x(j\Delta t) \exp(-2\pi i k j / N) \quad (3.16)$$

$\exp(-2\pi i k j / N)$ は周期 N の周期関数だから

$$\begin{aligned} X_p(k\Delta f) &= \frac{1}{F} \sum_{j=0}^{N-1} \left\{ \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(j\Delta t + lN\Delta t) \right\} \exp(-2\pi i k j / N) \\ &= \frac{1}{F} \sum_{j=0}^{N-1} x_p(j\Delta t) \exp(-2\pi i k j / N) \\ x_p(t) &= \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(t + lT) \quad , T = N\Delta t \end{aligned}$$

$x_p(t)$ も周期 T の周期関数である。

選点直交関係を用いるとつぎの 1 組の離散フーリエ変換 (Discrete Fourier Transform) が得られる。

離散フーリエ変換
関数 $x(t)$ とそのフーリエ変換 $X(f)$ について

$$x_p(t) = \sum_{l=-\infty}^{\infty} x(t + lT) \quad (3.17)$$

$$X_p(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} X(f + nF) \quad (3.18)$$

とすると, $\Delta t = T/N$, $F = 1/\Delta t$, $\Delta f = F/N = 1/T$, $TF = N$ のとき

$$X_p(k\Delta f) = \Delta t \sum_{j=0}^{N-1} x_p(j\Delta t) \exp(-2\pi i k j / N) \quad (3.19)$$

$$x_p(j\Delta t) = \Delta f \sum_{k=0}^{N-1} X_p(k\Delta f) \exp(2\pi i k j / N) \quad (3.20)$$

ある正の数 f_N が存在し, $|f| > f_N$ に対して, $X(f) = 0$ ならば, $f_N < F/2$ とすると $x(j\Delta t)$ ($j = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) を用いて式 (3.15) で決まる $X_p(f)$ は $X(f)$ と一致し, $x(t)$ が完全に再現されることになる。

$$f_N = N/(2T) = 1/(2\Delta t) = F/2 \quad f_N : \text{Nyquist 周波数} \quad (3.21)$$

一般には $-F/2 < f < F/2$ における誤差は, $\epsilon = \sum_{n \neq 0} X(f + nF)$ だから, これが十分小さくなるように大きな F , すなわち小さな Δt を選ぶことになる。

3.2 FFT アルゴリズム

改めて離散型フーリエ変換を

$$C(k) = \sum_{j=0}^{N-1} X(j) \exp(\mp 2\pi i k j / N) \quad k = 1, 2, \dots, N-1 \quad (3.22)$$

とする。FFT (Fast Fourier Transform) とはこれを効率的に行うアルゴリズムの総称である。以下では岩波講座「情報科学 18 数値計算」にしたがって FFT アルゴリズムを説明する。

いま, $N = r_1 \cdot r_2$ とすると,

$$\begin{aligned} k &= k_1 r_1 + k_0, \quad (k_1 = 0, 1, \dots, r_2 - 1, k_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1) \\ j &= j_1 r_2 + j_0, \quad (j_1 = 0, 1, \dots, r_1 - 1, j_0 = 0, 1, \dots, r_2 - 1) \end{aligned}$$

$C(k) = C(k_1 r_1 + k_0), X(j) = X(j_1 r_2 + j_0)$, さらに $\exp(\mp 2\pi i p / N) = W^p$ とおくと

$$\begin{aligned} C(k) &= \sum_{j_0} \sum_{j_1} X(j_1 r_2 + j_0) W^{(k_1 r_1 + k_0)(j_1 r_2 + j_0)} \\ W^{(k_1 r_1 + k_0)(j_1 r_2 + j_0)} &= W^{j_0 k_0} W^{k_0 j_1 r_2} W^{k_1 j_0 r_1} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} C(k) &= \sum_{j_0} X_1(j_0, k_0) W^{k_1 r_1 j_0}, \quad k_0 = 0, 1, \dots, r_1 - 1 \\ X_1(j_0, k_0) &= W^{j_0 k_0} \sum_{j_1} X(j_1 r_2 + j_0) W^{k_0 j_1 r_2}, \quad j_0 = 0, 1, \dots, r_2 - 1 \end{aligned}$$

よって N が $N = r_1 \cdot r_2$ と因数分解できるならば離散型フーリエ変換は大きさ r_1 の r_2 個の変換と大きさ r_2 の r_1 個の変換の 2 段階に分解できる。それぞれ演算回数は $r_2 r_1 r_2, r_1 r_2 r_1$ であり, 合わせて $r_1 r_2 (r_1 + r_2)$ となる。離散型フーリエ変換はそのままでは N^2 個の演算が必要であり, 2 段階に分解することによって $(r_1 + r_2)/r_1 r_2$ の割合で演算回数を少なくすることが出来る。

一般に $N = r_m r_{m-1} \cdots r_2 r_1$ と分解できるとき,

$$N_0 = 1, \quad N_{l+1} = r_{l+1} N_l \quad (= r_{l+1} r_l \cdots r_1)$$

$$\tilde{N}_m = 1, \quad \tilde{N}_l = N / N_l \quad (= r_m r_{m-1} \cdots r_{l+1}), \quad l = 0, 1, \dots, m-1$$

とにおいて広義離散型フーリエ変換

$$X_l(j, k) = \sum_{p=0}^{N_l-1} X(j + p \tilde{N}_l) W^{k(j + p \tilde{N}_l)}, \quad 0 \leq j < \tilde{N}_l, \quad 0 \leq k < N_l \quad (3.23)$$

を定義すると離散型フーリエ変換 (3.22) に対してつぎの手続きが得られる。

一般基底の F F T

$N = r_m r_{m-1} \cdots r_2 r_1$, $N_0 = 1$, $N_l = r_l N_{l-1}$, $\tilde{N}_m = 1$, $\tilde{N}_l = N/N_l$ ($l = 1, 2, \dots, m$) とすると

$$X_0(j, 0) = X(j), \quad 0 \leq j < N$$

からはじめて, $l = 1, 2, \dots, m$ について以下を繰り返す。

$$X_l(j, k + sN_{l-1}) = W^{jsN_{l-1}} \sum_{t=0}^{r_l-1} X_{l-1}(j + t\tilde{N}_l, k) W^{Nst/r_l} \quad (3.24)$$

$$0 \leq s < r_l, \quad 0 \leq k < N_{l-1}, \quad 0 \leq j < \tilde{N}_l$$

結果は

$$C(k) = X_m(0, k), \quad 0 \leq k < N$$

l 段階の j, k に対して各 t, s に相当して複素数の乗算が r_l^2 回となる。変換を完了するためには

$$\sum_{l=1}^m \sum_{j=1}^{\tilde{N}_{l-1}} \sum_{k=0}^{N_{l-1}-1} r_l^2 = N(r_1 + r_2 + \cdots + r_m)$$

回の計算となり N^2 に比べ非常に少なくなる。

$N = 2^m$ すなわち基底が 2 の場合, 変換は

$$X_l(j, k) = X_{l-1}(j, k) + X_{l-1}(j + 2^{m-l}, k)$$

$$X_l(j, k + 2^{l-1}) = W^{2^{l-1}j} \{X_{l-1}(j, k) - X_{l-1}(j + 2^{m-l}, k)\} \quad (3.25)$$

$$0 \leq k < 2^{l-1}, \quad 0 \leq j < 2^{m-l}$$

となる。計算を効率的に進めるため, すなわち中間結果の記憶場所や, データの転送回数を出来るだけ少なくするため「中間結果の重ね書き」を行う。

そのためにまず $X_l(j, k) = X_l(j \cdot 2^l + k)$ によって 1 次元に並べてみる。 j, k は $m-l, l$ ビットの整数だから, 各 j_i, k_i は 0 か 1 とすると

$$j = j_l 2^{m-l-1} + j_{l+1} 2^{m-l-2} + \cdots + j_{m-1} = (j_l j_{l+1} \cdots j_{m-1})$$

$$k = k_{l-1} 2^{l-1} + k_{l-2} 2^{l-2} + \cdots + k_0 = (k_{l-1} k_{l-2} \cdots k_0)$$

$$j 2^l + k = (j_l j_{l+1} \cdots j_{m-1} k_{l-1} k_{l-2} \cdots k_0)$$

後の議論のために $\{j_i\}$ の並べ方が $\{k_i\}$ と逆にしてある。 $m-l$ ビットの整数 j のビット反転を次のように定義する。

$$j^* = (j_l j_{l+1} \cdots j_{m-1})^* = (j_{m-1} j_{m-2} \cdots j_l)$$

いま (3.25) で $X_l(j, k)$ の番号 j のビット反転を行うと, それにしたがって他の要素も変わる。要素 $X_l(j, k)$ は $m-l$ ビットの反転を受けるが, 要素 $X_{l-1}(j, k)$ は $m-l+1$ ビットの反転を受ける。 $m-l$ ビットの j が $m-l+1$ ビットの反転を受けるときは, j の先頭に 0 をつけ, $2j^*$ となる。また $m-l$ ビットの j の先頭に 1 をつけた $m-l+1$ ビットの整数 $j + 2^{m-l}$ の $m-l+1$ ビット反転は $2j^* + 1$ となる。

基底 2 の F F T 重ね書き

$$X_0(j^*) = X(j), \quad 0 \leq j < 2^m = N$$

からはじめて, $l = 1, 2, \dots, m$ について以下を繰り返す。

$$\begin{aligned} X_l(j^*2^l + k) &= X_{l-1}(j^*2^l + k) + X_{l-1}(j^*2^l + k) \\ X_l(j^* + 2^{l-1} + k) &= W^{2^{l-1}j} \{X_{l-1}(j^*2^l + k) - X_{l-1}(j^*2^l + k)\} \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$0 \leq k < 2^{l-1}, \quad 0 \leq j^* < 2^{m-l}$$

結果は

$$C(k) = X_m(k), \quad 0 \leq k < N$$

となる。ここで位相シフト $W^{2^{l-1}j}$ の j は反転によって影響を受けない。(3.26) から j^*, k によって一意的にきまる第 l 段の要素 $X_l(j^*2^l + k), X_l(j^* + 2^{l-1} + k)$ は, 第 $l-1$ 段の要素 $X_{l-1}(j^*2^l + k), X_{l-1}(j^* + 2^{l-1} + k)$ のみから影響を受け, 重ね書きが可能なることがわかる。このため第 1 に入力データ $(X(j), 0 \leq j < N)$ をビット反転して並べ替えること, 2 番目に位相シフト $W^{2^{l-1}j}$ を効率的に計算する必要が発生した。

まずビット反転数の生成法について考える。いま p ビットの整数 $j = (j_0j_1 \cdots j_{p-1})$ のビット反転 j^* を p ビット右にずらした数を

$$\alpha_j = 2^{-p}j^* = 0.j_{p-1}j_{p-2} \cdots j_0 \quad (3.27)$$

とすると, 各 α_j は

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2^{-1}$$

からはじめて, 順次

$$\alpha_{2j} = \frac{1}{2}\alpha_j, \quad \alpha_{2j+1} = \frac{1}{2}\alpha_j + \frac{1}{2}$$

によって求められる。これと同じことであるが位相シフトの計算に便利な次のアルゴリズムを用いる。

ビット反転数の生成

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2^{-1}$$

からはじめて, $p = 1, 2, \dots$ について

$$\begin{aligned} \alpha_{2^p} &= \frac{1}{2}\alpha_{2^{p-1}} \\ \alpha_{2^p+j} &= \alpha_j + \alpha_{2^p}, \quad 1 \leq j < 2^p \end{aligned} \quad (3.28)$$

N ビットの j 番のデータをビット反転した j^* 番の位置に並べ替える。 j と j^* は 1 対 1 に対応しており, $(j^*)^* = j$ だからを $j^* < j$ の組 $X(j)$ と $X(j^*)$ について入れ替えればよい。

$$j^* = \phi_n(j)$$

とすると, (3.28) の α_j を用いて, $\phi_m(j) = 2^m\alpha_j$ とおける。さらに m を偶数として $m_h = m/2$ とすると, $0 \leq j_1 < 2^{m_h}, 0 \leq j_2 < 2^{m_h}$ の組 j_1, j_2 について, m ビット数 $j = \phi_m(j_2) + j_1$ には反転数 $j^* = \phi_m(j_1) + j_2$

が対応し、全ての m ビット数を覆い尽くす。したがって表 $(\phi_m(j), j = 0, 1, \dots, 2^{m_h})$ を作成しておけば、反転位置への並べ替えが可能となる。

次に位相シフト $W^{2^{l-1}j}$ についてのべる。手続き (3.26) では、 j^* を改めて j と見なして処理すればよいが、それに応じて位相シフトは $W^{2^{l-1}j^*}$ を計算することになる。

$$W^{2^{l-1}j^*} = \exp(\mp \frac{i\pi j^*}{2^{m-l}}) = \exp(\mp i\pi\alpha_{m-l}(j)) = W^*(j)$$

ここで \mp はフーリエ変換、及び逆変換に対応している。したがって手続き (3.28) によって

$$\begin{aligned} W^*(0) &= 1, & W^*(1) &= \mp i \\ W^*(2^p) &= \sqrt{W^*(2^{p-1})}, & W^*(2^p + j) &= W^*(j) \times W^*(2^p) \end{aligned}$$

データがあらかじめ実部、虚部に分かれているときは、位相 $W^*(j)$ も $W^*(j) = c(j) + is(j)$ と分離して扱う。

$$\begin{aligned} c(0) &= 1, & s(0) &= 0, & c(1) &= 0, & s(1) &= \mp 1 \\ c(2^p) &= \sqrt{1 - c(2^{p-1})^2}, & s(2^p) &= \mp \sqrt{1 - c(2^p)^2} \\ c(2^p + j) &= c(j) \cdot c(2^p) - s(j) \cdot s(2^p), & s(2^p + j) &= c(j) \cdot s(2^p) + s(j) \cdot c(2^p) \end{aligned}$$

あらかじめ、 $N/2$ 個の $c(j), s(j)$ の表を計算しておけばよい。

以上の手続きに基づいてプログラミングしたものが以下の応用で用いているサブルーチン 'fft' である。FORTRAN の標準関数にはビット反転が定義されていないため、上述のような少々面倒な操作が必要であった。データが実数の場合、偶奇性がわかっている場合など、それぞれに対応したより高速の処理が可能である。

3.3 FFT の若干の応用

3.3.1 フーリエ級数

関数 $x(t)$ が実関数とする。即ち $x(t)^* = x(t)$ とする。このとき (3.2) よりフーリエ係数は Hermite 対称 $c(k)^* = c(-k)$ ($*$ は複素共役) となる。したがって、ここで

$$a_k = 2\text{Re}(c(k)) \quad , \quad b_k = -2\text{Im}(c(k)) \quad (3.29)$$

とおくと、実関数 $x(t)$ のフーリエ級数は

$$x(t) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos 2\pi kt/T + \sum_{k=1}^{\infty} b_k \sin 2\pi kt/T \quad (3.30)$$

となる。また関数 $x(t)$ の Hermite 対称性 $x(-t) = x(t)^*$ はフーリエ係数の実数性 $c(k)^* = c(k)$ に対応し、関数 $x(t)$ の Hermite 歪対称性 $x(-t) = -x(t)^*$ はフーリエ係数の虚数性 $c(k)^* = -c(k)$ に対応する。実数かつ Hermite 対称は偶関数 $x(-t) = x(t)$ であり、 $c(k) = c(-k) = c(k)^*$ となり、級数はフーリエ cosine 級数となる。また実数かつ Hermite 歪対称は奇関数 $x(-t) = -x(t)$ であり、 $c(k) = -c(-k) = -c(k)^*$ となり、級数はフーリエ sine 級数となる。

離散フーリエ係数 $c_p(k)$ は周期 N の周期関数だから $c_p(-k) = c_p(N - k)$ であり、データの実数性、即ちフーリエ係数の Hermite 対称性は $c_p(N - k)^* = c_p(k)$, ($0 \leq k < N$) となる。したがって

実偶関数 $x(j\Delta t)^* = x(j\Delta t) = x((N-j)\Delta t) \rightarrow c_p(k)^* = c_p(k) = c_p(N-k)$
 実奇関数 $x(j\Delta t)^* = x(j\Delta t) = -x((N-j)\Delta t) \rightarrow \text{Im}(c_p(k)) = -\text{Im}(c_p(N-k)), \text{Re}(c_p(k)) = 0$
 となる。

フーリエ級数にはつぎの収束性の定理が成り立つ。

周期 T の関数 $x(t)$ が区分的に滑らかならば, $x(t)$ のフーリエ級数は

(1) $x(t)$ が連続な点 t では, $x(t)$ に収束する。

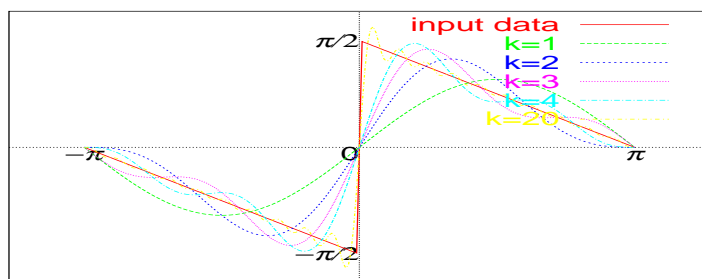
(2) $x(t)$ が不連続な点 t では,

$$\frac{1}{2}\{x(t-0) + x(t+0)\}, \quad -0, +0 \text{ は左極限, 右極限}$$

に収束する。

したがってフーリエ係数 a_k, b_k を得るには, まず不連続点での値をそれぞれの右極限, 左極限の平均値で定義し直しておくことが必要である。それを F F T 変換し, $1/N$ を乗じたものを $c(k)$ とみなし, 式 (3.29) にしたがって求めればよい。付録のプログラムにあるサブルーチン 'fft' はフーリエ変換 (3.6) に対応させてあるから, $1/N$ の代わりに $\sqrt{2\pi}$ を乗じておく。

図はフーリエ係数を解析的ではなく, F F T で求め, フーリエ級数の収束の速さを調べたものである。



ファイル 'fseris.for' はいくつかの例について, フーリエ級数の収束を調べるプログラムである。結果は GNU PLOT のスクリプトファイル 'fseris.txt' で表示することが出来る。以下計算例はいずれも $m = 10, N = 1024$ を用いている。

3.3.2 相関関数

時間に対して不規則に変化する量 $x(t)$ の τ だけずれた時間との積の平均量

$$C(t, \tau) = E[x^*(t)x(t + \tau)]$$

を自己相関関数 (auto-correration funtion) といい, 時間間隔 τ をラグ (lag) という。平均操作 E はアンサンブル平均だがこれを時間平均に置き換え, 時刻 t に無関係とすると

$$C(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t)x(t + \tau) dt \quad (3.31)$$

$-T/2 \leq t \leq T/2$ 以外では 0 となる関数を $x(t)$ としそのフーリエ変換を $X_T(\omega)$ とすると

$$\begin{aligned} C(\tau) &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{i\omega(t+\tau)} d\omega \right] dt \\ &= \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\infty}^{\infty} X_T(\omega) e^{i\omega\tau} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-T/2}^{T/2} x^*(t) e^{i\omega t} dt \right] d\omega \end{aligned}$$

だから

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(\omega) X_T^*(\omega)}{T} \right] e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.32)$$

$C(0) = \bar{x}^2$ だから

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(\omega) X_T^*(\omega)}{T} \right] d\omega \quad (3.33)$$

パワースペクトル $S(\omega)$ を

$$S(\omega) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{X_T(\omega) X_T^*(\omega)}{T} \quad (3.34)$$

で定義すれば

$$\bar{x}^2 = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) d\omega \quad (3.35)$$

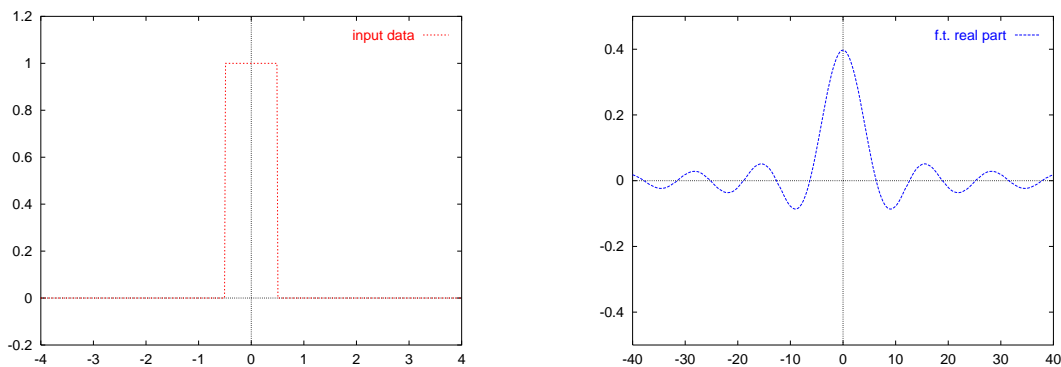
を満たし,

$$C(\tau) = \int_{-\infty}^{\infty} S(\omega) e^{i\omega\tau} d\omega \quad (3.36)$$

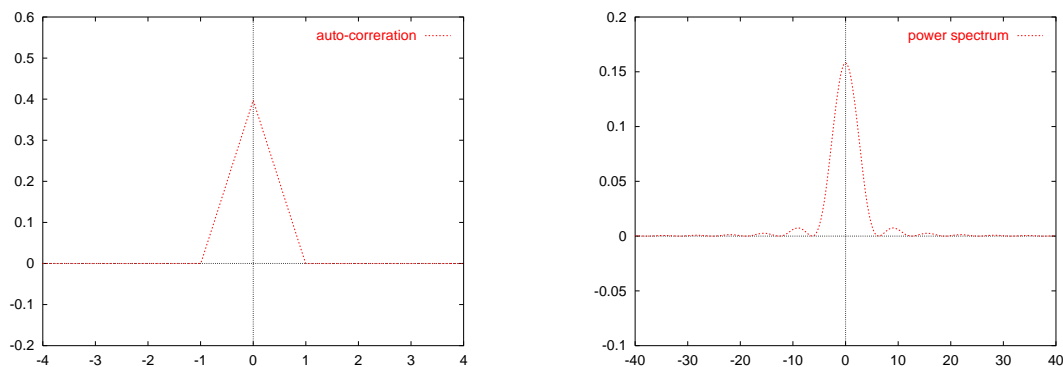
$$S(\omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} C(\tau) e^{-i\omega\tau} d\tau \quad (3.37)$$

となる。すなわち相関関数とパワースペクトルはフーリエ変換で結びついている。この関係を Wiener-Khintchine の公式という。

図は矩形パルスを F F T 変換及び逆変換によってどの程度再現できるかを示したものである。



下の図は矩形パルスの自己相関関数とパワースペクトルを F F T で求めたものである。



ファイル'fftm.for' は各いくつかの関数型データに対する F F T 変換と、自己相関、パワースペクトルを求

めるプログラムである。各結果は GNU PLOT でスクリプトファイル'fft.m.txt' をロードして表示することが出来る。変域パラメータは変更を要す。

3.3.3 ランダム波のシミュレーション

パワースペクトル

$$S(\omega) = 2AB \left[\frac{1}{B^2 + (\omega + \omega_0)^2} + \frac{1}{B^2 + (\omega - \omega_0)^2} \right]$$

を持つランダム波を生成してみよう。(日野幹雄 スペクトル解析より)

ランダム波 $x(t)$ を位相のたまため非常に多くの周期波の重ね合わせと考えて

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} X(\omega) e^{i\omega t} d\omega = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} |X(\omega)| e^{i(\omega t + \theta(\omega))} d\omega$$

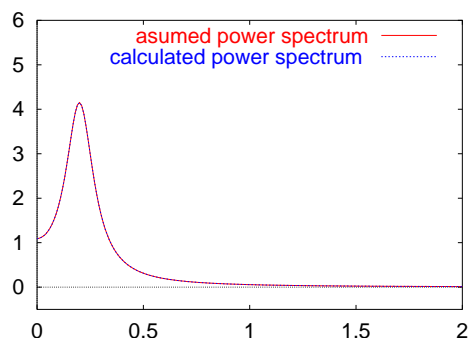
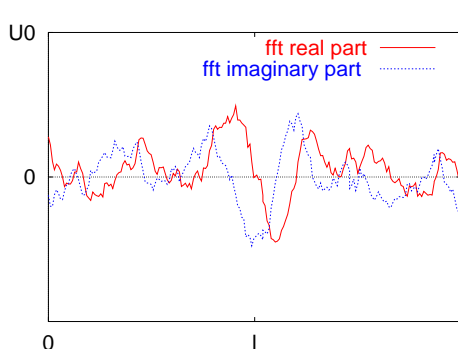
ここに $\theta(\omega)$ は $0 \leq \theta(\omega) < 2\pi$ の一様乱数である。パワースペクトル $S(\omega)$ とフーリエ成分 $X(\omega)$ とは $S(\omega) = X(\omega)X^*(\omega)/T$ だから

$$|X(\omega)| = \sqrt{T \cdot S(\omega)}$$

したがって

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{T \cdot S(\omega)} e^{i\theta(\omega)} e^{i\omega t} d\omega$$

となる。例として、 $A = 1.0, B = 0.5, \omega_0 = 0.4\pi$ の計算結果を示す。ランダム波として、実部、虚部のいずれも用いることが出来る。



3.3.4 積分方程式

合成積 (たたみ込み) を

$$f * g = \int_{-\infty}^{\infty} f(t - \tau)g(\tau)d\tau$$

で定義するとそのフーリエ変換は

$$\mathcal{F}\{f * g\} = \sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{f\}\mathcal{F}\{g\}$$

となる (合成積定理)。 $\sqrt{2\pi}$ はフーリエ変換の定義を式 (3.9) で定義したときでてくる係数である。積分方程式

$$x(t) + \int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t)$$

は各関数 $x(t), g(t), f(t)$ のフーリエ変換を $X(\omega), G(\omega), F(\omega)$ とすると

$$X(\omega) + \sqrt{2\pi}G(\omega)X(\omega) = F(\omega)$$

となる。したがって

$$X(\omega) = \frac{F(\omega)}{1 + \sqrt{2\pi}G(\omega)}$$

となり、解 $x(t)$ はその逆変換によって求められる。

同様に

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(t - \tau)x(\tau)d\tau = f(t)$$

も解ける。

例題として積分方程式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x(\tau)}{(t - \tau)^2 + a^2} d\tau = \frac{1}{t^2 + b^2} \quad (0 < a < b)$$

を考える。フーリエ変換でもとめた積分公式

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos \omega x}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-a|\omega|}$$

を用いると

$$\mathcal{F}\left\{\frac{1}{x^2 + a^2}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\omega\xi}}{\xi^2 + a^2} d\xi = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} \frac{\cos \omega\xi}{\xi^2 + a^2} d\xi = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{a} e^{-a|\omega|}$$

だから、積分方程式の両辺のフーリエ変換

$$\sqrt{2\pi}\mathcal{F}\{x\}\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + a^2}\right\} = \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + b^2}\right\}$$

にこれらを代入し、これを解くと

$$\mathcal{F}\{x\} = X(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{a}{b} e^{-(b-a)|\omega|}$$

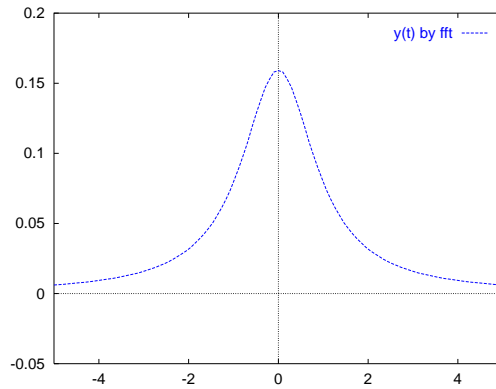
となる。逆変換して

$$x(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^{\infty} X(\omega) \cos \omega t d\omega = \frac{a}{b\pi} \int_0^{\infty} e^{-(b-a)\omega} \cos \omega t d\omega$$

(積分はラプラス変換公式を使おう)。したがって解析解は

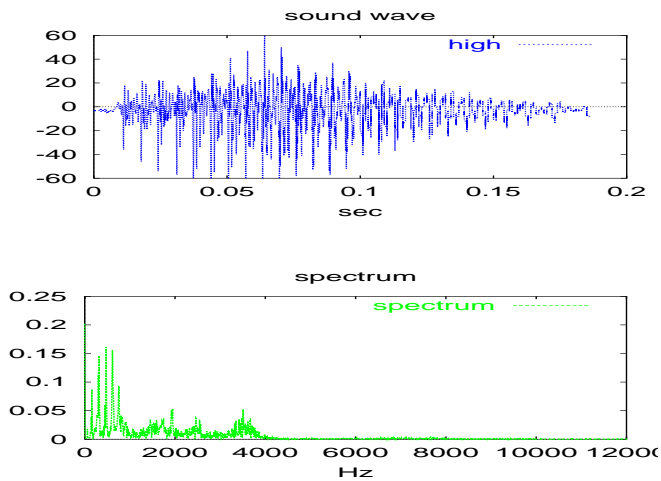
$$x(t) = \frac{(b-a)a}{b\pi(t^2 + (b-a)^2)}$$

となる。一方、FFTによって $\mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + a^2}\right\}, \mathcal{F}\left\{\frac{1}{t^2 + b^2}\right\}$ のフーリエ変換を数値的に求め、その商から $X(\omega)$ を計算し、これをまたFFTによって逆変換して $x(t)$ を数値的に求めることができる。図は $a = 1, b = 2$ の場合について解析解とFFTによる数値解を比較したものである。



3.3.5 音声分析

マイクによる音声は '*.wav' 形式で保存される。図はこれをテキスト形式に変換したものをプロットしたものである。サンプリング周波数は 22050Hz, 約 0.2 秒の音声データである。データ数が $m=12$, $n=4096$ に対して不足するが、不足分は 0 を付加して処理すればよい。これを FFT 変換して周波数分析が出来る。したがって、各種の加工（フィルタなど）を行い、音声に逆変換することもできる。ファイル 'fftm3.for' と 'fftm3.txt' は音声のテキストファイルの FFT 変換、逆変換を行うプログラムとその結果の図示のプログラムです。



(注. wave ファイルとテキストファイルの相互変換は何種類かのフリーウェアが出回っていますから、これを利用すればよい。ファイル 'high.txt' に (周波数, 実部, 虚部,) のデータが与えてあります。音声に変換してみてください。)

第4章 付録2 一座標変換と2階偏微分方程式の表現

4.1 積分公式

3次元積分に関するいくつかの公式を列挙しておく。

$\mathbf{A}, (A_i(x), i = 1, 2, 3)$ を3次元 $(x = (x_1, x_2, x_3))$ の境界 S で囲まれた領域 V で連続な1階導関数を持つ関数とする。境界 S での領域 V から外向きの法線方向の単位ベクトルを \mathbf{n} , $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ とする。

$$\frac{\partial}{\partial n} = \sum_{i=1}^3 n_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (4.1)$$

は S の外向きの法線 \mathbf{n} の方向の微分演算子を表す。

関数 u の傾き $\text{grad } u$ を

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3, \quad \text{すなわち } (\text{grad } u)_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.2)$$

ベクトルの発散 $\text{div } \mathbf{A}$ を

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \quad (4.3)$$

ベクトルの回転 $\text{rot } \mathbf{A}$ を

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_3}{\partial x_2} - \frac{\partial A_2}{\partial x_3} \right) \mathbf{e}_1 + \left(\frac{\partial A_1}{\partial x_3} - \frac{\partial A_3}{\partial x_1} \right) \mathbf{e}_2 + \left(\frac{\partial A_2}{\partial x_1} - \frac{\partial A_1}{\partial x_2} \right) \mathbf{e}_3 \quad (4.4)$$

すなわち

$$(\text{rot } \mathbf{A})_i = \frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}, \quad (i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (4.5)$$

とする。Laplace の演算子 (ラプラシアン) Δ を

$$\Delta = \text{div grad} = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (4.6)$$

とする。つぎの一連の公式が成り立つ (証明はたとえば「微積分」先浜敬一著, 学術図書出版を参照して下さい)。

$$\iiint_V \sum_{i=1}^3 \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dv = \iint_S \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha n_\alpha dS \quad (\text{ガウスの積分公式}) \quad (4.7)$$

あるいはベクトル記法では

$$\iiint_V \text{div } \mathbf{A} dv = \iint_S \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{ガウスの積分公式}) \quad (4.8)$$

$$\int \int \int_V (\phi \Delta \psi - \psi \Delta \phi) dv = \int \int_S (\phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n}) dS \quad (\text{Green の公式}) \quad (4.9)$$

空間内の曲面 S 上での法線ベクトル \mathbf{n} , 曲面 S を囲む曲線 C に沿う単位接線ベクトルを \mathbf{t} , 線素を $ds = \mathbf{t} ds$ とし $(i, j, k) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ とすると

$$\int \int_S \sum_i^3 (\frac{\partial A_k}{\partial x_j} - \frac{\partial A_j}{\partial x_k}) n_i dS = \oint_C \sum_{\alpha=1}^3 A_\alpha t_\alpha ds \quad (\text{Stokes の公式}) \quad (4.10)$$

あるいはベクトル記法では

$$\int \int_S \text{rot} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (\text{Stokes の公式}) \quad (4.11)$$

4.2 曲線座標

座標変換 $(x_1, x_2, x_3) \longleftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を考える。

$$x_1 = x_1(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_2 = x_2(\xi_1, \xi_2, \xi_3), \quad x_3 = x_3(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \quad (4.12)$$

とすると,

$$dx_i = \frac{\partial x_i}{\partial \xi_1} d\xi_1 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_2} d\xi_2 + \frac{\partial x_i}{\partial \xi_3} d\xi_3 = \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} d\xi_\alpha, \quad (i = 1, 2, 3) \quad (4.13)$$

となるが, 逆に (ξ_1, ξ_2, ξ_3) が (x_1, x_2, x_3) で一意的に表されるための条件は

$$\det \left(\frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} \right) \neq 0 \quad (4.14)$$

となる。デカルト座標の基本単位ベクトルを $\{\mathbf{e}_i, i = 1, 2, 3\}$, 微小変位 $d\mathbf{r}$ を

$$d\mathbf{r} = \mathbf{e}_1 dx_1 + \mathbf{e}_2 dx_2 + \mathbf{e}_3 dx_3 = \mathbf{g}_1 d\xi_1 + \mathbf{g}_2 d\xi_2 + \mathbf{g}_3 d\xi_3 \quad (4.15)$$

と表したとき, 式 (4.13) を代入して

$$\mathbf{g}_\alpha = \sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} \mathbf{e}_i, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (4.16)$$

ξ_α 方向の単位ベクトルは $\mathbf{g}_\alpha / g_\alpha$ である。微小体積要素 dV は

$$\begin{aligned} dV = dx_1 dx_2 dx_3 &= |\mathbf{g}_1 d\xi_1 \cdot (\mathbf{g}_2 d\xi_2 \times \mathbf{g}_3 d\xi_3)| = |\mathbf{g}_1 \cdot (\mathbf{g}_2 \times \mathbf{g}_3)| d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \\ &= \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_1}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_2}{\partial \xi_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial \xi_1} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_2} & \frac{\partial x_3}{\partial \xi_3} \end{vmatrix} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \end{aligned} \quad (4.17)$$

ξ_α が一定の曲面を座標面, 座標面の交線を座標線という。すべての座標面 (同じことだが座標線) が直交する曲線座標は直交するという。よって直交曲線座標系 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) は

$$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\alpha} \frac{\partial x_i}{\partial \xi_\beta} = 0, \quad (\alpha, \beta = 1, 2, 3, \alpha \neq \beta) \quad (4.18)$$

となる。また

$$g_\alpha = \sqrt{\left(\frac{\partial x_1}{\partial \xi_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_2}{\partial \xi_\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial x_3}{\partial \xi_\alpha}\right)^2}, \quad (\alpha = 1, 2, 3) \quad (4.19)$$

である。 (g_1, g_2, g_3) は Lamé のパラメータとよばれる。微小体積要素 dV は

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 = g_1 g_2 g_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (4.20)$$

となる。

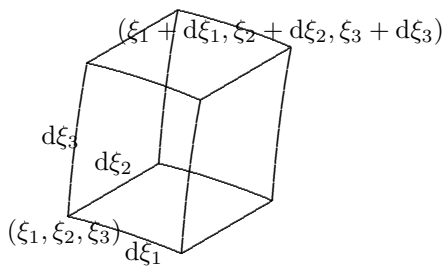
つぎに各微分演算子を曲線座標で表す。

$$\text{grad } u = \frac{\partial u}{\partial x_1} \mathbf{e}_1 + \frac{\partial u}{\partial x_2} \mathbf{e}_2 + \frac{\partial u}{\partial x_3} \mathbf{e}_3 = \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \frac{\mathbf{g}_1}{g_1^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \frac{\mathbf{g}_2}{g_2^2} + \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \frac{\mathbf{g}_3}{g_3^2} \quad (4.21)$$

すなわち

$$(\text{grad } u)_\alpha = \frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

点 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ を対角線の頂点とする微小平行 6 面体の体積を V とする。ベクトル \mathbf{A} にガウスの公式 (4.7) を適用して

$$\begin{aligned} & \iiint_V \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} dv \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \iint_{S(\xi_\alpha)} A_\alpha(\xi_\alpha) \times (-1) dS \\ &+ \sum_{\alpha=1}^3 \iint_{S(\xi_\alpha + d\xi_\alpha)} A_\alpha(\xi_\alpha + d\xi_\alpha) \times (+1) dS \end{aligned}$$


平均値の定理を適用すると

$$\begin{aligned} \sum_i \frac{\partial A_i}{\partial x_i} V &= - \sum_{\alpha=1}^3 \overline{A_\alpha(\xi_\alpha)} S(\xi_\alpha) + \sum_{\alpha=1}^3 \overline{A_\alpha(\xi_\alpha + d\xi_\alpha)} S(\xi_\alpha + d\xi_\alpha) \\ &= \sum_{\alpha=1}^3 \frac{\partial (\overline{A_\alpha} S(\xi_\alpha))}{\partial \xi_\alpha} d\xi_\alpha + O(|d\mathbf{r}|^2) \end{aligned}$$

$V = g_1 g_2 g_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3, S(\xi_\alpha) = g_\beta g_\gamma d\xi_\beta d\xi_\gamma, (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$ として, $V \rightarrow 0$ では

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{A} &= \frac{\partial A_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_2}{\partial x_2} + \frac{\partial A_3}{\partial x_3} \\ &= \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} (g_2 g_3 A_{\xi_1}) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} (g_3 g_1 A_{\xi_2}) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} (g_1 g_2 A_{\xi_3}) \right] \quad (4.22) \end{aligned}$$

つぎに, 同様に点 $(\xi_1, \xi_2, \xi_3), (\xi_1 + d\xi_1, \xi_2 + d\xi_2, \xi_3 + d\xi_3)$ を対角線の頂点とする微小平行 6 面体の側面のうち, 点 (ξ_1, ξ_2, ξ_3) を頂点とする ξ_α に垂直な微小面を考える。ベクトル \mathbf{A} に Stokes の公式 (4.10) を適用して

$$\begin{aligned} (\text{rot } \mathbf{A})_\alpha S(\xi_\alpha) &= A_\beta g_\beta d\xi_\beta + A_\gamma g_\gamma d\xi_\gamma + \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (A_\gamma g_\gamma d\xi_\gamma) d\xi_\beta \\ &\quad - A_\beta g_\beta d\xi_\beta - \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} (A_\beta g_\beta d\xi_\beta) d\xi_\gamma - A_\gamma g_\gamma d\xi_\gamma \\ &= \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (A_\gamma g_\gamma) d\xi_\gamma d\xi_\beta - \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} (A_\beta g_\beta) d\xi_\beta d\xi_\gamma \end{aligned}$$

したがって

$$(\text{rot}\mathbf{A})_\alpha = \frac{1}{g_\beta g_\gamma} \left\{ \frac{\partial}{\partial \xi_\beta} (g_\gamma A_\gamma) - \frac{\partial}{\partial \xi_\gamma} (g_\beta A_\beta) \right\}, \quad (\alpha, \beta, \gamma) = (1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2) \quad (4.23)$$

が得られる。

また式 (4.22) で

$$A_i = \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad (i = 1, 2, 3) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{A} = \text{grad } u$$

のとき,

$$A_\alpha = \frac{1}{g_\alpha} \frac{\partial u}{\partial \xi_\alpha}, \quad (\alpha = 1, 2, 3)$$

だから,

$$\begin{aligned} \Delta u &= \text{div grad } u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} \\ &= \frac{1}{g_1 g_2 g_3} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{g_2 g_3}{g_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{g_3 g_1}{g_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_3} \left(\frac{g_1 g_2}{g_3} \frac{\partial u}{\partial \xi_3} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.24)$$

また平面上 (2次元) 直交座標では

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} = \frac{1}{g_1 g_2} \left[\frac{\partial}{\partial \xi_1} \left(\frac{g_2}{g_1} \frac{\partial u}{\partial \xi_1} \right) + \frac{\partial}{\partial \xi_2} \left(\frac{g_1}{g_2} \frac{\partial u}{\partial \xi_2} \right) \right] \quad (4.25)$$

となる。

よく使う曲線座標を示す。

円柱座標

$$x_1 = r \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \phi, \quad x_3 = z \quad (r \geq 0) \quad (4.26)$$

$$g_r = 1, \quad g_\phi = r, \quad g_z = 1$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.27)$$

極座標

$$x_1 = r \sin \theta \cos \phi, \quad x_2 = r \sin \theta \sin \phi, \quad x_3 = r \cos \theta \quad (r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi) \quad (4.28)$$

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r, \quad g_\phi = r \sin \theta$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \quad (4.29)$$

2次元極座標

$$x_1 = r \cos \theta, \quad x_2 = r \sin \theta \quad (r \geq 0) \quad (4.30)$$

$$g_r = 1, \quad g_\theta = r$$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \quad (4.31)$$

4.3 2変数の2階偏微分方程式—双曲型，放物型，楕円型

コリヤコフ，グリニエル，スミルノフ「偏微分方程式」にしたがって2変数の2階偏微分方程式の分類を行う。

次の u についての偏微分方程式を考える。

$$A \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2B \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + C \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}) = 0 \quad (4.32)$$

係数 A, B, C が x, y の関数のとき偏微分方程式は半線形といい，ここでは2回連続微分可能な関数とする。以下で A, B, C によって偏微分方程式 (4.32) が3つの型に分類できることを示す。独立変数 x, y を ξ, η に変換する。

$$\xi = \phi_1(x, y) \quad , \quad \eta = \phi_2(x, y) \quad (4.33)$$

ϕ_1, ϕ_2 は2回連続微分可能で，Jacobi 行列式は

$$\frac{D(\phi_1, \phi_2)}{D(x, y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \phi_1}{\partial x} & \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \phi_2}{\partial x} & \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \end{vmatrix} \neq 0 \quad (4.34)$$

を満たすと仮定する。これは逆変換 ($\xi, \eta \rightarrow x, y$) が存在する条件である。

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial y^2} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial y^2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \xi} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x \partial y} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \frac{\partial^2 \eta}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4.35)$$

(4.35) を (4.32) に代入して

$$\tilde{A}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2\tilde{B}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \tilde{C}(\xi, \eta) \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + \tilde{F}(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) = 0 \quad (4.36)$$

ただし

$$\left. \begin{aligned} \tilde{A}(\xi, \eta) &= A \left(\frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \xi}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \xi}{\partial y}\right)^2 \\ \tilde{B}(\xi, \eta) &= A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}\right) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \\ \tilde{C}(\xi, \eta) &= A \left(\frac{\partial \eta}{\partial x}\right)^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C \left(\frac{\partial \eta}{\partial y}\right)^2 \end{aligned} \right\} \quad (4.37)$$

ここで次の量を計算してみる。

$$\begin{aligned}
\tilde{B}^2 - \tilde{A}\tilde{C} &= A^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + B^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + C^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \\
&+ 2AB\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + 2BC\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y}\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right) + 2AC\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} \\
&- \left\{ A^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 4C\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial y} + C^2\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 \right. \\
&+ 2AB\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} + AC\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2 + 2BC\left(\frac{\partial\eta}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} \\
&\left. + 2AB\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\xi}{\partial y} + AC\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\left(\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 + 2BC\left(\frac{\partial\xi}{\partial y}\right)^2\frac{\partial\eta}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} \right\} \\
&= (B^2 - AC)\left(\frac{\partial\xi}{\partial x}\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial y}\frac{\partial\eta}{\partial x}\right)^2 \tag{4.38}
\end{aligned}$$

よって $B^2 - AC$ の符号は変数変換によって変わらない。したがって以下に ϕ_1, ϕ_2 を適当に選ぶことによって、つぎのいずれかにすることができる。

- 場合 (1) $\tilde{A} = 0, \tilde{C} = 0$... 双曲型方程式
- 場合 (2) $\tilde{A} = 0, \tilde{B} = 0$... 放物型方程式
- 場合 (3) $\tilde{A} = \tilde{C}, \tilde{B} = 0$... 楕円型方程式

$B^2 - AC$ の符号は領域全体で一定とする。

次の一階の微分方程式を考える。

$$A\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)^2 + 2B\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y} + \left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)^2 = 0 \tag{4.39}$$

[場合 1] (双曲型方程式)

$B^2 - AC > 0$ とする。 $A = C = 0$ はこの場合の結論になるから、 $A \neq 0$ と仮定する。(4.39) は

$$\left\{ A\frac{\partial\phi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\phi}{\partial y} \right\} \left\{ A\frac{\partial\phi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\phi}{\partial y} \right\} = 0$$

と書け

$$A\frac{\partial\phi}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \tag{4.40}$$

$$A\frac{\partial\phi}{\partial x} + (B - \sqrt{B^2 - AC})\frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \tag{4.41}$$

(4.40) (4.41) の解は (4.39) の解である。いま (4.40) (4.41) を解くため

$$\frac{dx}{A} = \frac{dy}{B + \sqrt{B^2 - AC}}, \quad \frac{dx}{A} = \frac{dy}{B - \sqrt{B^2 - AC}}$$

あるいは

$$A dy - (B + \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0 \tag{4.42}$$

$$A dy - (B - \sqrt{B^2 - AC}) dx = 0 \tag{4.43}$$

を作る。今 (4.42) (4.43) の積分を

$$\phi_1(x, y) = \text{const.}, \quad \phi_2(x, y) = \text{const.} \tag{4.44}$$

とする。このとき (4.44) は (4.40), (4.41) すなわち (4.39) の解である。

(4.44) より

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} dy = 0$$

(4.42) と比較して

$$A \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + (B + \sqrt{B^2 - AC}) \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0$$

即ち ϕ_1 は (4.40) の解である。

曲線 (4.44) は方程式 (4.32) の特性曲線, 方程式 (4.39) は特性方程式という。

(4.33) の ξ, η を

$$\xi = \phi_1(x, y), \quad \eta = \phi_2(x, y) \quad (4.45)$$

とおくと (4.37) によって $\tilde{A} = \tilde{C} = 0$.

また \tilde{B} は (4.34) (4.38) によって領域全体で 0 でないから $2\tilde{B}$ で割ると (4.36) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = \tilde{F}_1(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (\text{双曲型方程式の第 1 の標準形}) \quad (4.46)$$

もし (4.32) が関数 u および 1 階導関数について線形とすると, 変換された方程式も線形となる。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + a(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + c(\xi, \eta) u = f(\xi, \eta) \quad (4.47)$$

また

$$\xi = \mu + \nu, \quad \eta = \mu - \nu \quad (4.48)$$

とおけば (4.46) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \mu^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial \nu^2} = \Phi(\mu, \nu, u, \frac{\partial u}{\partial \mu}, \frac{\partial u}{\partial \nu}) \quad (\text{双曲型方程式の第 2 の標準形}) \quad (4.49)$$

[場合 2] (放物型方程式)

$B^2 - AC = 0$ とする。同時に (4.32) の係数が全て 0 になることはないから A, C のどちらかは 0 ではない。

$A \neq 0$ と仮定する。(4.40) (4.41) は一致し,

$$A \frac{\partial \phi}{\partial x} + B \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4.50)$$

となる。これはまた $B^2 - AC = 0$ を考慮すると

$$B \frac{\partial \phi}{\partial x} + C \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \quad (4.51)$$

とも表せる。放物型では実特性曲線は

$$\phi_1(x, y) = \text{const.} \quad (4.52)$$

の一つしか得られない。

$$\xi = \phi_1(x, y) \quad (4.53)$$

$\phi_2(x, y)$ は (4.34) を満たす任意の関数をとる。

$A \neq 0$ したがって $\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \neq 0$ だから

$$\phi_2(x, y) = x \quad (4.54)$$

ととることが出来る。このとき $A \neq 0$ であり

$$\tilde{B} = (A \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B \frac{\partial \phi_1}{\partial y}) \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + (B \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + C \frac{\partial \phi_1}{\partial y}) \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = 0$$

となる。一方 (4.34) を用いると \tilde{C} は

$$\tilde{C} = \frac{1}{A} (A \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + B \frac{\partial \phi_2}{\partial y})^2 \neq 0$$

となる。

なぜなら, $A \frac{\partial \phi_1}{\partial x} + B \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 0$ より

$$\begin{aligned} (A \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + B \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) \frac{\partial \phi_1}{\partial y} &= A \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} + B \frac{\partial \phi_2}{\partial y} \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \\ &= A \frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - A \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = A (\frac{\partial \phi_1}{\partial y} \frac{\partial \phi_2}{\partial x} - \frac{\partial \phi_1}{\partial x} \frac{\partial \phi_2}{\partial y}) \neq 0 \end{aligned}$$

したがって (4.36) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{F}_2(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (\text{放物型方程式の標準形}) \quad (4.55)$$

もし (4.32) が線形ならば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_1(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_1(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + c_1(\xi, \eta) u = f_1(\xi, \eta) \quad (4.56)$$

[場合 3] (楕円型方程式)

$B^2 - AC < 0$ とする。このとき実特性曲線は存在しない。 ϕ_1, ϕ_2 を (4.39) の複素共役な解として

$$\xi + i\eta = \phi_1(x, y) \quad , \quad \xi - i\eta = \phi_2(x, y) \quad (4.57)$$

とおく。 $\phi_1(x, y) = \xi + i\eta$ を (4.39) に代入して

$$\begin{aligned} A(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 - A(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 - 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} - C(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 \\ + 2i \{ A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} \} = 0 \end{aligned}$$

これより

$$\begin{aligned} A(\frac{\partial \xi}{\partial x})^2 + 2B \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C(\frac{\partial \xi}{\partial y})^2 &= A(\frac{\partial \eta}{\partial x})^2 + 2B \frac{\partial \eta}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + C(\frac{\partial \eta}{\partial y})^2 \\ A \frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x} + B(\frac{\partial \xi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial x}) + C \frac{\partial \xi}{\partial y} \frac{\partial \eta}{\partial y} &= 0 \end{aligned}$$

したがって

$$\tilde{A} = \tilde{C} \quad , \quad \tilde{B} = 0$$

これより (4.36) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} = \tilde{F}_3(\xi, \eta, u, \frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \eta}) \quad (\text{楕円型方程式の標準形}) \quad (4.58)$$

(4.32) が線形ならば

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} + a_2(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \xi} + b_2(\xi, \eta) \frac{\partial u}{\partial \eta} + c_2(\xi, \eta) u = f_2(\xi, \eta) \quad (4.59)$$

4.4 分類の例

例 1. $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - y^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \quad (x > 0, y > 0)$

$B^2 - AC = x^2 y^2 > 0$ だから双曲型, 特性方程式は

$$x dy + y dx = 0, \quad x dy - y dx = 0, \quad \text{積分して } xy = c_1, \quad \frac{y}{x} = c_2$$

よって $\xi = xy$, $\eta = \frac{y}{x}$ と変換すると, 方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{1}{2\xi} \frac{\partial u}{\partial \eta} = 0 \quad (\xi > 0, \eta > 0)$$

となる。

例 2. $2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - 6 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$B^2 - AC = (\frac{1}{2})^2 + 12 = \frac{49}{4} > 0$ だから双曲型, 特性方程式は

$$\frac{dx}{2} = \frac{dy}{\frac{1}{2} + \frac{7}{2}}, \quad \frac{dx}{2} = \frac{dy}{\frac{1}{2} - \frac{7}{2}}, \quad \text{積分して } 2x - y = c_1, \quad 3x + 2y = c_2$$

したがって $\xi = 2x - y$, $\eta = 3x + 2y$ とおくと, 方程式は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0$$

よって一般解は

$$u = \phi(\xi) + \psi(\eta) = \phi(2x - y) + \psi(3x + 2y)$$

例 3. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2x \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$B^2 - AC = x^2 - x^2 = 0$ だから放物型。特性方程式は

$$\frac{dx}{1} = \frac{dy}{x}, \quad y - \frac{x^2}{2} = c$$

したがって新しい変数を $\xi = y - \frac{x^2}{2}$, $\eta = x$ とおくと方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

となる。