

物理II(11 由良) 第1講 クーロンの法則

1 クラスの確認, 自己紹介など

2 基礎電磁気学の学習課題とは

裏面 「Maxwell 方程式への道しるべ」 単位系 参照
 実験・観測事実, 既に”確立”している物理学の基礎観念, 数学的手法が, 電磁気学の確立に如何に融合しているかを楽しんで下さい。論理の展開は, 個別から一般ですが, 具体的には以下の流れを含みます。

a 遠隔作用説から近接作用説への流れ

b 真空の電磁気学から誘電体, 磁性体の電磁気学への流れ

c 定常から非定常への流れ

3 シラバスによる授業計画

授業の課題, 目標の設定

授業計画の説明

なぜ, このような授業計画になったか

教科書, 参考書, 「電磁気学メモ」の説明

「電磁気学メモ」の入手方法の説明を追加

<http://www.las.osakafu-u.ac.jp/~umezawa/>

時間外学習の一つ, 各自「電磁気学ノート」の作成

主な内容 ① 講義のメモをとる。

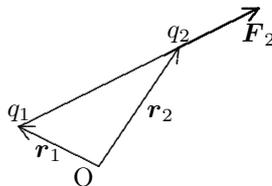
② 演習, 宿題, 課題などに答える。

点電荷に関する Coulomb の法則

F_2 : q_2 が q_1 から受ける力について

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (1)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$



ϵ_0 : 真空の誘電率

は高い精度で確立され, 我々の出発点としてふさわしい。

はじめだから, ちょっとだけ考察を加えておこう。

クーロン力は2体力, 中心力であること

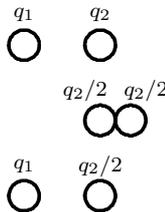
ある一対の電荷の間の力が, 他の第3の電荷の存在によって影響されない。どうもそのようだ。そうでなければ, 話は非常に複雑になる。ただし, 帯電した2つの物体が及ぼし合う力は, 第3の帯電した物体の出現によって, 変化することが多い。それは, 第3の物体の電荷が2つの物体の電荷分布に影響を与え, 2つの物体の電荷分布を変化させ, 相互の力を変化させたと考えられる。これは2体力か3体力かという問題とは別のことである。

中心力であることは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ で示されている。この力は, 力が, またそれから定義される静電場がベクトル量であることを示している。物理学でいうベクトルとは, ベクトル空間の公理を満たすだけでなく, 変位ベクトルと同じ座標の変換性(ガリレイ変換, ローレンツ変換など)を持っていることを指す。中心力で, その大きさが距離のみに依存する力は保存力である。

クーロンによる $q_1 q_2$ に比例すること

q_1 と q_2 でのクーロン力を計測し, さらに q_2 と全く同じ帯電していない導体球を接触させて, $q_2/2$ だけ帯電した導体球をつくり, q_1 と $q_2/2$ で計測してちょうど半分の力を得た。こうした考察を重ねクーロン力は $q_1 q_2$ に比例することを予測した。

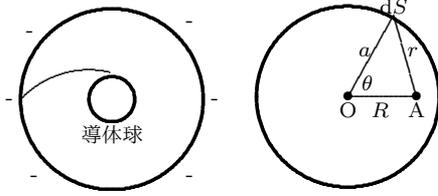
Charles Augustin Coulomb(1736-1806)



距離の逆二乗に比例すること

キャベンディッシュ(1773)は, 導体球殻を帯電させ, 中心に帯電させていない導体球を入れておいて, 導線で導体球殻と内部の導体球を結んだとき, 常に導体球は帯電しないことを見いだした。Henry Cavendish(1731-1810)

導体の球殻



右図のように, 外球の半径を a , 外球に与えられた全電荷を Q とすると, 外球上の電荷密度は $Q/4\pi a^2$ 。外球の微小面積 dS 上の単位電荷が図の球内の A 点につくるポテンシャルを $\phi(r)$ と書くと, 外球表面上の全電荷が A 点につくるポテンシャル $\Phi(R)$ は

$$\Phi(R) = (Q/4\pi a^2) \int_S \phi(r) dS = (Q/4\pi a^2) 2\pi \int_0^\pi \phi(r) a^2 \sin\theta d\theta$$

で与えられる。 $r^2 = a^2 + R^2 - 2aR \cos\theta$, $r dr = aR \sin\theta d\theta$ の関係を利用して, 変数を θ

(演習問題解答付き 教師用 学生用は演習解答なし)

から r にかえると, $\Phi(R) = (Q/2aR) \int_{a-R}^{a+R} \phi(r) r dr$ となる。

ここで, $r\phi(r) = dK(r)/dr$ とおくと, $\Phi(R) = (Q/2aR)[K(a+R) - K(a-R)]$ である。内部の導体球が帯電しないことから, 内部では中心方向の電界は $E(R) = 0$, つまり, $\Phi(R) = k = (\text{一定値})$ である。したがって, $2aRk = Q[K(a+R) - K(a-R)]$ 。これを R で2回微分すると,

$$\frac{d^2 K(a+R)}{d^2 R} = \frac{d^2 K(a-R)}{d^2 R}$$

ここで a と R は任意であるから, $\frac{d^2 K}{d^2 R} = A = (\text{一定値})$ である。これを積分すれば, $dK(r)/dr = Ar + B = r\phi(r)$ となる。これから, $\phi(r) = A + B/r$ の形であることがわかる。 $F(r) \propto -d\phi(r)/dr$ にこれを代入すると, $F(r) \propto B/r^2$ をうる。(砂川重信「電磁気学演習」参照)

クーロン(1785)はねじり天秤を用いて詳細にクーロン力を計測した。(教科書「物理学」小出昭一郎著 参照)

$$F(r) = \frac{k}{r^{2+\delta}}$$

ヘンリー・キャベンディッシュ(1773)

$$|\delta| < \frac{1}{50}$$

マックスウエル(キャベンディッシュ研究所の初代所長)

$$|\delta| < \frac{1}{21600}$$

Plimpton, Lawton (1936)

$$|\delta| < 2 \times 10^{-9}$$

Bartlett, Goldhagen, Phillips (1970)

$$|\delta| < 1.3 \times 10^{-14}$$

実験結果であること

全ては経験と実験に基づくものであり, 精度の問題だけでなく, 確かめられた適用範囲においてのみ信憑性がある。

1C とはどんな量か

1m 離れた2つの1Cの電荷が及ぼし合うクーロン力は $8.9876 \times 10^9 \text{ N}$ となり, 1C はとてつもない大きな電荷量になっている。1C は1Coulombで, 1A(アンペア)の電流が1秒間に流れた電荷の量を表す。後(第8講)で, 1Aは電流の相互作用を用いて定義する。単位系については, そのときに議論する。

例題

The electron and proton of a hydrogen atom are separated (on the average) by a distance of approximately $5.3 \times 10^{-11} \text{ m}$. Find the magnitudes of the electric force and the gravitational force between the two particles.

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|e|^2}{r^2} = 8.99 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{ C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 8.2 \times 10^{-8} \text{ N}$$

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = (6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}) \times \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{ kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{ kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{ m})^2}$$

$$= 3.6 \times 10^{-47} \text{ N}$$

これは, 当面, 水素原子を議論するときには, 万有引力を無視しても良い, ということの意味する。

参考

岩波現代文庫「物理法則はいかに発見されたか」 R.P. ファインマン 江沢洋訳

には, 逆二乗則にしたがう万有引力とクーロン力の違いについての一般大衆向けの話がある。さらにこの本には, このメモでは触れていない電磁誘導における角運動量の保存則, など面白い話題が満載されている。全ての理系の学生にとって, これは必読書である。この講義では, 「理解を助けるため」, できるだけ論理展開に関心を集中し, 以下では, こうした話題のほとんどを割愛する。

物理定数表

(よく使う物理定数の一覧です)

物理量	よく使う記号	MKSA(SI) 単位系による値
素電荷	e	$1.60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$
電子ボルト	eV	$1.60217733 \times 10^{-19} \text{ J}$
真空中の光速	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{ m/s}$
プランクの定数	h	$6.626075 \times 10^{-34} \text{ Js}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1.05457266 \times 10^{-34} \text{ Js}$
アボガドロ数	N_A	$6.0221367 \times 10^{26} \text{ kmol}^{-1}$
気体定数	R	$8.314510 \times 10^3 \text{ J/Kmol}$
ボルツマン定数	$k = R/N_A$	$1.380658 \times 10^{-23} \text{ J/K}$
原子質量単位	u	$1.6605402 \times 10^{-27} \text{ kg}$
真空の透磁率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$
真空の誘電率	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{ C}^2/\text{Nm}^2$
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.9876 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$
電子の質量	m_e	$9.1093897 \times 10^{-31} \text{ kg}$
陽子の質量	m_p	$1.672623 \times 10^{-27} \text{ kg}$
中性子の質量	m_n	$1.6749286 \times 10^{-27} \text{ kg}$
万有引力定数	G	$6.67259 \times 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$

光速は c を用いるが, 混乱が予想されるときのみ, 真空の光速は c_0 を用いる。

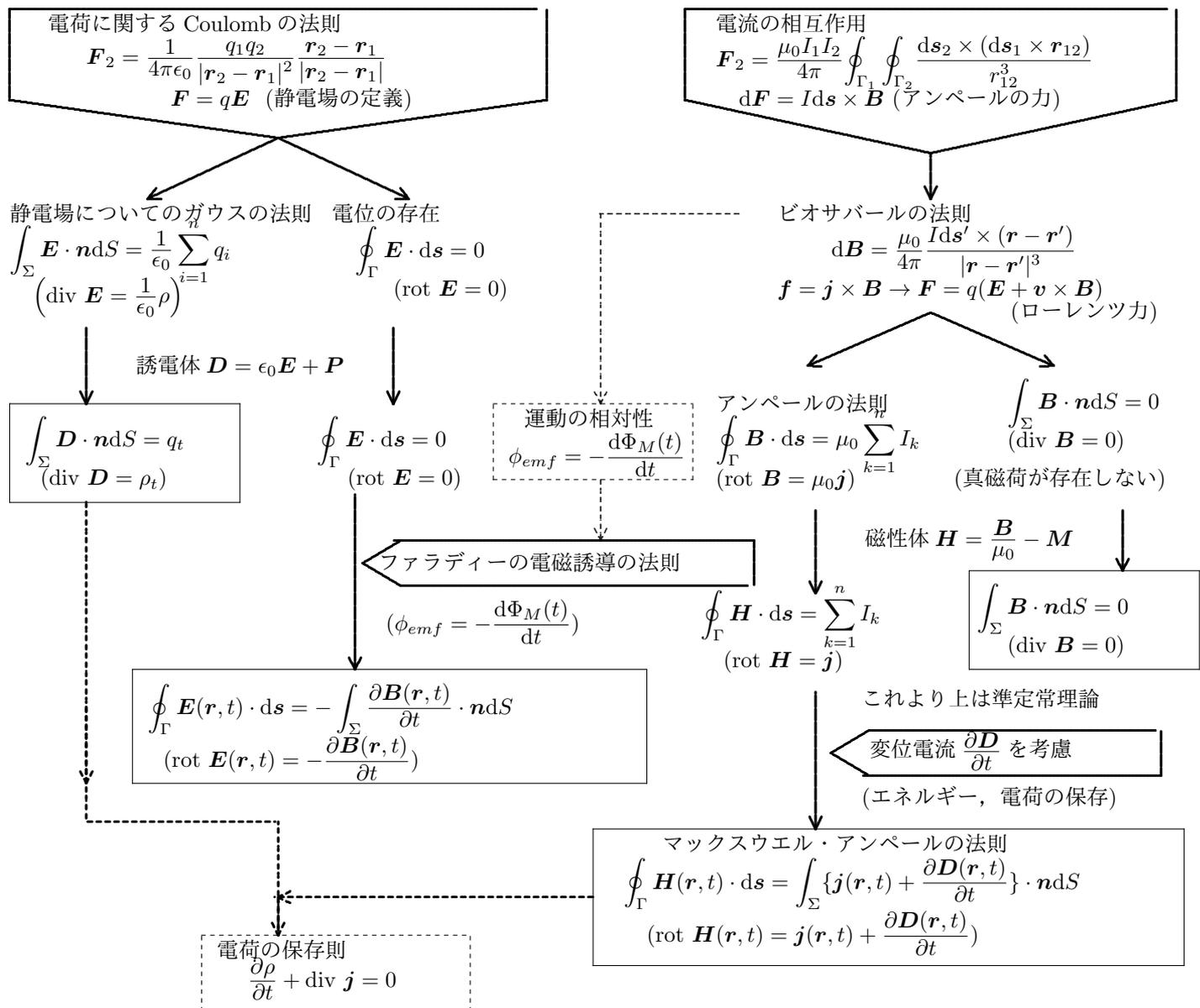
本日の宿題

ベクトル解析の学習を始めよう。

「電磁気学メモ」 p.65~p.68

Maxwell 方程式への道しるべ

以下は必ずしも歴史的な展開と一致するものではないが、Maxwell の方程式への首尾一貫した論理展開の例を示したものである。



MKSA(SI) 単位系

物理量	よく使う記号	MKS(SI) 単位	等価な単位
長さ	l, x	1m	
質量	m	1kg	
時間	t	1s	
角度	θ	1(ラジアン)	
速度	v	1m/s	
加速度	a	1m/s ²	
力	f, F	1N(ニュートン)	=1kg·m/s ²
圧力	p	1Pa(パスカル)	=1N/m ²
エネルギー, 仕事	E, W	1J(ジュール)	=1N·m =1W·s=1kg·m ² /s ²
電力量	Pt	1eV(電子ボルト)	=1C·V(=0.2389cal) =1.602×10 ⁻¹⁹ J
仕事率, 電力	P	1W(ワット)	=1J/s=1V·A=1C·V/s
温度	T	1K(ケルビン)	
エントロピー	S	1J/K	=1kg·m ² /s ² ·K
物質質量	n	1kmol	1N _A = 6.022 × 10 ²⁶ /kmol N _A : アボガドロ数

電磁気を含む単位

物理量	よく使う記号	MKSA(SI) 単位	等価な単位
電流	I	1A(アンペア)	=1C/s
電荷, 電束	q, Q, Φ	1C(クーロン)	=1A·s
電束密度, 電気分極	\mathbf{D}, \mathbf{P}	1C/m ²	=1A·s/m ²
電位, 電圧	ϕ, V	1V(ボルト)	=1N·m/C=1J/C=1Wb/s
電界の強さ	\mathbf{E}	1V/m	=1N/C=1Wb/m·s
電気双極子モーメント	\mathbf{p}	1C·m	=1A·m·s
電気容量	C	1F(ファラッド)	=1C/V=1J/V ² =1C ² /J
誘電率	ϵ	1F/m	=1C ² /N·m ² =1C/V·m
電気感受率	χ_e		=1F/m=1C/V·m
電気抵抗, インピーダンス	R, Z	1Ω(オーム)	=1V/A=1J/C·A=1W/A ²
磁束密度	\mathbf{B}	1T(テスラ)	=1Wb/m ² =1N/A·m=1N·s/C·m =1kg/A·s ² (= 10 ⁴ ガウス)
磁束	Φ_m	1Wb(ウエーバー)	=1N·m/A=1V·s=1kg·m ² /A·s ²
磁荷	q_m		=1A·m=1N·m ² /Wb
磁気モーメント	\mathbf{m}	1A·m ²	=1N·m ³ /Wb
磁界の強さ, 磁化	\mathbf{H}, \mathbf{M}	1A/m	=1N/Wb
磁位	ϕ_m	1A	
自己(相互)インダクタンス	L, M	1H(ヘンリー)	=1Wb/A=1V·s/A=1Ω·s=1J/A ²
透磁率	μ	1H/m=1Wb/A·m	=1N/A ² =1kg·m/A ² ·s ²

静電場

n 個の点電荷 $(q_i(\mathbf{r}_i), i = 1, 2, \dots, n)$ から点 \mathbf{r} にある電荷 q が受ける力 \mathbf{F} は、各電荷からの力の重ね合わせを仮定すると

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2)$$

となる。これを電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ の電荷分布で表現すると

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (3)$$

となる。点 \mathbf{r} にある単位電荷に対するクーロン力を電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と定義する。電界を電界の強さ、電場などとも言う。電荷 q に対するクーロン力は $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ となる。このとき電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (4)$$

となる。

ここで、注意しなければならないのは、今、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ があつたとき、新に電荷 q を加えたとき、電荷 q が受ける力が $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と定義しているのではないことである。電荷 q を付け加えると、これまでの電荷の分布が変わり、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が変わるからである。したがって、電場を調べるときはそれまでの電場を乱さない程度に 十分小さな電荷 に対するクーロン力を計測する必要がある。

静電場の演習

1 点 $(-1.5, 0, 0)$ に電気量 $5C$ の電荷、点 $(1.5, 0, 0)$ に電気量 $-5C$ の電荷がある。ただし位置座標の単位は m である。

- (1) z 軸上の点 $(0, 0, 2)$ の電界をもとめよ。
- (2) 点 $(0, 0, 2)$ の $2C$ の電荷に作用する力を求めよ。
- (3) 点 $P(1.5, 0, 4)$ の電界を求めよ。

$$E_x = 9 \times 10^9 \times \frac{5}{(2.5)^2} \times \frac{3}{5} \times 2 = 8.64 \times 10^9 \text{ (N/C)}$$

$$E_y = E_z = 0$$

$$F_x = 17.28 \times 10^9 \text{ (N)}$$

$$F_y = F_z = 0$$

$$E_x = 9 \times 10^9 \times \frac{5}{5^2} \times \frac{3}{5} = 1.08 \times 10^9 \text{ (N/C)}$$

$$E_z = 9 \times 10^9 \times \frac{5}{5^2} \times \frac{4}{5} - 9 \times 10^9 \times \frac{5}{4^2} = -1.37 \times 10^9 \text{ (N/C)}$$

2 正三角形の x 軸上にある 2 つの頂点 $(-0.5d, 0, 0)$ 、 $(0.5d, 0, 0)$ に $2q, -q$ の電荷がある。このときもう一つの z 軸上にある頂点 $P(0, 0, \sqrt{3}d/2)$ での電場を図示し、ベクトルの表示を求めよ。ただし、電荷 q が距離 d 離れたところに作る電界の強さを E_0 とせよ。

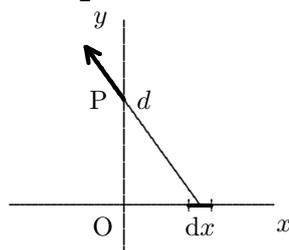
$$E_x = E_0 + \frac{1}{2}E_0 = \frac{3}{2}E_0$$

$$E_y = 0$$

$$E_z = \sqrt{3}E_0 - \frac{\sqrt{3}}{2}E_0 = \frac{\sqrt{3}}{2}E_0$$

$$\mathbf{E} = \frac{3}{2}E_0\mathbf{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}E_0\mathbf{k}$$

3 x 軸上を一様な電荷線密度 (単位長さ当たりの電気量) λ で分布している電荷が作る電界を求めよ。 x 軸から d だけ離れた点での電界を求めよ。



$$E_y = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\lambda dx \cdot d}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 d}$$

$$E_x = E_z = 0$$

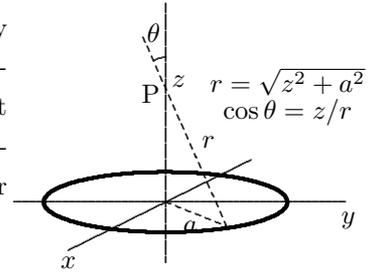
(注)

$$x = d \tan \theta, dx = d \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta} \quad \text{とおくと}$$

$$I = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = 2 \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}}$$

$$= 2 \int_0^{\pi/2} \frac{d \cdot \frac{d\theta}{\cos^2 \theta}}{d^3(1 + \tan^2 \theta)^{3/2}} = \frac{2}{d^2} \int_0^{\pi/2} \cos \theta d\theta = \frac{2}{d^2}$$

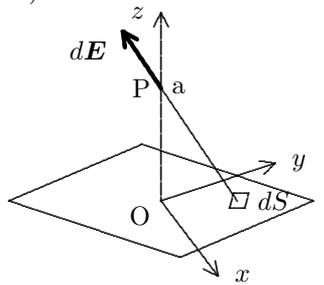
4 A ring of radius a carries a uniformly distributed positive total charge Q . Calculate the electric field due to the ring at a point P lying a distance z from its center along the central axis perpendicular to the plane of the ring.



$$dE_z = dE \cos \theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{dq \cdot z}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} dq$$

$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} \int dq = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{z}{(z^2 + a^2)^{3/2}} Q$$

5 xy 平面を一様な電荷面密度 (単位面積当たりの電気量) σ で分布している電荷が作る電界を求めよ。 xy 平面から a だけ離れた点での電界を求めよ。



$$E_z = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\sigma dS \cdot a}{(x^2 + y^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{2\pi r dr}{(r^2 + a^2)^{3/2}}$$

$$= \frac{\sigma a}{4\epsilon_0} \int_0^{\infty} \frac{d(r^2)}{(r^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\sigma a}{4\epsilon_0} \left[\frac{-2}{\sqrt{r^2 + a^2}} \right]_0^{\infty} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

面積分とガウスの定理

3次元関数 $f(x, y, z)$ の曲面 S 上で面積分は、曲面を微小面 ΔS_i に分割し、 ΔS_i 上の点を (x_i, y_i, z_i) とし、微小面 ΔS_i の径 (ΔS_i 内の 2 点の距離の上限) の最大値 δ を 0 にした極限

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (5)$$

で定義する。

面積分の演習

次の各面積分をもとめよ。ただし、 \mathbf{n} は曲面 S によって囲まれた領域から、外向きの法線ベクトルである。

(1) $\int_S x^2 dS$ (原点を中心がある 1 辺 $2a$ の立方体の表面を S とする)

$$\int_S x^2 dS = a^2 \cdot (2a)^2 \times 2 + \int_{-a}^a x^2 \cdot 2adx \times 2 \times 2 = 8a^4 + 8a \times \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a = 8a^4 + 8a \times \frac{2a^3}{3} = \frac{40}{3}a^4$$

(2) $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$ (原点を中心がある 1 辺 $2a$ の立方体の表面を S とする)

$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = (a, y, z) \cdot (1, 0, 0) = a \text{ より } \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = 6 \times a \times (2a)^2 = 24a^3$$

(3) $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$ (半径 a の球面を S とする)

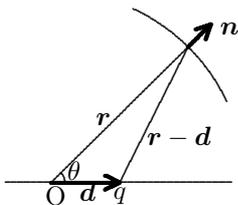
$$\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = a \text{ より } \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3$$

(4) $\int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$ (半径 a の球面を S とする)

$$\int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{a}{a^3} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

例題

点 $d = (d, 0, 0)$ に電荷 q があると、電場 E は $E = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}-\mathbf{d}}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3}$ である。 $\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS$ を計算せよ。ただし、 S は原点を中心とする半径 a の球面とする。



$t = \cos \theta$ において

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\mathbf{r}-\mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r}-\mathbf{d}|^3} dS \\ &= \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(a-d \cos \theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta}{(a^2+d^2-2ad \cos \theta)^{3/2}} \\ &= \frac{2\pi a^2 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{a-dt}{(a^2+d^2-2adt)^{3/2}} dt = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

(上の積分は各自チェックしておくこと)

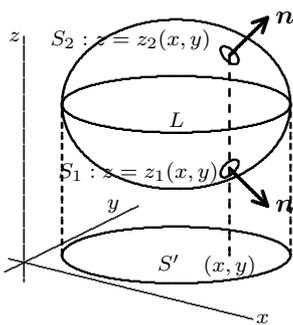
非常に簡単な系でも、計算が複雑となる。実は、これは静電場に関するガウスの法則を用いて極めて簡単に計算できる。場の考えの導入は、こうした背景もある。

特に曲面 S で囲まれた領域 V で定義された 3次元関数 $f(x, y, z)$ に関して、曲面 S の領域から外向きの方向余弦 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ をかけた面積分は

$$\int_V \text{grad } f(x, y, z) dv = \int_S f(x, y, z) \mathbf{n} dS \quad (6)$$

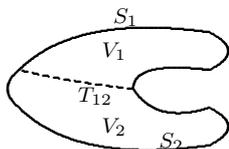
となる。(6) の z 成分について証明する。

はじめに、閉曲面 S は z 軸に平行な直線と 2つより多くの交点を持たないとし、閉曲面 S の xy 平面への正射影を S' 、底面を S' とする xy 平面に垂直な曲面はもとの曲面 S と 1つの閉曲線 L で接している。これにより、曲面 S は曲線 L によって z 軸の上面 $S_2: z = z_2(x, y)$ と下面 $S_1: z = z_1(x, y)$ に 2分される。法線ベクトル \mathbf{n} は外向きを正の方向としているので、面積要素は上面では $dxdy = n_z dS$ 、下面では $dxdy = -n_z dS$ となる。



$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dv &= \iiint_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dxdydz = \iint_{S'} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz \right\} dxdy \\ &= \iint_{S'} [f(x, y, z)]_{z_1}^{z_2} dxdy = \iint_{S'} \{f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1)\} dxdy \\ &= \int_{S_2} f(x, y, z) n_z dS - \int_{S_1} f(x, y, z) (-n_z) dS \\ &= \int_S f(x, y, z) n_z dS \end{aligned} \quad (7)$$

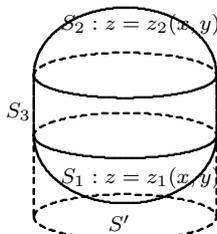
曲面 S が z 軸と 2点より多くの点で交わる時は、閉曲面 S をいくつかの曲面で分割し、それぞれ閉曲面 S_1, S_2, \dots については z 軸とせいぜい 2点で交わるようにする。それぞれの閉曲面で囲まれた領域を V_1, V_2, \dots 、分割面を T_{12}, T_{23}, \dots とする。



$$\int_V = \int_{V_1} + \int_{V_2} + \dots = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \dots$$

となるが、隣り合う 2つの閉曲面 S_i, S_j の境界面 T_{ij} ではそれぞれの法線方向は逆となり、境界面での面積分は互いに打ち消し合う。したがって、右辺の各面積分は一つの閉曲面 S での積分となる。

また閉曲面 S の一部が底面を S' とする柱面を含むときは、 S の柱面上の部分を S_3 とすると、閉曲面 S は S_1, S_2, S_3 から構成される。 S_3 は z 軸に垂直であり、 n_z は 0 となる。 $\int_{S_3} f(x, y, z) n_z dS = 0$ したがって、(7) の右辺の面積分への S_3 の寄与はなく、(7) は成り立つ。



x, y 成分についても同様だから、全ての閉曲面 S について (6) が成り立つ。

(6) は x, y, z 方向成分が独立に成立するから、 x, y, z 方向成分の f としてそれぞれ A_x, A_y, A_z を適用して加えあわせると

Gauss の (発散) 定理

$$\int_V \text{div } \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \quad (8)$$

となる。また (6) の y 方向成分に f として A_z を適用したものから、(6) の z 方向成分に f として A_y を適用したものを引いて x 軸方向成分に、同様に y 軸方向成分、 y 軸方向成分、にもサイクリックに適用すると

$$\int_V \text{rot } \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \quad (9)$$

となる。一般に、(6), (9) も Gauss の (発散) 定理と呼ばれる。

式 (9) は式 (8) から得られる。式 (8) で、 \mathbf{A} を $\mathbf{A} \times \mathbf{d}$ 、 \mathbf{d} は一定とおくと

$$\begin{aligned} \int_V \text{div } (\mathbf{A} \times \mathbf{d}) dv &= \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} dS, \quad \text{div } (\mathbf{A} \times \mathbf{d}) = \mathbf{d} \cdot \text{rot } \mathbf{A}, \\ (\mathbf{A} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} &= \mathbf{d} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A}) \text{ を用いると } \mathbf{d} \cdot \int_V \text{rot } \mathbf{A} dv = \mathbf{d} \cdot \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \end{aligned}$$

\mathbf{d} は任意だから (9) となる。

Gauss の定理 (8) からベクトルの発散 $\text{div } \mathbf{A}$ の意味がより明らかになる。点 P を内部に含む微小な閉曲面 S と、その内部の体積 Δv に対して Gauss の定理を適用すると

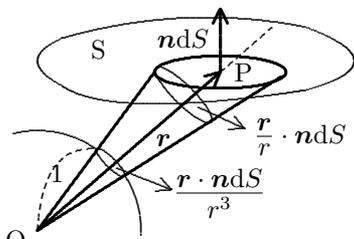
$$\text{div } \mathbf{A} \Delta v = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \text{よって } \text{div } \mathbf{A} = \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta v}$$

となる。ベクトル \mathbf{A} を場の量とすると、 $\text{div } \mathbf{A}$ は単位体積当たりのその表面を貫く流線の数となる。

立体角

点 O を頂点とし閉曲線 Γ に囲まれた曲面 S を底面とする錐体を点 O を中心とする半径 1 の球面が切りとる面積を曲面 S の点 O に対する立体角という。曲面に表 (正側)、裏 (負側) を定義すると、点 O が曲面 S の負側にあれば立体角を正、正側にあれば負の立体角と定義する。原点を中心とする球面の原点に対する立体角は 4π である。

曲面 S 上の点 P の点 O に対する位置ベクトルを \mathbf{r} 、曲面 S に対する点 P における負から正の側への面に対する法線単位ベクトルを \mathbf{n} とすると、点 P での微小面積 dS の点 O に対する立体角 $d\Omega$ は



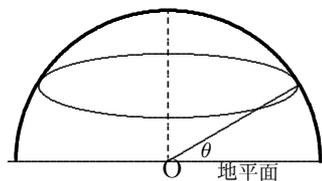
$$d\Omega = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS}{r^3} \quad (= -\nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{n} dS)$$

したがって、曲面 S の点 O に対する立体角は次のとおりである。

$$\Omega = \int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS \quad (10)$$

例題

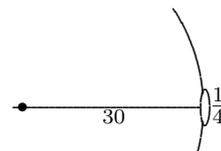
- (1) 大阪での天体観測では、地平線から 20° 以下の範囲は良く見えない。観測できる天球の立体角はいくらか、またそれは全天球の何%か。



$$\begin{aligned} \int_{20^\circ}^{90^\circ} 2\pi \cos \theta d\theta &= 2\pi \sin \theta \Big|_{20^\circ}^{90^\circ} \\ &= 2\pi (1 - \sin 20^\circ) = 4.13 \\ \frac{4.13}{4\pi} \times 100 &= 33(\%) \end{aligned}$$

- (2) 月の直径は地球の約 4分の 1、地球から月までの距離は地球の直径の約 30 倍である。地球から見た月のおよその立体角を求めよ。またその全天に対する割合はいくらか。

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{8}\right)^2 \pi &= 5.4 \times 10^{-5} \\ \frac{5.4 \times 10^{-5}}{4\pi} &= 4.3 \times 10^{-6} \end{aligned}$$



本日の宿題

「電磁気学メモ」 p.70~p.71 の学習、特に、次のことをメモしておく

- 1 (a) $\vec{A} \cdot \vec{B}, \quad \vec{A} \times \vec{B}$
- (b) $\nabla = \vec{i} \frac{\partial}{\partial x} + \vec{j} \frac{\partial}{\partial y} + \vec{k} \frac{\partial}{\partial z}$
- (c) $\text{grad } \phi = \nabla \phi = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \phi = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x}, \frac{\partial \phi}{\partial y}, \frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$
- (d) $\text{div } \vec{A} = \nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \cdot (A_x, A_y, A_z) = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$
- (e) $\text{rot } \vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)$

2 定義と性質

$$\begin{aligned} \vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) &= \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) \quad (\text{スカラー三重積}) \\ \vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) &= (\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C} \quad (\text{ベクトル三重積}) \end{aligned}$$

3 簡単な計算

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= (x, y, z), \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ とする。} \\ \text{grad } r, \quad \text{grad } \frac{1}{r}, \quad \text{div } \frac{\vec{r}}{r^3}, \quad \text{rot } \vec{r} \end{aligned}$$

物理II(11 由良) 第3講 ガウスの法則

前回の宿題の解答(一部)

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (r \neq 0) \quad \text{とする。}$$

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r}, \quad \frac{\partial r}{\partial z} = \frac{z}{r}$$

$$\text{grad } r = \nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r}, \quad \text{div } \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$\text{grad } \frac{1}{r} = \nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r} \right) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3} \right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

$$\left(= \frac{d}{dr} \left(\frac{1}{r} \right) \cdot \nabla r = -\frac{1}{r^2} \frac{\mathbf{r}}{r} = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = \text{div} \nabla \frac{1}{r} = -\text{div} \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = 3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \times 3 = 0$$

いま、閉曲面 S に囲まれた積分領域 V を考える。点 O に対する点 P の位置ベクトルを \mathbf{r} 、点 P における外向きの単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、積分領域 V に点 O を含んでいないとき、 $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ ($r \neq 0$) だから

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = -\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv = 0$$

である。また、図のように曲面 S_1, S_2, S_3 が重なった部分では、曲面 S_2, S_3 上の法線方向が互いに逆になり、打ち消し合い、立体角には S_1 のみの立体角になる。

したがって、積分領域 V に点 O を含んでいるとき、点 O のまわりの立体角は、点 O を中心とする十分小さな半径 ϵ の球 V' の球面 S' の立体角と同じになり、

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \int_{S'} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} = 4\pi$$

ちょうど点 O が曲面 S 上にあるとき、点 O を中心とする半径 ϵ の球面で S の内部にある部分を S' 、 S で球面の外部にある部分を S'' とする。点 O は S', S'' が作る閉曲面の外部にあるから $\int_{S'} + \int_{S''} = 0$ したがって、 $\int_{S''} = -\int_{S'} = -\frac{1}{\epsilon^2} \int_{S'} dS$ 。曲面 S が点 O 近傍でなめらかとすると右辺の積分は半球面となり、積分は 2π となる。

以上をまとめると

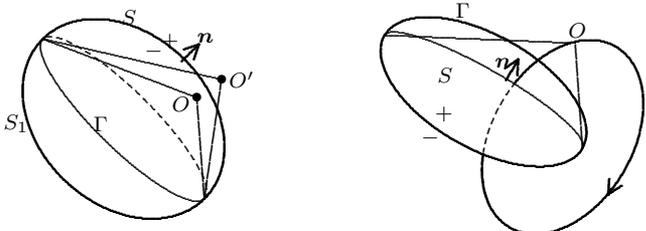
「閉曲面 S の点 O に対する立体角は、点 O が S の中にあれば 4π 、 S 上にあれば 2π 、 S の外にあれば 0 である」となる。これは、 $r = 0$ を含めて、

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = -\int_V \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv = \begin{cases} 4\pi & (\text{点 } O \text{ が閉曲面に含まれる}) \\ 2\pi & (\text{点 } O \text{ が閉曲面上にある}) \\ 0 & (\text{点 } O \text{ が閉曲面の外にある}) \end{cases} \quad (11)$$

を意味している。

立体角はその曲面 S の周囲の閉曲線 Γ と点 O の位置のみによって決まり、曲面にはよらない。なぜなら閉曲線 Γ によって囲まれた曲面で、曲面 S から連続的に変形した曲面を S' とする。 S と S' は一つの閉曲面をなし、変形の過程で曲面 S' が点 O を通過しなければ閉曲面は点 O の外にあり、点 O に対する立体角は 0 となる。このときは閉曲面の内側を正、外側を負としている。点 O に対して、閉曲線 Γ を挟んで曲面 S と曲面 S' は逆向きとなり、結局点 O に対する S の立体角 Ω と S' の立体角 Ω' は等しくなる。また丁度曲面 S' が点 O 上にある閉曲面に対する立体角は 2π だから Ω と Ω' の差は 2π となる。また点 O が閉曲面の内部になるように曲面 S' を変形すると閉曲面に対する点 O の立体角は 4π だから Ω と Ω' の差は 4π となる。差の符号ははじめ曲面 S の向きをどちらに選んだかによる。

この事情を逆に点 O を動かして調べてみる。下図のように、閉曲線 Γ によって囲まれた曲面 S の負の側の曲面に近い点を点 O とし曲面を挟んで点 O に近い点を点 O' 、点 O および点 O' に対する曲面 S の立体角をそれぞれ Ω, Ω' とする。点 O と同じ側において、閉曲線 Γ によって囲まれた曲面を S_1 とすると、点 O および点 O' は十分近いとするとそれらに対する曲面 S' の立体角 Ω_1 は等しくなる。曲面 S と曲面 S_1 は点 O 内部に持つ閉曲面であり、 $\Omega + \Omega_1 = 4\pi$ 、点 O' は外部の点だから $\Omega' + \Omega_1 = 0$ 、したがって $\Omega' - \Omega = -4\pi$ となる。



したがって、「点 O が曲面 S の負の側から正の側へ移るとは、曲面 S の点 O に対する立体角 -4π だけ変化する。」

デルタ関数 $x = x_0$ で連続な関数 $f(x)$ について、

$$\int f(x)\delta(x - x_0)dx = f(x_0)$$

(演習問題解答付き 教師用)

なる性質を持つ関数 $\delta(x)$ をデルタ関数という。3次元ではこれをそのまま拡張して、

$$\iiint \phi(x, y, z)\delta(x - x_0)\delta(y - y_0)\delta(z - z_0)dx dy dz = \phi(x_0, y_0, z_0)$$

となるが、 $dx dy dz = dv$ において、空間積分に書き換えて、

$$\int \phi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dv = \phi(\mathbf{r}_0)$$

となる関数 $\delta(\mathbf{r})$ と定義する。積分領域が \mathbf{r}_0 を含まないときは 0 となるから、

$$\int_V \phi(\mathbf{r})\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)dv = \begin{cases} \phi(\mathbf{r}_0) & (\mathbf{r}_0 \in V) \\ 0 & (\mathbf{r}_0 \notin V) \end{cases} \quad (12)$$

である。

$\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ ($r \neq 0$) を考慮すると、積分領域 V に原点が含まれていないときは、

$$\int_V \phi(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv = 0$$

積分領域 V が原点を含むときは、原点を中心とする半径 ϵ の微小な球の領域 V' を考え、 $\phi(\mathbf{r})$ の原点での連続性と (11) を考慮すると

$$\begin{aligned} \int_V \phi(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V'} \phi(\mathbf{r})\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv \\ &= \phi(\mathbf{0}) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V'} \nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) dv = -4\pi\phi(\mathbf{0}) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\nabla^2 \left(\frac{1}{r} \right) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (13)$$

と見なして良いことがわかる。

閉曲面 Σ に囲まれた領域 V について、クーロンの法則 (4) を直接代入することによって

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \int \nabla \cdot \frac{-\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{n} dv' dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int -\rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' dv \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int -\rho(\mathbf{r}')(-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dv' dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv \end{aligned}$$

となる。ここでガウスの定理 (8) および $\nabla^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ (13) を用いた。 v' による積分は全空間にわたる積分、 v 、 S による積分は領域 V および境界面 Σ での積分であり、右辺は領域内の電荷分布のみによって決まることを意味している。

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$$

ガウスの定理を適用して、

$$\int_V \text{div } \mathbf{E} dv = \int_V \frac{1}{\epsilon_0} \rho(\mathbf{r}) dv$$

積分領域 V は任意だから

$$\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$$

となる。

静電場に関するガウスの法則

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv \quad (\text{微分形 } \text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho) \quad (14)$$

積分形、微分形のどちらも「静電場に関するガウスの法則」という。

通常のテキストの説明

(1) 原点にある電荷 q が点 \mathbf{r} に作る電場を $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ とすると、

$$\frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = d\Omega, \quad (d\Omega \text{ は微少面積 } dS \text{ の立体角}) \quad \text{だから、}$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} d\Omega = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \times 4\pi = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(2) 電荷 q が \mathbf{r}' にある時の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ について、

\mathbf{r}' が領域内のとき、原点を \mathbf{r}' に移動しても同じだから、

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$$

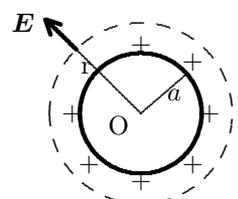
(3) 電荷分布 ρ の作る点 \mathbf{r} での電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ について、

(2) の q を $\rho(\mathbf{r}')dv'$ とおき、積分して

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{\epsilon_0} \quad q \text{ は領域に含まれている全電荷}$$

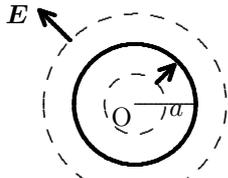
ガウスの法則の演習

1 電荷総量 Q の電荷が半径 a の導体球殻上に一様に分布している。球殻の内外における電界を求めよ。



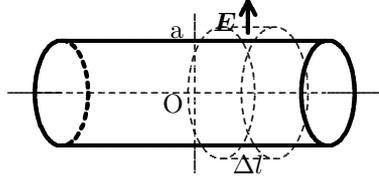
$$\begin{aligned} r > a \\ E(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ r < a \\ E(r) \cdot 4\pi r^2 &= 0, \quad E(r) = 0 \end{aligned}$$

2 電荷総量 Q の電荷が半径 a の球内に一様に分布している。球の内外における電界を求めよ。(地球の重力場に対応)



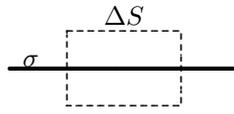
$$\begin{aligned} r > a \\ E(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0}, \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \\ r < a \\ E(r) \cdot 4\pi r^2 &= \frac{Q}{\epsilon_0} \cdot \frac{r^3}{a^3}, \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Qr}{a^3} \end{aligned}$$

3 単位長さあたり ρ の一様な電荷分布を持った半径 a の無限に長い円筒の内外における電界を求めよ。



$$\begin{aligned} r > a \\ E \cdot 2\pi r \Delta l &= \frac{\rho \Delta l}{\epsilon_0}, \quad E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\rho}{r} \\ r < a \\ E &= 0 \end{aligned}$$

4 xy 平面を一様な電荷面密度 (単位面積当たりの電気量) σ で分布している電荷が作る電界を求めよ。 xy 平面から a だけ離れた点での電界を求めればよい。



$$\begin{aligned} E_z \times \Delta S + (-E_z) \times (-\Delta S) &= \frac{\Delta S \times \sigma}{\epsilon_0} \\ E_z &= \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \end{aligned}$$

線積分と Stokes の定理

3次元関数 $f(x, y, z)$ の3次元曲線 C 上での線積分を

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\Delta s_i \rightarrow 0} \sum_i f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \quad (15)$$

で定義しておく。ここで、 Δs_i は曲線上の線要素である。特に $f(x, y, z)$ に、曲線の接線方向の方向余弦 $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ をかけた線積分は

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \left(\int_C f(x, y, z) dx, \int_C f(x, y, z) dy, \int_C f(x, y, z) dz \right) \\ &= \left(\int_C f(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds, \int_C f(x, y, z) \frac{dy}{ds} ds, \int_C f(x, y, z) \frac{dz}{ds} ds \right) \end{aligned}$$

となる。積分路を $C: A \rightarrow B$ とすると

$$\int_A^B f(x, y, z) ds = - \int_B^A f(x, y, z) ds$$

となる。

線積分の演習

(1) Γ を点 $(-a, b, 0)$ から点 $(a, b, 0)$ へ直線的に進む積分路とする。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} r^2 ds &= \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} \\ \int_{\Gamma} r^2 ds &= \int_{\Gamma} r^2 \mathbf{i} dx = \int_{-a}^a (x^2 + b^2) dx \mathbf{i} = \left[\frac{x^3}{3} + b^2 x \right]_{-a}^a \cdot \mathbf{i} = \left(\frac{2a^3}{3} + 2b^2 a \right) \cdot \mathbf{i} \\ \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Gamma} x dx = \left[\frac{x^2}{2} \right]_{-a}^a = 0 \end{aligned}$$

(2) Γ を点 $(a, 0, 0)$ から点 $(0, b, 0)$ へ直線的に進む積分路とする。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} r^2 ds &= \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} \\ y &= -\frac{b}{a}x + b \text{ とおくと} \\ \int_{\Gamma} r^2 ds &= \int_a^0 (x^2 + y^2) \mathbf{i} dx + \int_0^b (x^2 + y^2) \mathbf{j} dy \\ &= \int_a^0 (x^2 + (-\frac{b}{a}x + b)^2) \mathbf{i} dx + \int_0^b ((-\frac{a}{b}y + a)^2 + y^2) \mathbf{j} dy = -\frac{a}{3}(a^2 + b^2) \mathbf{i} + \frac{b}{3}(a^2 + b^2) \mathbf{j} \\ \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Gamma} (x dx + y dy) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

(3) Γ を各点 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, -b, 0)$ を一回りする積分路とすると

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} &= 0 \\ \text{となることを確かめよ。} \\ \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} &= \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) + \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = 0 \end{aligned}$$

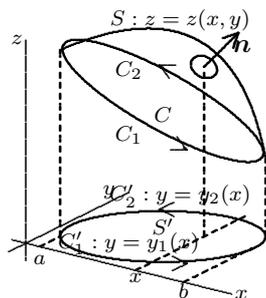
閉曲線 C で囲まれた曲面 S について

$$\int_S \mathbf{n} \times \text{grad } f(x, y, z) ds = \int_C f(x, y, z) ds \quad (16)$$

が成り立つ。

(16) の x 成分について証明する。

閉曲線 C で囲まれた曲面を $S: z = z(x, y)$ とし、 xy 平面への正射影を C' , S' とする。 C' の変域を $a \leq x \leq b$ とし、積分路にしたがって C' を $C'_1(x: a \rightarrow b, y = y_1(x))$ と $C'_2(x: b \rightarrow a, y = y_2(x))$ に分割する。



$$\begin{aligned} \int_S \left(n_y \frac{\partial}{\partial z} - n_z \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y, z) dS & \quad (n_y dS = z_y dx dy, \quad n_z dS = dx dy) \\ &= - \iint_{S'} \left(\frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial z} z_y(x, y) + \frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{d}{dy} f(x, y, z(x, y)) dy \\ &= \int_a^b f(x, y_1(x), z(x, y_1(x))) dx + \int_b^a f(x, y_2(x), z(x, y_2(x))) dx = \oint_C f(x, y, z) dx \end{aligned}$$

また (16) で、 x 成分について f を A_x , y 成分について f を A_y , z 成分について f を A_z で置き換えたものを加えあわせると

Stokes の定理

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (17)$$

となる。(16) も Stokes の定理と呼ばれる。

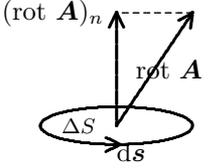
Stokes の定理 (17) は $\text{rot } \mathbf{A}$ の幾何学的な意味を説明してくれる。

十分小さい曲面 ΔS の法線ベクトルを \mathbf{n} とすると

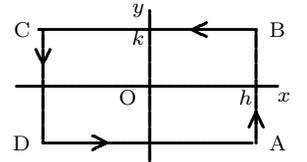
$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \frac{\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta S}$$

即ち単位面積にわたる \mathbf{A} の一周の積分がその点における $\text{rot } \mathbf{A}$ の面に垂直な成分である。



またこのことから、ベクトルの回転の定義式を導くことができる。原点における $(\text{rot } \mathbf{A})_z$ は、原点を中心とする xy 平面に平行な長方形 ABCD について、



$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

$$\begin{aligned} \int_{AB} &= \int_{AB} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-k}^k A_y(h, y, 0) dy = \int_{-k}^k \left\{ A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} h + \frac{\partial A_y}{\partial y} y \right\} dy \\ &= \left[A_y y + \frac{\partial A_y}{\partial x} h y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{1}{2} y^2 \right]_{-k}^k \end{aligned}$$

$$\int_{AB} = 2(A_y k + \frac{\partial A_y}{\partial x} h k), \quad \int_{CD} = 2(-A_y k + \frac{\partial A_y}{\partial x} h k)$$

$$\int_{BC} = 2(-A_x h - \frac{\partial A_x}{\partial y} h k), \quad \int_{DA} = 2(A_x h - \frac{\partial A_x}{\partial y} h k)$$

$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 4hk \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \text{ したがって } (\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

となる。

閉曲線 Γ に囲まれた曲面 Σ について、

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\Sigma} \text{rot} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \right\} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \left\{ \int \rho(\mathbf{r}') \text{rot } \nabla \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \right\} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \end{aligned}$$

ここで Stokes の定理 (17) および任意のスカラー関数 ϕ にたいして $\text{rot grad } \phi = 0$ であることを用いた。

また、 $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ に Stokes の定理を適用すると、 $\int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ となるが、曲面 Σ は任意だから $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ が得られる。

静電場は渦なし

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{微分形 } \text{rot } \mathbf{E} = 0) \quad (18)$$

本日の宿題

以下の式を証明せよ。(電磁気学メモにも書いてある)

1 $\text{grad } (\phi\psi) = \nabla(\phi\psi) = \psi \nabla\phi + \phi \nabla\psi$

2 $\text{div } (\phi\mathbf{A}) = \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi \cdot \mathbf{A} + \phi \nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla\phi \cdot \mathbf{A} + \phi \text{div } \mathbf{A}$

3 $\text{rot } (\phi\mathbf{A}) = \nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi \times \mathbf{A} + \phi \nabla \times \mathbf{A} = \nabla\phi \times \mathbf{A} + \phi \text{rot } \mathbf{A}$

4 $\text{div } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$

5 $\text{rot } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + A \text{div } \mathbf{B} - B \text{div } \mathbf{A}$

6 $\text{grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}$

7 $\text{rot grad } \phi = \nabla \times \nabla\phi = 0$

8 $\text{div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$

9 $\text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$

前回までで、クーロンの法則

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

から、静電場の2つの性質

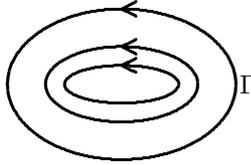
$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv \quad (\text{微分形 } \text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho)$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{微分形 } \text{rot } \mathbf{E} = 0)$$

を導いた。逆の議論をしよう。

静電場の2つ目の性質 $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$, すなわち $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ から始める。

これは、たとえば、右図のような静電場が存在しないことを主張している。もし存在しているとすると、微小電荷を任意の電気力線 Γ に沿って一周すると仕事は0とはならない。すなわち、微小電荷 q に対して、 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ で、電気力線に沿って積分すると $\mathbf{E} // d\mathbf{s}$ で $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} > 0$ だから、 $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ となるからである。



$\text{rot } \mathbf{E} = 0$ である場 \mathbf{E} を「渦なし」という。

$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ とする。一周の閉積分路 Γ を A-C-B-D-A とすると、

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A-C-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{B-D-A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\int_{A-C-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{B-D-A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

したがって

$$\int_{A-C-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A-D-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

任意の2点 A, B 間の積分 $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ は途中の積分路によらず決まり、積分

$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (19)$$

は位置 \mathbf{r} のみの関数である。 $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ は単位電荷をAからBまで移動させるときの電場のする仕事である。したがって $\phi(\mathbf{r})$ は単位電荷を無限の遠方から \mathbf{r} まで電場に逆らって移動させたときの(外力が系にした)仕事であり、静電ポテンシャル(電位, 単位は V(ボルト)=J/C)という。

電位の変化を $d\phi(\mathbf{r})$ を2つの方法で表してみる。

$$d\phi(\mathbf{r}) = \frac{\partial \phi}{\partial x} dx + \frac{\partial \phi}{\partial y} dy + \frac{\partial \phi}{\partial z} dz = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$$

$$d\phi(\mathbf{r}) = \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r})$$

$$= \left(- \int_{\infty}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right) - \left(- \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right)$$

$$= - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+d\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$$

したがって、 $-\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = \nabla \phi \cdot d\mathbf{r}$, $d\mathbf{r}$ は任意だから

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi = -\text{grad } \phi \quad (20)$$

となる。

等電位面(曲面 $\phi(\mathbf{r}) = c$ すなわち $d\phi(\mathbf{r}) = 0$ なる曲面)を考えると、 $d\mathbf{r}$ は点 P における面内の任意の微小変位だから、 $\nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = 0$ から $\nabla \phi$ は点 P での曲面に垂直な方向を向いていることがわかる。

したがって、電界 \mathbf{E} は等電位面に垂直である。さらに電界 \mathbf{E} は電位が減少する方向に向いている。

曲面 $\phi(\mathbf{r}) = c$ 上の点 P(\mathbf{r}) における法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{|\nabla \phi|} \nabla \phi = \pm \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}} (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$$

である。

式(20)の \mathbf{E} を、静電場の1つ目の性質 $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ に代入すると

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (21)$$

即ち、静電ポテンシャル ϕ はポアソンの方程式を満たすことがわかる。

一般に $\begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & (\text{ラプラスの方程式}) \\ \nabla^2 \phi = g(\mathbf{r}) & (\text{ポアソンの方程式}) \end{cases}$ である。

(21)の無限の遠方で0となる解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (22)$$

となる。これより得られる電界 $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ はクーロンの法則(4)そのものである。ここで、楕円型偏微分方程式について、調べておこう。講義終了後でよいから、しっかりチェックしておこう。

1 3次元 Laplace の方程式を考える。

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (23)$$

閉領域 V において、連続で、そのすべての内点で調和((23)を満たす)であり、また V が無限領域の時は x が無限遠で0となる $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ を「閉領域 V で調和」と定義しよう。

「閉領域 V で調和な関数 $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ は V と境界からなる領域 \bar{V} で連続ならば、境界で最大値、最小値をとる。」(最大値の原理)

境界 S における最大値を m とする。いま $u(x)$ が V の内点で m より大きかったとする。よって V での $u(x)$ の最大値 M となるのは V の内点 $P(x)$ である。新たに関数 $v(\xi) = v(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を定義する。

$$v(\xi) = u(\xi) + \frac{M-m}{2d^2} |\xi - x|^2, \quad |\xi - x|^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2$$

ここで d は閉領域 V の2点の距離の上限とする。したがって $|\xi - x|^2 < d^2$ である。 $v(x) = u(x) = M$ であるが、境界上では

$$v(\xi) \leq m + \frac{1}{2}(M-m) = \frac{m+M}{2} < M$$

したがって $v(\xi)$ は $u(\xi)$ と同様に領域 V の内点で最大値をとる。しかしこれは

$$\Delta_{\xi} v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_3^2} = \frac{M-m}{d^2} > 0, \quad \xi \in V$$

と矛盾する(最大値を内点で取れば、そこでは各 ξ_i について、 $\frac{\partial v}{\partial \xi_i} = 0, \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} \leq 0$ である)。

よって境界で最大値をとる。また内点で最小値とならないことは $-u$ を考えて、同様に示される。

最大値の原理から、全空間で調和な関数は一定値(0)となることがわかる(Liouvilleの定理)。

十分大きな閉領域を V とし、その境界での最大値、最小値を M, m とすると、 $m < M, |M| \leq \epsilon, |m| \leq \epsilon, \epsilon > 0$ (無限遠では $u = 0$ を用いている)となる。 V の任意の内点 x では $|u(x)| \leq \epsilon$, したがって $u(x) = 0$ 。

また、最大値の原理から「導体(同じ電位)で囲まれた空洞内の電界は0」が得られる。最大値の原理から、ポアソンの方程式の解の一意的定理が得られる。

「境界条件が与えられると、ポアソンの方程式の解は一意的である。」境界条件 ($\phi_0(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Sigma$) に対して、ポアソンの方程式の2つの解 $\phi_1(\mathbf{r}), \phi_2(\mathbf{r})$ とする。すなわち、

$$\nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad (\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Sigma)$$

$$\nabla^2 \phi_2(\mathbf{r}) = g(\mathbf{r}), \quad (\phi_2(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}), \mathbf{r} \in \Sigma)$$

とする。 $\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r})$ とおくと、

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\phi(\mathbf{r}) = 0, \mathbf{r} \in \Sigma)$$

となり、 $\phi(\mathbf{r}) = 0$ が得られる。よって、 $\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r})$ 。

2 スカラー関数 ϕ, ψ にたいしてつぎの「グリーンの定理」が成り立つ。

$$\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dv \quad (24)$$

$$\int_S (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS = \int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dv \quad (25)$$

ただし $\frac{\partial \phi}{\partial n}, \frac{\partial \psi}{\partial n}$ は閉曲面のうち側から外側に向かう法線方向の方向微係数で

$$\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_S \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS, \quad \int_S (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS = \int_S (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} dS$$

公式 $\text{div}(\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \cdot \mathbf{A} + \nabla \psi \cdot \mathbf{A}$ で $\mathbf{A} = \nabla \phi$ とすると $\text{div}(\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$ ゆえに

$$\int_V \text{div}(\psi \nabla \phi) dv = \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dv$$

左辺はガウスの定理より $\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_S \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS$ となり(24)が証明された。また(24)で ϕ, ψ を入れ替えて差をとると(25)となる。

3 閉曲面 S によって領域を V , スカラー関数 ϕ , V 内にとった原点 O から点 P までの距離を r , 点 O を中心とする半径 ϵ の球面を S' , V から S' の内部を取り除いた領域を V' とすると、グリーンの定理(24)を $\phi, \frac{1}{r}$ に適用して

$$\int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS + \int_{S'} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS = \int_{V'} \left(\frac{1}{r} \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \frac{1}{r} \right) dv \quad (26)$$

$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ より、右辺は $\epsilon \rightarrow 0$ では $\int_{V'} \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dv$ となる。

左辺の面 S' における積分では $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が有界(グリーンの定理ははじめからこれを仮定)とする

$$\left| \int_{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \right| = \frac{1}{\epsilon} \left| \int_{S'} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \right| \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{S'} \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right| dS \leq \frac{K}{\epsilon} \int_{S'} dS = 4\pi K \epsilon \quad K \text{ は定数}$$

一方

$$\int_{S'} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = - \int_{S'} \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \int_{S'} \phi \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S'} \phi dS \rightarrow 4\pi \phi(r=0)$$

よって $\epsilon \rightarrow 0$ の極限では

$$\int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS - 4\pi \phi(r=0) = \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dv$$

となる。したがって次の「グリーンの公式」

$$\phi(r=0) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dv + \int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS \quad (27)$$

を得る。
無限の遠方で $\phi = 0$ の解を求めてみよう。点 O を中心とする半径 r の球面を S とする。グリーンの公式で

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{1}{r} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{1}{r} \int_S \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS$$

$$= \frac{1}{r} \int_V \operatorname{div}(\nabla \phi) dv = \frac{1}{r} \int_V \nabla^2 \phi dv \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

なぜなら、 r を十分大きくとると、球の外では $\nabla^2 \phi = g = 0$ となる、したがって $\int_V \nabla^2 \phi dv$ は r によらず一定となるからである。

また十分大きな r では $|\phi| < \epsilon \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$ だから

$$\left| \int_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right| = \left| \int_S \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right| \leq \frac{1}{r^2} \int_S |\phi| dS \leq \frac{\epsilon}{r^2} \int_S dS = 4\pi\epsilon \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

$\nabla^2 \phi = g$ のとき、すなわちポアソンの方程式が成り立つとき

$$\phi(r=0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-g}{r} dv$$

となる。したがって、原点をずらしておくと、一般にポアソンの方程式の無限の遠方で 0 となる解は

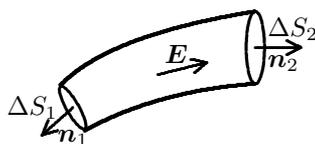
$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{-g(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (28)$$

となる。

以上によって、クーロンの法則 (4) と静電場の性質 (14), (18) が等価であることが証明できた。クーロンの法則を静電場 (静止した電荷分布による定常な電場) の性質として書き換えることは、応用上の利便性だけでなく場の考えの展開の出発点として重要である。

静電場の表現として、電界に比例した密度で接線の方向が電界の方向の曲線—電気力線が、側面が電気力線で囲まれた管—電気力管がしばしば用いられる。テキスト「物理学」小出昭一郎著 p.228 参照。

図のような電気力管の一部を切断し、切断面を $\Delta S_1, \Delta S_2$ 、面の外向きの法線ベクトルをそれぞれ $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2$ とする。



管の側面での面の法線は電場 \mathbf{E} に垂直である。従って、管内に電荷がない ($\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$) とすると、ガウスの法則より、 $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2 = 0$ となる。すなわち、 $\mathbf{E}_1 \cdot (-\mathbf{n}_1) \Delta S_1 = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2$ 。これは、 ΔS_1 面に入ってくる電気力線の数と ΔS_2 面を出ていく電気力線の数が等しいことを意味する。これが電気力線の連続性である。電気力線の連続性は $\operatorname{div} \mathbf{E} = 0$ が保証している。

静電場を電気力管によって調べる、という方法には確かな根拠がある。図の電気力管の一部を取り出したとき、電気力管はゴム管が縮むように作用する、すなわち、断面は引きつけるように作用し、側面は細め合うように作用する。こうした説明は、「Maxwell の応力テンソル」の考えを根拠にしており、これは電磁場の近接作用説の確立に基づいて、第 15 講で議論する。

通常のテキストの説明

(1) 原点 O に電気量 q の電荷があるとき、位置 \mathbf{r} の電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\mathbf{r}}{r^3}$$

であり、位置 \mathbf{r} にある電荷 Q に作用するクーロン力は $Q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ である。

(2) 原点 O にある電気量 q の電荷と位置 \mathbf{r} にある電荷 Q の位置エネルギーは、 $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = r \cdot dr = r dr$ だから

$$U = - \int_{\infty}^r Q\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{qr}{r^3} ds = \frac{-Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^r \frac{qdr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{qQ}{r}$$

となつて、積分は、無限の遠方から \mathbf{r} にいたる途中の道筋によって変わらず、原点からの距離 r のみによってきまる。

位置 \mathbf{r} にある単位電荷の位置エネルギーを電位 $\phi(\mathbf{r})$ とあらわすと、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{r}, \quad U = Q\phi(\mathbf{r})$$

である。

(3) 位置 \mathbf{r}' にある電気量 q の電荷が作る位置 \mathbf{r} の電位は、(1) を \mathbf{r}' だけ平行移動して、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

(4) 電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ の分布で分布したときの電位は、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

(5) 電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\operatorname{grad} \phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

電位の練習

[1] 原点 O にある電気量 q の電荷が作る位置 \mathbf{r} の電位はいくらか。また、 $q = 1\text{C}$ 、 $r = 1\text{m}$ の電位はいくらか。

$$\phi = 8.9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \cdot 1\text{C} \cdot \frac{1}{1\text{m}}$$

$$= 8.9 \times 10^9 \frac{\text{Nm}}{\text{C}} = 8.9 \times 10^9 \text{V}$$

[2] 電位が $\phi = a \frac{x-y}{r^3}$ で与えられるとき、電界を求めよ。

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi$$

$$E_x = -\frac{\partial\phi}{\partial x} = -a \left(\frac{1}{r^3} - \frac{3x(x-y)}{r^5} \right)$$

$$E_y = -\frac{\partial\phi}{\partial y} = -a \left(-\frac{1}{r^3} - \frac{3y(x-y)}{r^5} \right)$$

$$E_z = -\frac{\partial\phi}{\partial z} = a \frac{3z(x-y)}{r^5}$$

[3] 原点 O に電気量 Q の電荷が作る電場の中を電荷 q を原点から放射状に r_1 離れた点から r_2 離れた点に移動させた。このときの仕事を求めよ。

$$W = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{Qqdr}{r^2} = \frac{-Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[\frac{-1}{r} \right]_{r_1}^{r_2}$$

$$= \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

[4] 原点 O に電気量 Q の電荷が作る電場の中を電荷 q を $(a, 0, 0)$ から $(0, b, 0)$ まで移動させた。このときの仕事を求めよ。

$$W = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(a,0,0)}^{(0,b,0)} \frac{Qq\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s}}{r^2 \cdot r}$$

$$= \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(a,0,0)}^{(0,b,0)} \frac{Qq(xdx + ydy)}{r^3} = \frac{-1}{4\pi\epsilon_0} \int_{(a,0,0)}^{(0,b,0)} \frac{Qqdr}{r^3}$$

$$= \frac{-Qq}{4\pi\epsilon_0} \left[-\frac{1}{r} \right]_{(a,0,0)}^{(0,b,0)} = \frac{Qq}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a} \right)$$

電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ から離れた場所での静電場(電気双極子近似)

原点近傍 (V) での電荷分布 $\rho(\mathbf{r}')$ から十分離れたによる観測点 \mathbf{r} 、 $(|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|)$ での静電場を考える。観測点での静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r}')}{\sqrt{r^2 - 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') + r'^2}} dv'$$

$r = |\mathbf{r}| \gg |\mathbf{r}'|$ より、

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0 r} \int_V \rho(\mathbf{r}') \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2} \right) dv' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}}{r^3}$$

ここで、

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}') dv'$$

で全電荷量、

$$\mathbf{p} = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}') dv'$$

で、原点を中心とした電気双極子モーメントを表す。電場は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})}{r^5} \right) \quad (29)$$

となる。こうして、一般的な電気双極子の静電場を求めることができた。しかし、重要な応用は電気双極子が時間的に変動し、電波を発生することになるが、これについては「電磁気学メモ」を参照されたい。

本日の宿題

[1] $\phi(\mathbf{r})$ がベクトル場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ の (スカラー) ポテンシャルとは、

$$\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi(\mathbf{r}) \text{ となる } \phi(\mathbf{r}) \text{ が存在することである。}$$

すでに力学でも学習済みであろうが、もう一度すっきりと確認しておいて欲しい。したがって、

「場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ が (スカラー) ポテンシャルをもつ必要十分条件は

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}) = 0 \text{ であることを証明せよ。}」$$

[2] やっておいの方がよい宿題

よく使う曲線座標によるラプラシアン

円柱座標 : $x = r \cos \phi, y = r \sin \phi, z = z \quad (r \geq 0)$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

極座標 : $x = r \sin \theta \cos \phi, y = r \sin \theta \sin \phi, z = r \cos \theta$

$$(r \geq 0, 0 \leq \theta \leq \pi)$$

$$\Delta = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

2次元極座標 : $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta \quad (r \geq 0)$

$$\Delta = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$$

この講義では、直接これらを用いるところまでは進めないが、具体的な問題を解くときには極めて重要となる。変数変換は、いづれどこかで学習しなければならない。早めに学習しておこう。

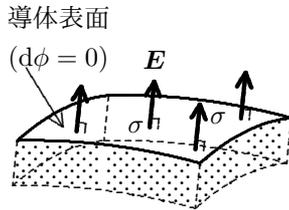
導体

(1) 導体の平衡状態では, 導体内部の静電場は0である。
 なぜなら導体では伝導電子(自由電子)やイオンが無数にあり, 電界 \mathbf{E} が0でない間は電子が移動を続けるからである。言い換えれば, 平衡状態では, 1つの導体の電位はどこでも同じである。導体を電界内におくと, 導体内の電位が同じになるまで伝導電子やイオンが移動し, 導体表面は正, 負に帯電する。これを 静電誘導 という。

(2) $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ より, 導体内部では電荷密度は0となる ($\rho = 0$)。
 (3) 導体表面は1つの等電位面 ($d\phi = 0, \mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$) をなし, したがって導体表面での電界は面に垂直になる。

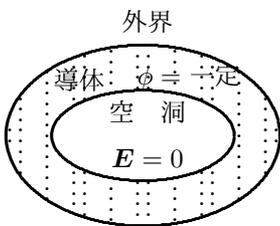
(4) 導体の表面電荷密度を σ とすると, 導体表面の微小面積を囲む扁平な円盤に対してガウスの法則を適用して, 導体の直ぐ外側での電界は

$$\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (30)$$



となる。 (5) また導体で囲まれた空洞の内部では, 内部に電荷がない限り電界は0である。なぜなら, 導体境界は同じ電位であり, 空洞内に導体の電位より

一点でも高い電位のところがあつたとすると, 周りより電位が高い点が必ず存在し, その点を囲む微小な閉曲面 Σ について, 曲面上では $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ は正となり, ガウスの法則 $\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} q > 0$ より空洞内に電荷があることになる。低い電位のところがあつた場合も同様であり, 結局空洞内の電位は導体境界の電位と同じとなる。



(6) 空洞内に電荷があれば, その電荷分布に応じて内部に電場が発生する。しかし, 内部の電場は導体外部の影響は全くなく, 内部の電荷分布や空洞の形状のみによって決まることになる。これらのことは 静電遮蔽 (electrostatic shielding) と言われる。

静電エネルギー

2つの点電荷 $q_i(\mathbf{r}_i), q_j(\mathbf{r}_j)$ のポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

だから, n 個の点電荷 ($q_i(\mathbf{r}_i), i = 1, 2, \dots, n$) が分布しているときのポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,j)} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i(\mathbf{r}_i), \quad \phi_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (31)$$

となる。 $\sum_{(i,j)}$ は点電荷のすべての組み合わせである。また $\phi_i(\mathbf{r}_i)$ は電荷 q_i 以外の電荷の作る点 \mathbf{r}_i におけるポテンシャルである。

議論を連続体に拡張するためには, クーロンの法則を少し注意して扱う必要がある。当初, 電荷 q が電場 \mathbf{E} を乱さない程度に微小な電荷として, $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ を導入した。

電荷密度 $\rho_1(\mathbf{r})$ の帯電体1と電荷密度 $\rho_2(\mathbf{r})$ の帯電体2を考え, 帯電体2が帯電体1がつくる静電場 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ から受けるクーロン力は, $\rho_1(\mathbf{r}), \rho_2(\mathbf{r})$ が0でない領域を含む領域 V にわたる積分で表すことができる。

$$\mathbf{F} = \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) dv \quad (32)$$

領域 V における電場は, $\rho_1(\mathbf{r})$ による電場 \mathbf{E}_1 と $\rho_2(\mathbf{r})$ による電場 $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ の和である。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$$

したがって, 式 (32) は本来

$$\mathbf{F} = \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv \quad (33)$$

とすべきであつたと考えられる。ところが, (32) と (33) は静電場に関する限り全く同じとなる。なぜなら, (32) と (33) の差の力 (自己力というそう) を \mathbf{F}_s とすると,

$$\mathbf{F}_s = \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \left\{ \int_V \rho_2(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \right\} dv$$

となるが, 記号 \mathbf{r} と \mathbf{r}' を入れ替えると, $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_s$ が得られ, $\mathbf{F}_s = 0$ となるからである。すなわち, 帯電体2による電場は全体として帯電体2に

力を加えたことにならない。これは作用反作用の法則と矛盾しない。従つて, 静電場のみを考えている間は (32) と (33) は同等である。

電荷が電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で連続的に分布しているとすると (31) は

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dv, \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (34)$$

となる。ここで $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ を代入すると

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \phi \text{div } \mathbf{E} dv = \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \{ \text{div}(\phi \mathbf{E}) - \text{grad } \phi \cdot \mathbf{E} \} dv \\ &= \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2} \epsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv \end{aligned}$$

十分遠方では ϕ は r , \mathbf{E} は r^2 にそれぞれ反比例, 表面積は r^2 に比例し, 面積分の項は積分を十分広くとることによって0とすることができる。したがって

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \mathbf{E}^2 dv \quad (35)$$

となる。任意の電荷分布, すなわち任意の静電場に対して (35) が成り立つから, 静電場のエネルギーは, 場のエネルギー密度 w

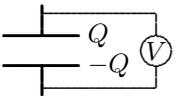
$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \quad (36)$$

を用いて表すことができる。

平行板コンデンサー

コンデンサーの容量

電圧 V で電気量 Q を蓄えることができるコンデンサーの電気容量を



$Q = CV$ で表す。 C の単位は [F]: ファラッド
 導体でできた極板の面積を S , 極板間の距離を d とし, 十分に面積は広く極板の端の部分の議論は無視するとする。表面電荷密度を σ とし, 図のような微小な破線で囲まれた板状の空間に対してガウスの法則を適用して式 (30), すなわち $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ が得られる。

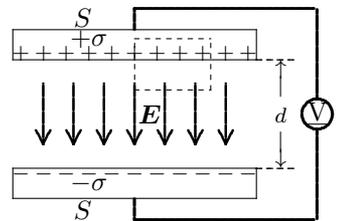
さらに, 極板間において, 極板に平行で微小な板状の空間に対してガウスの法則を適用すると, 極板間のどこでも $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ となる。したがって

$V = Ed, Q = S\sigma$ より

$$Q = S\sigma = SE\epsilon_0 = S \frac{V}{d} \epsilon_0 = \frac{S\epsilon_0}{d} V$$

よって,

$$C = \frac{S\epsilon_0}{d} \quad (37)$$



となる。

コンデンサーの両端にかかる電圧を V , 容量を C としたとき, 帯電した導体の電荷 q を $q + dq$ にするためには, 負極から電荷 dq を正極に移動させればよい。このとき Vdq の仕事を要する。したがって電荷 Q を蓄えているコンデンサーの静電エネルギーは

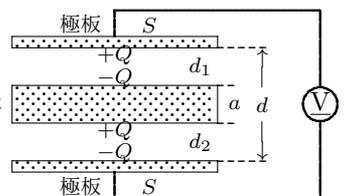
$$W = \int_0^Q V dq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} QV \quad (38)$$

となる。静電エネルギーは $W = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times Sd$ が確認できる。

つぎに, d だけ離れた極板の間に厚さ a の導体を挿入した平行板コンデンサーを考える。

同様にガウスの法則を適用すると, 挿入した導体板にはそれぞれ $+\sigma, -\sigma$ の表面電荷が帯電し, 2つの真空部分は等しい導体電界 $\mathbf{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ を持つ。 $\sigma = \frac{Q}{S}$,

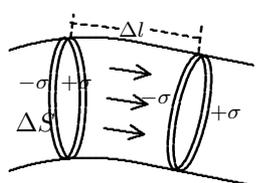
$$V = Ed_1 + Ed_2 = (d_1 + d_2)E \quad \text{を用いると,}$$



$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\epsilon_0 S}{d_1 + d_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d - a} \quad (39)$$

となる。 $a \rightarrow 0$ で導体の挿入の効果はなくなる。この考えを拡張すると, 静電場の持つエネルギーが場の量 (36) で表されることが次のようにして納得できる。静電場を電気力線で囲まれた無数の電気力管に分割する。電気力管の断面積は電界に比例する。

電気力管を, 力管に垂直な距離 Δl ずつ離れた無数のうすい極板で分割する。各極板は $E\Delta S = \text{一定}$ に応じて両面に $\pm \Delta q = \pm \sigma \Delta S = \pm \epsilon_0 E \Delta S = \text{一定}$ の電荷が分布し, 真空部分では元の電界と同じ電界が再現される。



それぞれの真空部分の空間は微小コンデンサーとなっており、静電エネルギーは (38) より

$$\Delta W = \frac{1}{2} \Delta q \Delta V = \frac{1}{2} \Delta S \times \sigma \times E \times \Delta l = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \times \Delta S \Delta l$$

となる。これは全ポテンシャルエネルギーが (35) のように積分で表されるというだけでなく、

$$\text{局所的なエネルギー密度 } w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \text{ が real なものである}$$

ことを強く印象づける。

考察

平行板コンデンサーではコンデンサーの容量は $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ したがって $Q = CV = \frac{\epsilon_0 S}{d} V$ のであった。したがって内部の電界の強さ E は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{V}{d} \quad (a)$$

であるが、一方の極板が作る電界の強さはその半分だから、他方の電極が受ける静電気力は

$$F = -\frac{1}{2} \times E \times Q = -\frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d^2} V^2 = -\frac{Q^2}{2\epsilon_0 S} \quad (b)$$

となる。一方コンデンサーの静電エネルギーは

$$U = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} V^2 = \frac{d}{2\epsilon_0 S} Q^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d \quad (c)$$

コンデンサーは電池などの回路に接続しないとする。そのとき、コンデンサーの電気量 Q は変化しないから

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial d}\right)_Q = -\frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} = -\frac{\epsilon_0 S}{2d^2} V^2 \quad (d)$$

となり (b) と一致する。一方、電池などがコンデンサーに接続されていて、電圧を一定に保ちながら引き離すことを考えてみよう。このとき U を d で微分すれば力

$$F = -\left(\frac{\partial U}{\partial d}\right)_V = \frac{\epsilon_0 S}{2d^2} V^2 \quad (e)$$

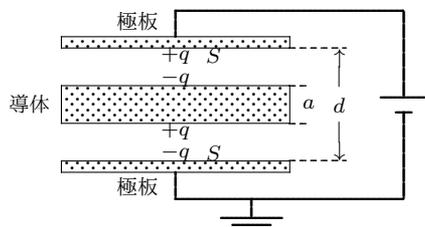
となり、斥力になって (b) と矛盾する。これは電気容量の変化のため電圧を一定にするために電源がする仕事を無視したためである。 Δd だけ距離を変化させると電源は $\Delta W = \Delta Q \cdot V = -\frac{\epsilon_0 S}{d^2} V^2 \Delta d$ の仕事をする。コンデンサーの静電エネルギーは $\Delta U = -\frac{1}{2} \cdot \frac{\epsilon_0 S}{d^2} V^2 \Delta d$ となり、 Δd 引き離すときの力 F は

$$F = -\frac{1}{\Delta d} \{\Delta U - \Delta W\} = -\frac{\epsilon_0 S}{2d^2} V^2 \quad (f)$$

となって (b) と一致する。

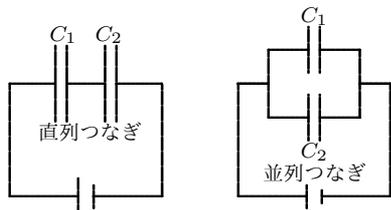
コンデンサーの演習

1 面積 S の極板間の距離 d の平行板コンデンサーに、厚さ a ($a < d$) 面積 S の導体を極板に触れないように差し込んだときの電気容量を求めよ。(本文で説明したが、途中の論理を全て記述せよ。)



$$\begin{aligned} E_1 &= \frac{\sigma}{\epsilon_0} \\ V_1 &= E_1 d_1 = \frac{\sigma d_1}{\epsilon_0} = \frac{d_1 q}{\epsilon_0 S}, \quad V_2 = \frac{d_2 q}{\epsilon_0 S} \\ V &= V_1 + V_2 = \frac{q}{\epsilon_0 S} (d_1 + d_2) \\ C &= \frac{q}{V} = \frac{q}{\frac{q}{\epsilon_0 S} (d_1 + d_2)} \\ &= \frac{\epsilon_0 S}{d - a} \end{aligned}$$

2 電気容量 C_1, C_2 のコンデンサーを直列、並列につないだときの容量を求めよ。



$$\begin{aligned} Q &= C_1 V_1, \quad Q = C_2 V_2 \\ V &= V_1 + V_2 = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} \\ C &= \frac{Q}{V} = \frac{1}{\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}} \\ &= \frac{C_1 C_2}{C_1 + C_2} \\ \frac{1}{C} &= \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_1 &= C_1 V, \quad Q_2 = C_2 V \\ Q &= Q_1 + Q_2 \\ &= C_1 V + C_2 V = (C_1 + C_2) V \\ C &= \frac{Q}{V} = C_1 + C_2 \end{aligned}$$

$$C = C_1 + C_2$$

3 半径 a の導体球に電荷 Q をあたえたとき、静電エネルギー密度 $w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2$ から得た静電エネルギーと、コンデンサーの静電エネルギー $W = \frac{1}{2} CV^2$ とが一致することを確かめよ。

$$\begin{aligned} V &= \phi(a) - \phi(\infty) = -\int_{\infty}^a \mathbf{E} ds = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^a \frac{r}{r^3} ds \\ &= -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^a \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 a} \quad \text{したがって, } Q = 4\pi\epsilon_0 a V \\ &\text{よって, 定義 } (Q = CV) \text{ より, } C = 4\pi\epsilon_0 a \end{aligned}$$

したがって、

$$W = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{Q^2}{2C} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a}$$

$$\text{一方, } E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \quad (r \geq a) \text{ より,}$$

$$\begin{aligned} W &= \int_a^{\infty} \frac{1}{2} \epsilon_0 \left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{Q}{r^2} \right)^2 dv, \quad dv = 4\pi r^2 dr \\ &= \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_a^{\infty} \frac{dr}{r^2} = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0 a} \end{aligned}$$

4 テキスト「物理学」小出昭一郎著からの問題。

面積 400cm^2 の絶縁した 2 枚の金属板を、互いに平行に 1cm 離して対置し、これに 1000V の電位差を与えたとき、

- 両板間にできる電場の強さはいくらか。
- 両板に現れる表面密度はいくらか。
- 両板が引き合う力はいくらか。
- 両板間の電場に蓄えられるエネルギーはいくらか。
 $V = 1000\text{V}$, $d = 1\text{cm} = 10^{-2}\text{m}$, $S = 400\text{cm}^2 = 4 \times 10^{-2}\text{m}^2$,
 $\epsilon_0 = 8.85 \times 10^{-12}\text{C}^2/\text{Nm}^2$ を用いて、

$$(1) E = \frac{V}{d} = 10^5 \text{V/m}$$

$$(2) \sigma = \epsilon_0 E = 8.85 \times 10^{-7} \text{C/m}^2$$

$$(3) F = Q^2/2\epsilon_0 S = \epsilon_0 S E^2/2 = 1.77 \times 10^{-3} \text{N}$$

$$(4) U = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d = 1.77 \times 10^{-5} \text{J}$$

本日の宿題

テキスト「物理学」小出昭一郎著 p.239 の例題には

「一様な静電場内に置かれた導体球」の表面電荷密度は

$$\sigma = 3\epsilon_0 E_0 \cos \theta$$

とある。解説を良く読み、これを自分に理解できる形で解答せよ。

物理II(11 由良) 第6講 誘電分極と電束密度

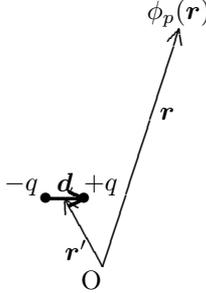
(演習問題解答付き 教師用)

誘電分極と電束密度

微小距離 d ($|d| \ll |r - r'|$) だけ離れた2つの電荷 $-q, +q$ を電気双極子といい、 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ を双極子モーメントという。

電気双極子の2つの電荷の中心を \mathbf{r}' とすると、点P (\mathbf{r}) における静電ポテンシャル ϕ_p は

$$\begin{aligned} \phi_p(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-q}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' - \mathbf{d}/2)|} + \frac{+q}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + \mathbf{d}/2)|} \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\mathbf{d} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \quad (40)$$



ここで ∇ は点Pの座標 \mathbf{r} による演算である。右辺の $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ をあらためて \mathbf{r} とおくと、式(29)の最も単純な例として、

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} \quad (41)$$

が得られる。領域 V に電気双極子が、単位体積当たりの双極子モーメント \mathbf{P} で分布しているとすると静電ポテンシャルは(40)より

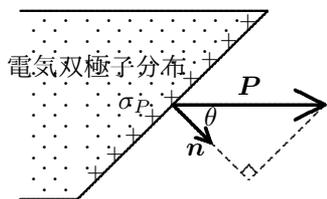
$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' \quad (42)$$

となる。' はいずれも電気双極子の位置 \mathbf{r}' に関する演算である。

(42) に $\text{div}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$ およびガウスの定理を用いると

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_\Sigma \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (43)$$

となる。すなわち電気双極子の分布は静電ポテンシャルにたいして、(22)と比較することによって、右辺第1項から体積密度 $\rho_p = -\nabla \mathbf{P}$ の電荷の分布をもたらす、第2項から周囲の曲面 Σ に面積密度 $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ の電荷の分布をもたらしていることがわかる。



すなわち、電気双極子が均一に分布していても、(43)の右辺第2項から電界を引き起こす原因としての表面電荷が現れる。

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (44)$$

多くの物体は電界の中に入れると、分子のレベルで電氣的に中性であっても、分子の構成要素の正電荷の部分(原子核など)は電界の方向へ、負の電荷の構成要素は電界と逆方向の力を受け電気双極子モーメントを生じる。一般に電界によってこうした双極子モーメントを発生することを誘電分極(dielectric polarization)、 \mathbf{P} を電気分極(electric polarization)という。絶縁体は誘電分極するという意味で誘電体(dielectric)ともいわれる。したがって、誘電体を電気双極子の分布と見なして、電界の変化を調べてみる。

分極した誘電体をどのように分割しても外部に電荷を取り出すことができない。分極による電荷はクーロンの法則の源となったこれまでの電荷—真電荷—と少し違う。したがって、誘電体を含む電場の扱いには新しい概念が必要となる。真電荷の分布密度 ρ_t に対する真空での電界 \mathbf{E}_t の取り扱いに変更しない。則ち $\text{div } \mathbf{E}_t = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_t$ とする。一方誘電分極による電界 \mathbf{E}_p は、無限の遠方まで物質の組成の変化が滑らか(微分可能)で、 $\mathbf{P}(\infty) \rightarrow 0$ とすると電気双極子による電界の式(43)の右辺第2項は無視でき、分極電荷 $\rho_p = -\nabla \mathbf{P}$ のみによって引き起こされると考えられる、則ち $\text{div } \mathbf{E}_p = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_p$ となる。

このとき物質内での電界はこれらの和 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p$ となるから

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div} (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_t - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \mathbf{P}$$

となる。ここで電束密度(electric flux density) \mathbf{D} を

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (45)$$

と定義すると

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_t, \quad \text{積分形では } \int_\Sigma \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q_t, \quad q_t: \text{真電荷} \quad (46)$$

となる。これが誘電体を含む空間で成り立つガウスの法則(電束密度に関するガウスの法則)である。微分形では組成の滑らかな変化を仮定して導

いたが、積分形では領域内に不連続な変化があってもそのまま適用できる。

\mathbf{E}_p に対する電位 $\phi_p(\mathbf{r})$ は(43)と表せるから、

$$\begin{aligned} \int_V \text{div } \mathbf{E}_p dv &= \int_V \text{div} (-\text{grad } \phi_p(\mathbf{r})) dv = \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{V'} (-\nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}')) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' dv - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{\Sigma'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' dv \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \int_{V'} (-\nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' dv + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \int_{\Sigma'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS' dv \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (-\nabla \mathbf{P}(\mathbf{r})) dv + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \int_{\Sigma'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS' dv = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_\Sigma \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

$V \in V'$ でなければならず、 dS' の積分では $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は0であるが、 $\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'$ は分極による表面電荷で、電氣的に中性な誘電体が均一分極しているとその和は0となり、いずれにしても表面積分 dS' の項は0である。一般には V' を無限に広くとり、 $\mathbf{P}(\infty) \rightarrow 0$ と考える。したがって

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_V \text{div} (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p) dv \\ &= \int_\Sigma \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \text{div } \mathbf{E}_p dv = \frac{q_t}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_\Sigma \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

となり、積分形が得られる。

本来、電束(electric flux)の考えは、電荷 q にたいして、電荷から電気力線にそって流れ出すある種の流体のようなものの流れを想定し、電束の総量が q となるように定義したものである。 q から立体角 $d\Omega$ の面積を貫く電束は $d\Phi = \frac{q}{4\pi} d\Omega$ であり、その点での電束密度は $D = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{q}{4\pi r^2}$ となる。この考えは、電束の「実体」について以外は式(46)と完全に合致している。誘電体の中での電界 \mathbf{E} や電束密度 \mathbf{D} は巨視的あるいは平均的な量と定義している。誘電体の中の電束は分子レベルでは複雑に変化しているが、分子を分断することのないように面を設定してそこを貫く電束を平均化したものとする。

誘電体は分極して、表面での分極電荷密度 σ_p をもつ。誘電体全体の電気双極子モーメントは $S\mathbf{d} \cdot \mathbf{P}$ となるが、これを1対の電気双極子と見ると $\mathbf{d} \cdot S\sigma_p$ となり、 $\sigma_p = \mathbf{P}$ が得られる。すなわち分極に垂直な面の表面電荷密度は分極に等しい。一般にはすでに(44)で見たように、 $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ となる。

平行板コンデンサーにおいて、誘電体がないときの電界を E_0 としておくと、誘電体の中では分極による逆向きの電界 $\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$ が発生し電界の強さは $E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$ となる。こうして $D = \epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 E + P$ で分極が表面に現れない表現になる。

電束密度は新しく導入する場の量であり、(46)はその定義に相当する。さらに電束密度と電界の関係(45)は常に成り立つものである(定義)が、電気双極子との対応で、多くの場合等方性の誘電体を仮定すると次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \chi_e: \text{電気感受率(分極率)} \quad (47)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e): \text{誘電率} \quad (48)$$

$$\epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0: \text{比誘電率}$$

いくつかの誘電体の比誘電率

物質	ϵ_r	物質	ϵ_r
空気(20℃)	1.000536		
水蒸気(110℃)	1.0216	水蒸気(140℃)	1.00785
水(25℃)	78.54	エタノール(25℃)	24.36
食塩(25℃)	5.9	炭素	5.5
ソーダガラス	5.5~8.5	磁器	5~7
ゴム	2.5~4.6	ポリエチレン	2.3~2.7
パラフィン	2.1~2.5	塩化ビニール	3.3~6.0
チタン酸バリウム	1150~3200		

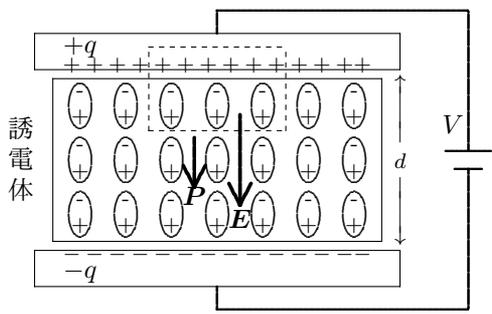
誘電体内で、中心に電荷 q が、ある半径 r の球に対してガウスの法則を適用すると $D \cdot 4\pi r^2 = q$ したがって $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ これより $E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$ となる。これが誘電体内のクーロンの法則である。

また真電荷密度 ρ_t に対する真空での電界 \mathbf{E}_t および、誘電体の中での誘電分極による電界 \mathbf{E}_p はそれぞれ静電ポテンシャル(22)、(43)から導かれ、それらの和である誘電体の中での電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p$ は静電ポテンシャルを持つ。したがって

$$\oint_\Gamma \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \text{すなわち } \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (49)$$

これは真空中で成り立つ静電場の性質(18)が誘電体の中でも同様に成立することを示している。

いま、2つ極板の間に誘電体を挟んだ平行板コンデンサーと極板間に何もはさまない平行板コンデンサーとを比較する。いま、どちらも極板には真電荷 $\pm q$ を帯電させたとする。図は誘電体をはさんだときのモデルである。



破線で囲まれた領域に電束密度に関するガウスの法則を適用すると

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = D \Delta S = \sigma_t \Delta S$$

すなわち同じ電荷 q にたいして、誘電体を挿入したときも、元のままのときも同じ次式が成り立つ。

$$D = \sigma_t \quad (\sigma_t \text{は導体表面の真電荷密度}) \quad (50)$$

誘電体をはさまなかったときの電界を E_0 、電圧を V_0 とする。それぞれのコンデンサーでは

誘電体をはさむ場合	真空の場合
$\epsilon E = \sigma_t$	$\epsilon_0 E_0 = \sigma_t$
$q = CV$	$q = C_0 V_0$
$V = Ed$	$V_0 = E_0 d$

したがって、

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 \quad (51)$$

一般に、分極は電界にたいして同じ方向に起こると考えられ、したがって比誘電率は $\epsilon_r > 1$ が成り立つ。したがって、誘電体内では分極による電界によって電界が小さくなる。また $\frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} = \frac{C}{C_0} = \epsilon_r$ だから、コンデンサーの容量

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (52)$$

は真空のときより大きくなる。

ここで誘電体内でのエネルギー密度にふれておく。真空中では (36) となるが、これを誘電体に拡張した

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (53)$$

が予想される。誘電体内でも静電ポテンシャル ϕ をもち、電荷密度を ρ とすると、(34) より連続体の静電エネルギー U は

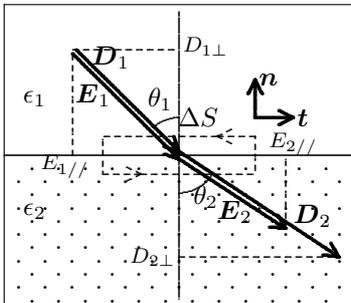
$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dv$$

となる (少し曖昧さがあるが、ここではふれない)。(46) を適用すると

$$U = \frac{1}{2} \int \phi \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \frac{1}{2} \int \{\nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) - \nabla \phi \cdot \mathbf{D}\} dv$$

右辺第1項にガウスの定理を適用し、 $\mathbf{D}\phi$ が十分遠方で少なくとも $1/r$ の3乗で減少することから0と置くことができ、(53) が得られる。

いま2つの誘電体1, 2が接しているとする。



誘電体の境界では、面積 ΔS の境界面を両面から囲む十分小さい厚さ Δd の微小な直方体に対して、ガウスの法則 (46) を適用すると

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} \Delta S + \mathbf{D}_2 \cdot (-\mathbf{n}) \Delta S = \sigma_t \Delta S, \quad \mathbf{n}: \text{面の法線ベクトル}$$

が成立する。したがって、境界で真電荷がないとすると

$$\mathbf{D}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{D}_2 \cdot \mathbf{n}$$

すなわち

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (D_{1\perp} = D_2 \cos \theta_2) \quad (D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2) \quad (54)$$

となる。(54) は境界で ΔS に入る電束線の数が出ていく電束線の数に等しい、すなわち電束線の連続性を意味する。

等方性の誘電体では \mathbf{E} は \mathbf{D} と平行であり、電界を含む面内の長方形の一周にわたって静電場の性質 (49) を適用して

$$\mathbf{E}_1 \cdot (-\mathbf{t}) + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \mathbf{t}: \mathbf{E} \text{ を含む面内での境界面の任意の接線ベクトル}$$

したがって $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{t}$, すなわち

$$\mathbf{E}_{1//} = \mathbf{E}_{2//} \quad (E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2) \quad (55)$$

電気力線は境界で電束線のような連続性は保証されない。

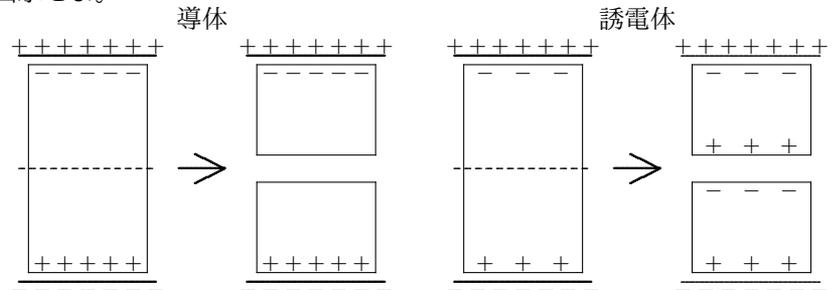
また、(54), (55) および $D_1 = \epsilon_1 E_1, D_2 = \epsilon_2 E_2$ から電気力線 (電束線でもある) の屈折の法則

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (56)$$

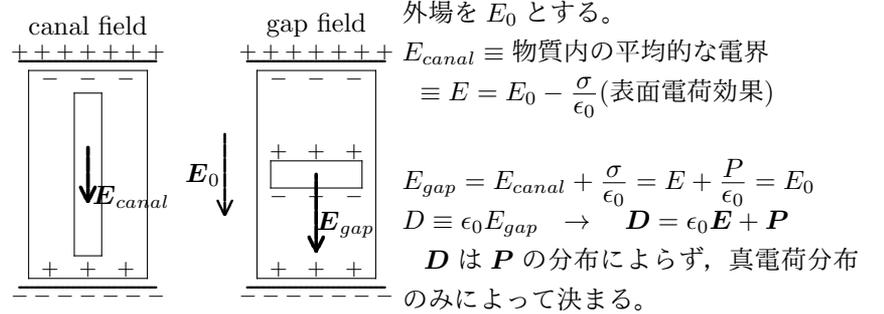
が得られる。 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ のとき、 $\theta_1 < \theta_2$ となる。

例題

1 導体と誘電体それぞれについて、左図のように電極に平行に挿入した直方体を面に垂直に切断したとき、電荷分布はどうなるか。イメージ的に図示せよ。



2 誘電体の中での2つの電界の測りかたについて説明せよ。



誘電体演習

1 つぎの誘電率 ϵ_1, ϵ_2 の平行板からなるコンデンサーの電気容量を求めよ。

(1)

$$V = \frac{D}{\epsilon_1} \cdot \frac{d}{2} + \frac{D}{\epsilon_2} \cdot \frac{d}{2}, \quad D = \sigma, \quad q = \sigma S, \quad q = CV$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{\sigma S}{\frac{D}{\epsilon_1} \cdot \frac{d}{2} + \frac{D}{\epsilon_2} \cdot \frac{d}{2}} = \frac{2S}{d} \cdot \frac{\epsilon_1 \epsilon_2}{\epsilon_1 + \epsilon_2}$$

(2)

$$q = \frac{S \sigma_1}{2} + \frac{S \sigma_2}{2}$$

$$V = \frac{D_1}{\epsilon_1} \cdot d = \frac{\sigma_1}{\epsilon_1} \cdot d, \quad \sigma_1 = \frac{V \epsilon_1}{d}$$

$$V = \frac{D_2}{\epsilon_2} \cdot d = \frac{\sigma_2}{\epsilon_2} \cdot d, \quad \sigma_2 = \frac{V \epsilon_2}{d}$$

$$C = \frac{q}{V} = \frac{S}{2d} (\epsilon_1 + \epsilon_2)$$

2 直行座標系 O-xyz において、 $z < 0$ の領域を①で空気 (ϵ_0)、 $z > 0$ の領域を②、比誘電率を $\epsilon_r = 1.5$ とする。いま、 $\mathbf{E}(z \leq 0) = i + 2j + 3k$ [V/m] で境界面に真電荷はないとする。誘電体の中での \mathbf{E}, \mathbf{D} を求めよ。

誘電体の境界条件は、 $\int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \oint \mathbf{E} ds = 0$ より、

$$D_{1\perp} = D_{2\perp}, \quad \mathbf{E}_{1//} = \mathbf{E}_{2//} \text{ が成り立つ。}$$

$$\text{また、} \mathbf{D}_1 = \epsilon_0 \mathbf{E}_1, \quad \mathbf{D}_2 = \epsilon \mathbf{E}_2, \quad \epsilon = \epsilon_0 \epsilon_r = 1.5 \epsilon_0$$

$$\mathbf{E}_1 = i + 2j + 3k, \quad \mathbf{E}_{1//} = i + 2j$$

$$\mathbf{D}_1 = \epsilon_0 (i + 2j + 3k), \quad \mathbf{D}_{1\perp} = 3\epsilon_0 k$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_{2//} + \mathbf{E}_{2\perp} = \mathbf{E}_{1//} + \mathbf{D}_{2\perp} / \epsilon = \mathbf{E}_{1//} + \mathbf{D}_{1\perp} / \epsilon$$

$$= i + 2j + 3\epsilon_0 k / \epsilon = i + 2j + 2k$$

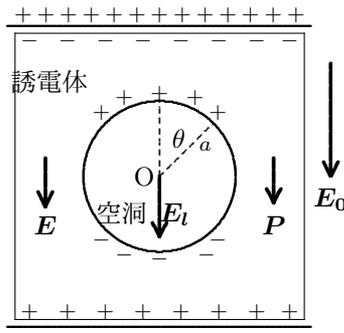
$$\mathbf{D}_2 = \mathbf{D}_{2//} + \mathbf{D}_{2\perp} = \epsilon \mathbf{E}_{2//} + \mathbf{D}_{1\perp}$$

$$= \epsilon \mathbf{E}_{1//} + 3\epsilon_0 k = \epsilon_0 (1.5i + 3j + 3k)$$

誘電体内の空洞内の電界の例

(本日は小テストがあるため, これの口頭説明をしない)

外場 E_0 中の誘電体が P だけ分極しているとする。その誘電体内の半径 a の球形の空洞 (a は十分小さく, 誘電体内の電界を乱さないとする) があつたとき, 誘電体内の電界 E , 空洞の中心における電場 E_l (こうした物質中の電界をローレンツ電界という) を求めよ。



空洞内面の電荷密度 σ は $\sigma = P \cos \theta$

これによる空洞中心の電場は

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{2\pi a \sin \theta \cdot a d\theta \cdot P \cos \theta \cdot \cos \theta}{a^2} = \frac{1}{2\epsilon_0} P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta$$

$$\Delta E = \frac{1}{2\epsilon_0} \int_0^\pi P \cos^2 \theta \sin \theta d\theta = \frac{P}{2\epsilon_0} \left[-\frac{\cos^3 \theta}{3} \right]_0^\pi = \frac{P}{3\epsilon_0}$$

$$D = \epsilon_0 E_0, \quad D = \epsilon_0 E + P \quad \text{より,} \quad E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$$

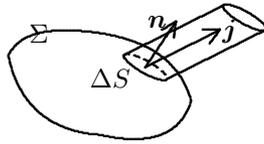
$$E_l = E + \frac{P}{3\epsilon_0} = \frac{1}{3} E_0 + \frac{2}{3} E$$

電流に関する保存則

電流を真電荷の流れとして, その保存則を見ておこう。閉曲面 Σ で囲まれた領域 V について, 電荷密度を ρ とする。任意の点での電流密度 j は電荷の流速を u とすると $j = \rho u$ である。

Σ 上の微小面積 ΔS を単位時間に通過する電荷量は

$$\rho u \cdot n \Delta S = j \cdot n \Delta S$$



n は領域から外向きの面に垂直な単位ベクトル

となる。

したがって単位時間に全表面を通して流出する電荷は $\int_{\Sigma} j \cdot n dS$ となる。これは領域 V の電荷総量の減少に等しいはずである。

$$\int_{\Sigma} j \cdot n dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$$

よって電荷の保存則は

$$\int_{\Sigma} j \cdot n dS + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = 0 \quad (\text{微分形} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0) \quad (57)$$

となる。

いま誘電体の分子レベルまでも表す位置を ξ , 電荷密度を $\rho(\xi, t)$ とすると, 分極した分子の電気双極子モーメント p は, $p = \int P dv = \int \rho \xi dv$ だ

からその時間的变化は $\frac{\partial p}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \xi dv$ となる。(57) を適用して, さらに部分積分を行うと

$$\frac{\partial p}{\partial t} = - \int \text{div}(\rho u) \xi dv = - \int \rho(u \cdot n) \xi dS + \int \rho u dv$$

となる。

x 成分だけ考えて,

$$\left(- \int \text{div}(\rho u) \xi dv \right)_x = - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) x + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) x + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) x \right\} dv$$

$$= - \int \text{div}(\rho u) dv + \int \rho u_x dv = \left(- \int \rho(u \cdot n) \xi dS + \int \rho u dv \right)_x$$

右辺第1項は分子の電荷が存在しない領域まで広げておくと0となる。分極 P はこれを単位体積当たり平均化したものだから

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\int \rho u dv}{\int dv} = \overline{\rho u} \quad (58)$$

とおける。すなわち分極の時間変化 $\frac{\partial P}{\partial t}$ は分子のレベルの電流の空間的に平均化した量を与えている。真電荷の移動による電流を j_t とすると連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j_t + \text{div } \frac{\partial P}{\partial t} = 0$$

と拡張されるべきである。ミクロに見て $\text{div } E = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ のはずだから, これを代入し, $D = \epsilon_0 E + P$ より

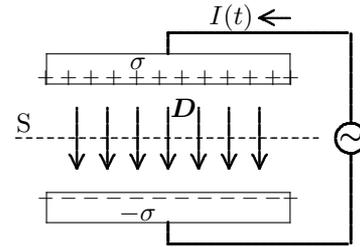
$$\text{div} \left(j_t + \frac{\partial D}{\partial t} \right) = 0 \quad (59)$$

となる。 $\frac{\partial D}{\partial t}$ を変位電流(電束電流)密度という。

電流の連続性を得るためには, 電流に $\frac{\partial D}{\partial t}$ を付加しておけばよい。

そのうち, $\epsilon_0 \frac{\partial E}{\partial t}$ を真空変位電流という。これは真空を真電荷が流れるのではないという意味でこれまでの電流とは違うが, 真電荷が流れたと同じ「効果」を持つという意味で電流の考えの中に入れる。

例で見よう。平行板コンデンサーに交流の電圧をかけたとする。



コンデンサーの電荷 $+q$ の増加が電流となるから, 表面電荷密度を σ とすると

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt} \quad (60)$$

となる。コンデンサー内の電束密度 D は $D = \sigma$ だから, この電流を書き換えると,

$$I(t) = S \frac{d\sigma}{dt} = \frac{dD}{dt} \cdot nS = \int_S \frac{\partial D}{\partial t} \cdot n dS \quad (61)$$

となる。これは, 極板間の真空において, $\frac{\partial D}{\partial t}$ を電流密度と見なすことによって, 非定常な場合でも回路全体での電流の連続性が保証されることを意味している。後で, 電流による磁界(アンペールの法則)が電束電流を電流と見なすこと(マクスウェル・アンペールの法則への拡張)によって, 矛盾のない理論が成り立つことを見る。

電流には現象的にそれを阻止する方向に抵抗が働く。すなわちオームの法則

$$V = RI \quad (62)$$

が成立する。抵抗は長さに比例し, 導線の断面積に反比例するから

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (63)$$

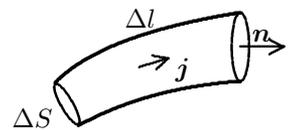
ここで ρ は抵抗率である。この逆数 $\sigma = 1/\rho$ を電気伝導率という。表面電荷密度や電荷密度と記号的に混乱しやすい。

物体の中に断面積 ΔS , 電流に沿った長さ Δl の微小体積を考え, これにオームの法則を適用する。

$$\Delta V = -E \cdot n \Delta l = -\frac{1}{\sigma} \frac{\Delta l}{\Delta S} j \cdot n \Delta S$$

よって, オームの法則の局所的な表現は以下となる。

$$j = \sigma E \quad (64)$$



導体の定常電流では(57)より $\text{div } j = 0$, したがって, 電気伝導率 σ が一定とすると $\text{div } E = 0$, さらに誘電率 ϵ が一定とすると $\text{div } D = 0$, (46)より真電荷密度は $\rho_t = 0$ となる。

空間の領域 V でのエネルギー保存を考える。ジュール熱と言われる熱の発生は

$$\frac{dQ}{dt} = \int_V E \cdot j_t dv = - \int_V \text{grad } \phi \cdot j_t dv = \int_V \{ \phi \text{div } j_t - \text{div}(\phi j_t) \} dv$$

$$= \int_V \phi \text{div } j_t dv - \int_{\Sigma} \phi j_t \cdot n dS$$

一方電界 E は $U = \int_V \frac{1}{2} \epsilon E^2 dv$ のエネルギーを持っているから

$$\frac{dU}{dt} = \int_V E \cdot \frac{\partial D}{\partial t} dv = - \int_V \text{grad } \phi \cdot \frac{\partial D}{\partial t} dv$$

$$= \int_V \{ \phi \text{div} \frac{\partial D}{\partial t} - \text{div}(\phi \frac{\partial D}{\partial t}) \} dv$$

$$= \int_V \phi \text{div} \frac{\partial D}{\partial t} dv - \int_{\Sigma} \phi \frac{\partial D}{\partial t} \cdot n dS$$

したがって

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dU}{dt} = \int_V \phi (\text{div } j_t + \text{div} \frac{\partial D}{\partial t}) dv - \int_{\Sigma} \phi (j_t + \frac{\partial D}{\partial t}) \cdot n dS$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \rho_t, \quad \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\operatorname{div} \mathbf{j}_t$$

を用いると

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dU}{dt} = - \int_{\Sigma} \phi(\mathbf{j}_t + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (65)$$

となる。

エネルギー保存の法則から、変位電流は電流の一種と見なすべきであることを強く印象づける。

話の本筋ではないが、知っておいた方がよいことを追加する。

キルヒホッフの法則

実用的な電流回路の計算には次の「キルヒホッフ法則」が役に立つ。

キルヒホッフの法則

- (1) 電荷は生成も消滅もしないから、全ての結合点で、その点に入る全ての電流と全ての出る電流は等しい。
- (2) 回路の中のどんな閉じた一回りも電圧は0となる。

諸君は中、高校で定常的な回路の計算は習熟しているとして、これらの応用はここでは省略する。

ゼーベック効果と熱電対

2つの異なる金属をつなぎ、両方の接点に温度差を与えると金属の間に電圧が発生し、電流が流れる。これをゼーベック効果という。伝導電子は金属の中を気体分子のようにふるまい、一つの金属の両端に温度勾配を与え続けると、高温部の伝導電子の密度が低下し正に帯電し、伝導電子は低温部に移動し、低温部は負に帯電する。この効果は金属によって異なり、2種類の金属の両端を接続し、2つの接続点温度に差を与えると近似的に温度差に比例した電流が流れる。こうした構造を持った回路を熱電対^{ねつでんたい}という。温度計に利用されている。

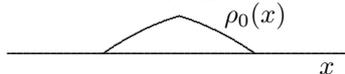
逆に、異なる2種類の金属や半導体を2つの点で接合したものに、電流を流すと、熱も輸送し、片方の接点は冷やされ、もう一方は温められる。これをペルティエ効果という。クーラーに利用されている。

温度差のある導体に電流を流すと、ジュール熱の放出の他に、同じ温度勾配でも電流の向きによって逆の熱の出入り起こる。これをトムソン効果という。

熱電効果とは、電気伝導体や半導体などの金属中において、熱流の熱エネルギーと電流の電気エネルギーが相互に及ぼし合う効果で、ゼーベック効果、ペルティエ効果、トムソン効果を熱電効果をいう。

考察

誘電率 ϵ 、電気伝導率 σ の均一な物体がある。はじめに x 軸方向に $\rho_0(x)$ の電荷分布があったとする。電荷分布の時間による変化を考える。



$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j} = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{D} = \rho, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$$

緩和時間を $\tau = \frac{\epsilon}{\sigma}$ とおくと、銅では

$$\tau = 0.15 \times 10^{-18} \text{sec} \quad \text{となる。}$$

x 軸方向の電流密度、電界をそれぞれ j, E とすると

$$\text{電流の連続の式は } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial j}{\partial x} = 0, \quad \text{オームの法則は } j = \sigma E$$

$$\text{ガウスの法則は } \frac{\partial \epsilon E}{\partial x} = \rho$$

$$\text{これらから } \frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} + \frac{\sigma}{\epsilon} \rho(x, t) = 0$$

$$\text{積分して, } \rho(x, t) = \rho_0(x) e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t}$$

$$\tau = \frac{\epsilon}{\sigma} \text{ とおくと } \rho(x, t) = \rho_0(x) e^{-t/\tau}, \quad \tau \text{ は緩和時間}$$

電流回路演習

これらは、時間の関係で、宿題になるかもしれない。

1 次の電流についての問いに答えよ。

(1) 半径1mmで長さ1mの銅線の抵抗はいくらか。銅の抵抗率は $\rho = 1.64 \times 10^{-8} \Omega \text{m}$ とする。

(2) 半径1mmの1mの長さの銅線に1Vの電圧をかけたとする。流れる電流は何Aとなるか。

またこのときの内部の電界はいくらか。

(3) 半径1mmで100kmの長さの銅線に1Aの電流を流すには何Vの電圧をかけねばならないか。

(1) 抵抗率は、断面積 S 、長さ l の導線の抵抗 R とは

$$R = \rho \frac{l}{S} \text{ の関係にある。}$$

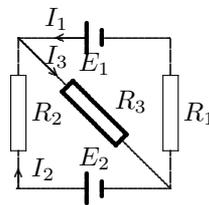
$$R = \rho \frac{l}{S} = 1.64 \times 10^{-8} \times \frac{1}{\pi(1 \times 10^{-3})^2} \Omega = 0.0052 \Omega$$

$$(2) I = \frac{V}{R} = \frac{1}{0.0052} \text{A} = 191 \text{A}$$

$$E = \frac{1V}{1\text{m}} = 1 \text{V/m}$$

$$(3) V = RI = 0.0052 \times 10^5 \times 1 \text{V} = 520 \text{V}$$

2 右図の電流回路では、 R_1, R_2, R_3 に流れる電流はいくらか。



電気回路網の各分岐点から出ていく電流を正にとって I_1, I_2, \dots, I_n とすると $\sum_{i=1}^n I_i = 0$ (Kirchhoffの第1法則) になりたつ。

また回路網の中の任意の閉回路について、各導線の抵抗を R_i 、電流、起電力を回路の向きを正として I_i, V_i とすると $\sum_i I_i R_i = \sum V_i$ (Kirchhoffの第2法則) が成り立つ。

$$I_1 + I_2 - I_3 = 0$$

$$R_1 I_1 - R_2 I_2 = E_1 - E_2$$

$$R_1 I_1 + R_3 I_3 = E_1$$

これらより

$$I_1 = \frac{(R_2 + R_3)E_1 - R_3 E_2}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

$$I_2 = \frac{-R_3 E_1 + (R_1 + R_3)E_2}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

$$I_3 = \frac{R_2 E_1 + R_1 E_2}{R_1 R_3 + R_1 R_2 + R_2 R_3}$$

小テスト

* 読みやすい文字で、厳密な表現をすべし。ベクトル記号はそれらしく書くべし。講義では \vec{E}, \vec{k} など誤解を避けるため矢線で表現しているが、プリントでは \mathbf{E}, \mathbf{k} などゴシックで表している。どちらでも良いが、ベクトルであることを明確に表現すべし。

* 答えは、結果だけでなく、話の筋を示すことが重要だ。

物理II(11 由良) 第8講 電流の相互作用

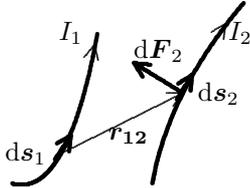
電流の相互作用とビオ・サバルの法則

静電場の出発点を電荷に関するクーロンの法則にとったと同様に、静磁場の出発点を磁石に関するクーロンの法則にとるためには、真電荷に相当する真磁荷の存在が望ましい。現在のところ、真磁荷は発見されていない。したがって、別の原理を出発点に選ぶ方が統一した理論を構成し易い。電荷に関するクーロンの法則の役割を、次の実験に基づく静磁場についての法則に担わせることにする。しかるべき処理によって、静磁場のクーロンの法則はこれによって説明されると予想を立てる。こうした流れの中でアンペールは数々の実験をした。この議論の進め方を「電気一元論」ということもある。定常電流 I_1 が定常電流 I_2 に及ぼす力 F_2 は

$r_{12} = r_2 - r_1$ とおくと

$$F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{ds_2 \times (ds_1 \times r_{12})}{r_{12}^3} \quad (66)$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 真空の透磁率



となる。

比例係数 μ_0 がすっきりした値であるのは、単位系の選択法による(後で述べる)。閉曲線 Γ_1, Γ_2 は任意の曲線について成立するから、これより、電流 I の点 r' にある線素 ds' が点 r に作る磁束密度 $dB(r)$ を

$$dB(r) = \frac{\mu_0 I ds' \times (r - r')}{4\pi |r - r'|^3} \quad (67)$$

とすると、電流 I の点 r における線素 ds が磁束密度 $B(r)$ から受ける力は

$$dF = Ids \times B, \quad dF: \text{アンペールの力} \quad (68)$$

となる。(67) をビオ・サバル (Biot-Savart) の法則という。

電流の相互作用 (66) をビオ・サバルの法則 (67) と アンペールの力 (68) に分解するということは、遠隔作用説で表現すると Γ_1 上の電流素片 $I_1 ds_1$ が Γ_2 上の電流素片 $I_2 ds_2$ に作用する力は

$$d^2 F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{ds_2 \times (ds_1 \times r_{12})}{r_{12}^3}$$

である、ということに対応する。公式 $A \times (B \times C) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ を用いて、

$$d^2 F_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} [(ds_2 \cdot (r_2 - r_1)) ds_1 - (ds_2 \cdot ds_1)(r_2 - r_1)] \dots \quad (a)$$

全く同様に、 Γ_2 上の電流素片 $I_2 ds_2$ が Γ_1 上の電流素片 $I_1 ds_1$ に作用する力は

$$d^2 F_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} [(ds_1 \cdot (r_1 - r_2)) ds_2 - (ds_1 \cdot ds_2)(r_1 - r_2)] \dots \quad (b)$$

(a) の第1項は Γ_1 の線素 ds_1 に平行な方向を向いており、(b) の第1項は Γ_2 の線素 ds_2 に平行な方向を向いている。右辺第2項は (a), (b) 同じ大きさで、反対の向きの力を表している。(a), (b) の右辺第1項の違いより、電流素片間の力は作用・反作用の法則を満たしていない。(a) から電流 I_2 が電流 I_1 から受ける全体の力 F_2 を求めるとき、(a) の第1項の ds_2 での積分は

$$\int_{\Gamma_2} \frac{ds_2 \cdot (r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3} = \int_{\Sigma_2} \text{rot} \left(\frac{r_2 - r_1}{|r_2 - r_1|^3} \right) \cdot ndS_2 = 0$$

となる。 F_1 についても同様だから、

$$F_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(ds_2 \cdot ds_1)(r_2 - r_1)}{|r_2 - r_1|^3}$$

$$F_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(ds_2 \cdot ds_1)(r_1 - r_2)}{|r_1 - r_2|^3}$$

従って、電流 I_1 と電流 I_2 の間の力は作用・反作用の法則を満たしている。歴史的にも、電流素片の相互作用を書き換える色々な工夫があったそうだが、成功しなかった。結局、電流の相互作用を遠隔作用説のままで、電流素片の相互作用に分解すれば作用・反作用の法則を維持することが困難となった。ここでも、近接作用説への転換が求められたことになる。

[補足] 相対性原理によると、保存則は非局所的であってはならない(岩波現代文庫「物理法則はいかに発見されたか」 R.P. ファインマン 江沢洋訳を参照して下さい)。

ビオ・サバルの法則を電流密度で表すと、 Ids' を $j(r')dv'$ に置き換えて、

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} dv' \quad (69)$$

となる。あるいは、式 (69) は、

$$B(r) = \text{rot } A(r), \quad \text{ただし } A(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r')}{|r - r'|} dv' \quad (70)$$

としても同じである。なぜなら、代入してみると、

$$\text{公式 } \text{rot}(\phi A) = \nabla\phi \times A + \phi \text{rot } A \quad (\text{今の場合 } A \text{ に対応した部分 } j(r'))$$

(演習問題解答付き 教師用)

は r について定数) を用いると

$$B(r) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{rot} \frac{j(r')}{|r - r'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{|r - r'|} \times j(r') dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{j(r') \times (r - r')}{|r - r'|^3} dv'$$

となるからである。(69) あるいは (70) が、電荷についてのクーロンの法則に対する電場の式 (3) に対応した磁場の式である。

法則の電流 I による表現から電流密度 $j(r)$ による表現の変換は直感的にやればよいが、次のように考えておこう。導線 Γ を電流 I が流れているときの電流密度は

$$j(r) = \int_{\Gamma} I \delta(r - r(s)) t(s) ds, \quad \text{曲線 } \Gamma: r = r(s)$$

$t(s) ds = ds$, $t(s)$ は線素 ds の単位接線ベクトルと表せるから、任意の $f(r)$ に対して、

$$\begin{aligned} \int j(r) f(r) dv &= \int \left\{ \int_{\Gamma} I \delta(r - r(s)) t(s) ds \right\} f(r) dv \\ &= \int_{\Gamma} \left\{ \int I \delta(r - r(s)) f(r) dv \right\} t(s) ds \\ &= \int_{\Gamma} I f(r(s)) t(s) ds = \int_{\Gamma} I f(r) ds \end{aligned}$$

よって、電流密度 j で表現された法則は導線 Γ を流れる電流 I に対する法則に書き換えられる。これは、電流 I に関する法則の全てが直ちに電流密度で表した法則に拡張できることを保証しているのではない。

しかし、任意の電流素片 Ids に対して成り立つ法則は、 $Ids \rightarrow j(r)dv$ の書き換えが可能で、(69) は (67) の拡張として成り立つはずである。なぜなら、 r を含む体積 ΔV の微小領域に含まれている電流素片を $\Delta J_k = I_k \Delta s_k$, $k = 1, 2, \dots$, とすると、電流密度 j は

$$j(r) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_k \Delta J_k}{\Delta V}$$

と定義できるから、領域 V について、

$$\sum_k f(r_k) I_k \Delta s_k \rightarrow \int_V f(r) j(r) dv$$

の書き換えが可能となり、電流素片 Ids についての法則を $j(r)dv$ についての法則に書き換えることができる。

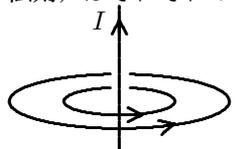
また、アンペールの力 (68) は、単位体積あたりのアンペールの力を f とすると、左辺を $f dv$, 右辺の Ids を $j(r)dv$ と置き換えて、

$$f = j \times B \quad (71)$$

となる。

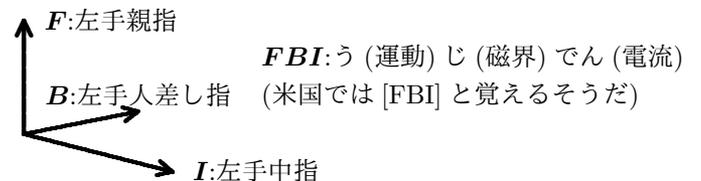
はじめに定性的側面を考える。

電気力線と同様に、磁束密度を磁束密度の大きさに比例した密度で示した図を磁束線という。ビオサバルの法則は無数の直線電流の場合は下図のようになる。また、電流が磁界から受ける力、アンペールの力は下図のようになる。高校以下で学んだ電流の相互作用の議論すなわち、磁場の形成(右ねじの法則)と電流が磁場から受ける力(フレミング左手の法則)はそれぞれの



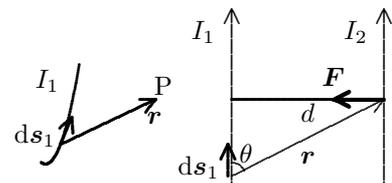
右ねじの法則

核心部分を定性的に表現したものである。



これらは極めて簡単な実験でかなりの精度で確認できる。しかし、ビオサバルの法則は磁場の強さが電流からの距離の2乗に反比例する、という決定的な主張を含んでいることも忘れてはならない。

ビオサバルの法則の一つ目の例として、距離 d だけ離れた平行2直線に同じ方向に I_1, I_2 の電流が流れているとき、単位長さ当たりの力を求めてみよう。



電流 I_1 の線素 ds_1 の部分が電流 I_2 上の1点Pに作る磁束密度 dB は

$$dB = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{ds_1 \times r}{r^3}$$

だから、 dB は I_1 と I_2 が作る平面に垂直(紙面の

表面から裏面に向かう)であり、

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{r \sin \theta dx}{r^3} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} d \int \frac{dx}{r^3}$$

$$= \frac{2\mu_0 I_1 d}{4\pi} \int_0^\infty \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{2\mu_0 I_1 d}{4\pi} \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$

となる。すなわち直線電流が距離 d だけ離れたところで作る磁束密度は右ねじを電流の向きにすすめるときのねじの回る向き(右ねじの法則)で、大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad (72)$$

となる。電流 I_1 による磁束密度 \mathbf{B} が線素 $d\mathbf{s}_2$ の電流 I_2 に作用する力 $d\mathbf{F}$ は $d\mathbf{F} = I_2 d\mathbf{s}_2 \times \mathbf{B}$ で与えられるから、単位長さ当たりの力 \mathbf{F} は引き合う方向(フレミング左手の法則)で、大きさは

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

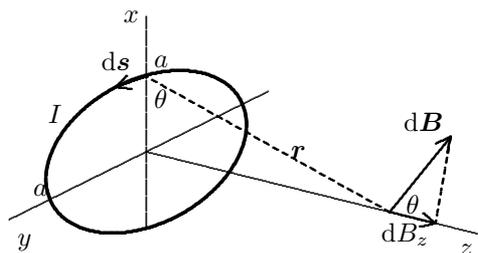
となる(ピンチ効果, pinch:締め付ける)。

MKSA 有理化単位系では、1mの間隔で平行に置かれた2本の直線状導体と同じ大きさの電流が流れたとき、導体の単位長さ当たり $2 \times 10^{-7} \text{N}$ の力を及ぼす時を 1A と定義する。すなわち、 $2 \times 10^{-7} \text{N/m} = \frac{\mu_0 \times 1\text{A} \times 1\text{A}}{2\pi \times 1\text{m}}$ 、 $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ となる。1C(クーロン)=1A×1secである。また後で議論するが光速を $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}$ とすると、 $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$ だから、

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 8.9876 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2 \text{ となる。}$$

また、磁束密度の単位は(68)から、1T(テスラ)=1N/A·mとする。これは常用単位の 10^4 ガウスに相当する。

ビオサバルの法則の二つ目の例として、円形電流が中心軸上の点に作る磁場を求めておこう。 xy 平面上の半径 a の円周上を電流 I が流れているとする。



z 軸上の点 $P(z)$ では、円周上の線素 $d\mathbf{s}$ と \mathbf{r} は垂直であり、 $d\mathbf{s} \times \mathbf{r}$ は $d\mathbf{s}$ と \mathbf{r} の面に垂直であり、大きさは $|d\mathbf{s} \times \mathbf{r}| = r ds$ なる。磁界は対称性より z 軸方向を向いており

$$dB_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{|d\mathbf{s} \times \mathbf{r}|}{r^3} \cos \theta$$

$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I a ds}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (73)$$

円の中心での磁束密度は

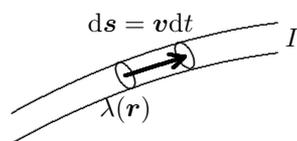
$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (74)$$

であり、遠方の軸上 ($z \gg a$) の磁束密度は次のようになる。

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \quad (75)$$

次に、アンペールの力を考える。

導線を、線密度(単位長さ当たり)の電荷 $\lambda(\mathbf{r})$ が速度 \mathbf{v} で移動しているとすると、電流は $I = \lambda v$ となる。電流に沿って微小時間 dt の移動距離に等しい線素 $d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$ を考えると、そこに含まれる電荷 dq は $dq = \lambda ds = \lambda v dt$ 、したがって $I ds = v dq$ となる。(68)を適用すると $d\mathbf{F} = v dq \times \mathbf{B}$ となる。



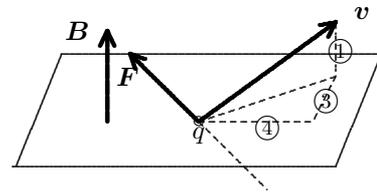
したがって一般に、電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} の中で電荷 q が速度 \mathbf{v} で運動するときのローレンツ力が働く。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (76)$$

これをあらためて磁場、電場の定義と見なすこともできる。

例題

1 z 軸方向の一樣な磁束密度 $\mathbf{B} = 1\mathbf{k}$ [テスラ] の中を電子 $q = -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$ が速度 $\mathbf{v} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ [km/sec] で運動している。ローレンツ力を求めよ。



$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$= -1.6 \times 10^{-19} (4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}) \times 1\mathbf{k} \times 10^3 \text{ [N]}$$

$$= -1.6 \times 10^{-16} (3\mathbf{i} - 4\mathbf{j}) \text{ [N]}$$

2 磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ の中を質量 m 、電気量 q の荷電粒子が運動するとき、その速さ(運動エネルギー)は一定であることを証明せよ。運動方程式は

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})$$

である。

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{v} \cdot (q\mathbf{v} \times \mathbf{B}(\mathbf{r})) = \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot (\mathbf{v} \times q\mathbf{v}) = 0$$

$$\frac{1}{2} m \frac{dv^2}{dt} = 0. \quad v = \text{一定}$$

ローレンツ力演習

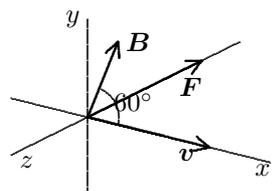
1 一定の磁場(磁束密度 \mathbf{B}) の中を質量 m 、電気量 q の荷電粒子が \mathbf{B} に垂直な平面内を速さ v で円運動している。半径を求めよ。

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$$

$$m \frac{dv}{dt} = 0, \quad m \cdot \frac{v^2}{r} = qvB$$

$$\text{よって } v = \text{一定}, \quad r = \frac{mv}{qB} = \text{一定}, \quad \omega = \frac{v}{r} = \frac{qB}{m} = \text{一定}$$

2 An electron in a television picture tube moves toward the front of the tube with a speed of $8.0 \times 10^6 \text{m/s}$ along the x axis. Surrounding the neck of the tube are coils of wire that create a magnetic field of magnitude 0.0025T , directed at an angle of 60° to the x axis and lying in the xy plane. Calculate the magnetic force on the acceleration of the electron.



$$q = -e = -1.6 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}$$

$$F = |q|vB \sin \theta$$

$$= (1.6 \times 10^{-19} \text{C})(8.0 \times 10^6 \text{m/s})(0.0025 \text{T})(\sin 60^\circ)$$

$$= 2.8 \times 10^{-14} \text{N}$$

$$a = F/m_e = \frac{2.8 \times 10^{-14} \text{N}}{9.11 \times 10^{-31} \text{kg}}$$

$$= 3.1 \times 10^{16} \text{m/s}^2$$

本日の宿題

すでに何度も用いたが、つぎの定積分をもとめよ。

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}})$$

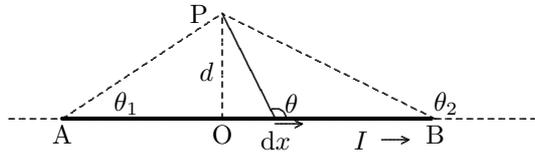
$$\int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (= -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}})$$

$$\int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} \quad (= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \log|x + \sqrt{x^2 + a^2}|)$$

物理II(11 由良) 第9講 アンペールの法則

ビオサバルの法則の復習のための例題と演習

例題 線分上を流れる電流 I の距離 d 離れた点での磁束密度を求めよ。



磁界は紙面の裏から表に垂直な方向

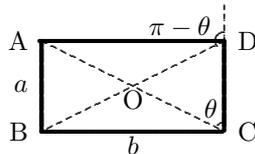
$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I dx \cdot \sin \theta}{d^2 + x^2}$$

$$\tan \theta = -\frac{d}{x}, \quad x = -d \cot \theta, \quad dx = \frac{d}{\sin^2 \theta} d\theta$$

$$B = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I \cdot \frac{d}{\sin^2 \theta} \cdot \sin \theta d\theta}{d^2(1 + \cot^2 \theta)}$$

$$= \frac{I\mu_0}{4\pi d} \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sin \theta d\theta = \frac{I\mu_0}{4\pi d} (\cos \theta_1 - \cos \theta_2)$$

演習 2辺の長さ a, b の長方形コイルに電流 I が流れているとき、その中心における磁束密度を求めよ。



$$\text{CD について } \frac{I\mu_0}{4\pi \cdot b/2} (\cos \theta - \cos(\pi - \theta)) = \frac{I\mu_0}{\pi b} \cos \theta$$

$$\text{DA について } \frac{I\mu_0}{4\pi \cdot a/2} (\cos(\frac{\pi}{2} - \theta) - \cos(\frac{\pi}{2} + \theta)) = \frac{I\mu_0}{\pi a} \sin \theta$$

$$B = 2 \times \frac{I\mu_0}{\pi} \left\{ \frac{\cos \theta}{b} + \frac{\sin \theta}{a} \right\}$$

$$= \frac{2I\mu_0}{\pi} \cdot \frac{a \cos \theta + b \sin \theta}{ab}$$

$$= \frac{2I\mu_0}{\pi} \cdot \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{ab}$$

アンペールの法則と真磁荷が存在しないこと

磁場が磁荷の分布から発生するならば、磁位 ϕ_m (磁気スカラーポテンシャル) が存在し、 ϕ_m の傾きから求めることができた。しかし電流が作る磁場はスカラーポテンシャルを持たない。静電場に関するクーロンの法則 (4) は、2つの場に関する法則、静電場に関するガウスの法則 (14) と電位の存在の法則 (18) で表された。同じように、ここでは、ビオ・サバルの法則が2つの場の法則

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{アンペールの法則}) \quad (77)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{真磁荷が存在しない}) \quad (78)$$

で表されることを見る。

始めに、ビオ・サバルの法則 (69) から出発する。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

これを、公式 $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ に直接代入して、

$$\begin{aligned} \text{div } \mathbf{B} &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int -\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \text{rot} \left(\text{grad} \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = 0 \end{aligned}$$

よって

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{積分形では } \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{真磁荷が存在しない})$$

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ は磁場の重要な性質である。静電界 \mathbf{E} と比較すると明らかのように、磁場はすべてビオ・サバルの法則によって発生し、それ以外の原因が存在しないとすると、静電場の真電荷に相当する磁場の真磁荷は存在しないことを示している。もし、真磁荷が存在するのならば、磁場の「湧きだし」を引き起こし、 $\text{div } \mathbf{B} \neq 0$ をもたらす。また、同じことであるが、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ は、磁束密度の連続性を保証する。

また、ビオ・サバルの法則の $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、すでに

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \text{ただし } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

によって与えられることを知っているし、このベクトルポテンシャル \mathbf{A} は $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を満たす。

学籍番号 () 名前 ()

ここで、ベクトルポテンシャルについて、数学的な議論を行っておく。

1 ベクトル \mathbf{A} がポテンシャルを持っているとき、すなわち $\mathbf{A} = -\nabla \phi$ となるスカラー関数 ϕ が存在するとき、

$$\text{rot } \mathbf{A} = -\text{rot } \nabla \phi = 0 \quad \text{渦なし}$$

となる。逆に $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ となるベクトル場 \mathbf{A} にはたいしては

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

より、点Oから点Pまでの積分

$$\phi = - \int_{OP} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

がOからPへの道筋によらずPの位置のみによってきまる。したがってこの ϕ について点Pにおける任意の方向の微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = -(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds})$$

となるが、任意の微分可能な関数 ϕ について

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

が成り立つから

$$A_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad A_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad A_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \text{すなわち } \mathbf{A} = -\nabla \phi$$

となる。すなわち

「ベクトル場 \mathbf{A} がポテンシャルを持つための必要十分条件は $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ (渦なし) である。」

2 ベクトル \mathbf{B} に対して $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ となるベクトル \mathbf{A} をベクトルポテンシャルという。このとき

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div } \text{rot } \mathbf{A} = 0$$

となる。逆に $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ならば \mathbf{B} はベクトルポテンシャル \mathbf{A} を持つことを示そう。 $A_z = 0$ とする。このとき

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

を満たす A_x, A_y を求めればよい。第2, 第1式から

$$A_x = \int_c^z B_y dz + \xi(x, y), \quad A_y = - \int_c^z B_x dz + \eta(x, y)$$

これを第3式の右辺に代入して

$$B_z : - \int_c^z \left(\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} \right) dz + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \text{ より } \frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z} \text{ だから}$$

$$B_z : \int_c^z \frac{\partial B_z}{\partial z} dz + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = B_z - B_z(z=c) + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

したがって $B_z(z=c) = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$ となるように $\xi(x, y), \eta(x, y)$ を選んでおけば第3式が成り立つ。これは常に可能だ。よって

「ベクトル場 \mathbf{B} がベクトルポテンシャルをもつ必要十分条件は $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (湧出点なし) である」

任意の ϕ に対して、 $\text{rot}(\nabla \phi) = 0$ だから、 \mathbf{B} のベクトルポテンシャルを \mathbf{A} とすれば、 $\mathbf{A} + \nabla \phi$ もベクトルポテンシャルである。そこでベクトルポテンシャルに条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ をつける。すなわち

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \text{ なるベクトル } \mathbf{B} \text{ に対して, } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0$$

なるベクトル \mathbf{A} を求めてみる。こうして得られるベクトルポテンシャルを Coulomb ゲージのポテンシャルという。

$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{a}$ とおけば、 $\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot } \text{rot } \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$ より

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{a}, \quad (\nabla^2 A_x = -a_x, \quad \nabla^2 A_y = -a_y, \quad \nabla^2 A_z = -a_z)$$

となる。これはポアソンの方程式の解 (28) を用いて

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad A_y(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad A_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

すなわち、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (79)$$

となる。

この \mathbf{A} は次のようにして $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を満たすことがわかる。 $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ において、

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \text{div} \int \frac{\mathbf{a}'}{r} dv' = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \text{div } \mathbf{a}' + \nabla \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' \right) dv' = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' dv'$$

場の点 \mathbf{r} における微分から積分要素の点 \mathbf{r}' の微分に変更して

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' dv'$$

一方 $\text{div } \mathbf{a} = \text{div } \text{rot } \mathbf{B} = 0$ より

$$\nabla' \cdot \frac{\mathbf{a}'}{r} = \frac{1}{r} \nabla' \cdot \mathbf{a}' + \nabla' \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' = \nabla' \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}'$$

したがって、 r が十分大きなところでは $\mathbf{a}' = 0$ を考慮して積分すると

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \cdot \frac{\mathbf{a}'}{r} dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{a}'}{r} \cdot \mathbf{n}' dS' = 0$$

となる。

また、(79) の $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ に代入して、

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \int \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot } \mathbf{a}(\mathbf{r}') + \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}') \right) dv' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \end{aligned}$$

となる。これは、ビオサバルの法則である。この \mathbf{B} は $\text{div } \mathbf{B} = 0, \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{a}$ を満たす。

以上

となり、 $B_1 = B_2$ すなわち内部ではどこでも同じ磁界の強さを持つ。ソレノイドの外で軸に平行な長方形を考えると、同様に外では同じ磁界の強さを持つことになる。ところが十分ソレノイドから離れたところでは磁場は0と考えられるから、ソレノイドの外では磁場は常に0となる。また長方形がコイルをまたぐようにとると

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = Bl = nI\mu_0 I$$

となり、ソレノイドの内部の磁束密度が求まる。

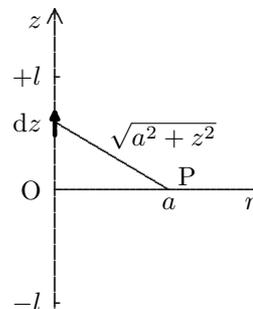
$$B = \mu_0 n I$$

このように、アンペールの法則に対称性をうまく用いて磁束密度を求めることができる場合は、それほど多くはない。

しかし、静電場をガウスの法則で表したように定常電流による磁場をアンペールの法則で表すのは、実用のためというのではなく、磁場を電場と統一して理解するのに欠かせないからである。

ベクトルポテンシャル演習

長さ $2l$ の導線に流れる電流 I によって、導線の中点の垂線上の点に生じる磁場のベクトルポテンシャルを求め、磁束密度を計算せよ。また $l \rightarrow \infty$ のとき、磁束密度はどうなるか。



原点を導線の中点、導線を z 軸とする円筒座標で、原点から a 離れた $z = 0$ の点を P とする。 $I d\mathbf{s}'$ は z 成分のみだから、 $A_x = A_y = 0$ である。

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{a^2 + z^2}} = \frac{\mu_0 I}{4\pi} \log \frac{\sqrt{a^2 + l^2} + l}{\sqrt{a^2 + l^2} - l} = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \left\{ \frac{l}{a} (1 + \sqrt{1 + (a/l)^2}) \right\}$$

$$\mathbf{B} = (\text{rot } \mathbf{A})_P \text{ より}$$

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} = \frac{\partial a}{\partial y} \frac{dA_z}{da} = \frac{y}{a} A'_z, \quad B_y = -\frac{\partial A_z}{\partial x} = -\frac{\partial a}{\partial x} \frac{dA_z}{da} = -\frac{x}{a} A'_z, \quad B_z = 0$$

$$A'_z = \frac{dA_z}{da} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \left\{ 1 - \frac{(a/l)^2}{\sqrt{1 + (a/l)^2}} \times \frac{1}{1 + \sqrt{1 + (a/l)^2}} \right\} = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a} \frac{1}{\sqrt{1 + (a/l)^2}}$$

$$l \rightarrow \infty \text{ で } B_x = -\frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} y, \quad B_y = \frac{\mu_0 I}{2\pi a^2} x, \quad B_z = 0$$

これは (72) で求めた磁束密度と同じ結果である。宿題... 上の計算を全てチェックせよ。

$$z = a \tan \theta, \quad dz = a \sec^2 \theta d\theta, \quad \frac{1}{\sqrt{z^2 + a^2}} = \frac{\cos \theta}{a}$$

$$\int_{-l}^l \frac{dz}{\sqrt{z^2 + a^2}} = 2 \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\cos \theta} = 2 \int_0^{\theta_0} \frac{d(\sin \theta)}{1 - \sin^2 \theta}$$

$$= 2 \int_0^{\theta_0} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{1 - \sin \theta} + \frac{1}{1 + \sin \theta} \right) d(\sin \theta)$$

$$= \left[\log \frac{1 + \tan \theta}{1 - \tan \theta} \right]_0^{\theta_0} = \log \frac{1 + \tan \theta_0}{1 - \tan \theta_0}$$

$$= \log \frac{\sqrt{l^2 + a^2} + l}{\sqrt{l^2 + a^2} - l}$$

したがって、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla^2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ &= \mu_0 \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

よって、

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{積分形では} \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

したがって、ビオ・サバルの法則 (69) から、真磁荷が存在しない条件 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ とアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ が導かれた。

次に、逆の議論をしよう。すなわち、真磁荷が存在しない条件 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ とアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ とを仮定する。

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ なるベクトル \mathbf{B} にたいして、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ なるベクトルポテンシャル \mathbf{A} が存在する。任意の ϕ に対して、 $\text{rot}(\nabla \phi) = 0$ だから、 \mathbf{B} のベクトルポテンシャルを \mathbf{A} とすれば、 $\mathbf{A} + \nabla \phi$ もベクトルポテンシャルである。そのため、ベクトルポテンシャルに条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ (クーロン条件) も付け加える。さらに、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ ならば、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ である。従って、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ (定常電流)、十分遠方では $\mathbf{j} = 0$ を満たす任意の \mathbf{j} に対して、方程式 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, 条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を満たす解が、ベクトルポテンシャル \mathbf{A}

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (80)$$

であることを示せばよい。しかし、これはそれぞれ証明済みである。これより、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ を計算すると、ビオ・サバルの法則 (69) が得られる。また、輪型の線電流の場合は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (81)$$

であり、これよりたとえば輪型の線電流の場合のビオ・サバルの法則が得られる。

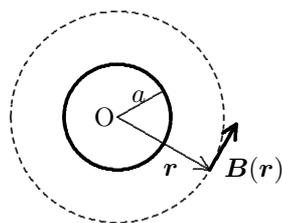
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times I d\mathbf{s}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

こうして、真磁荷が存在しない条件 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ とアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ はビオ・サバルの法則と等価であることがわかる。

アンペールの法則が磁場を求めるのに非常に役立つ場合を2つだけ考える。

アンペールの法則の適用例

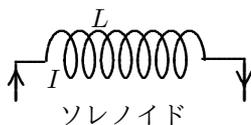
1 半径 a の無限に長い円筒状の導体に電流 I が流れているときの磁場を求めよう。



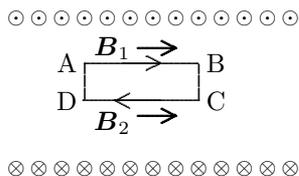
図は軸に垂直な切断面で、電流は紙面の下から上に向かって流れているとする。中心 O からの半径を r として、アンペールの法則より、

$$\begin{aligned} r > a \text{ のとき, } 2\pi r \times B(r) &= \mu_0 I \quad \text{より,} \\ B(r) &= \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ r < a \text{ のとき, } 2\pi r \times B(r) &= 0 \quad \text{より,} \\ B(r) &= 0 \end{aligned}$$

2 導線を同一軸の周りに一様な巻き線密度で巻いた円筒状のコイルをソレノイド (solenoid) という。無限に長いソレノイドで、単位長さあたりの巻数を n とする。ソレノイドに電流 I が流れたときの磁束密度を求めておこう。



磁束密度は、ソレノイドの中も外も、対称性より軸に平行となる。ソレノイドの内部に軸に平行で軸方向の長さが l の長方形 $ABCD$ を考えると、



アンペールの法則 ($\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$) より

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_1 l + B_2(-l) = 0$$

磁石の磁気モーメントと円電流

まず理解を助けるため, 磁石に関するクーロンの法則

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m1}q_{m2}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (82)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad \text{真空の透磁率}$$

$$\mathbf{F} = q_m \mathbf{B}, \quad \text{磁束密度 (テスラ (N/Am))} \quad (83)$$

を仮定しよう (磁荷の単位は A·m ということになる)。 \mathbf{r}' を中心とする微小距離 \mathbf{d} だけ離れた2つの磁荷 $-q_m, q_m$ の磁気双極子を考える。磁気双極子のモーメントは $\mathbf{m} = q_m \mathbf{d}$ である。

このとき, 磁気双極子による磁位 ϕ_m は静電場と全く同様にして

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

である。簡単のため右辺で $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ を \mathbf{r} と置くと,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} \quad (84)$$

\mathbf{m} が \mathbf{r} にたいして定数の時,

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= (m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} \\ &= \frac{\mathbf{m}}{r^3} + m_x \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} + m_y \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r^3} + m_z \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r^3} \\ &= \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5} (m_x x + m_y y + m_z z) = -\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} \end{aligned}$$

従って,

$$\text{grad}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot} \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot} \mathbf{A}$$

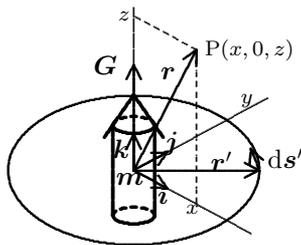
を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= -\mu_0 \nabla \phi_m = -\frac{\mu_0}{4\pi} \text{grad}(\mathbf{m} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3}) \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \text{rot} \text{grad} \frac{1}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} \end{aligned}$$

$x-y$ 平面上の輪電流を考える。輪電流がつくる磁場のベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}, \quad ds' = dx'\mathbf{i} + dy'\mathbf{j}$$

とおくと, $\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I ds'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$



遠方での振る舞いを調べるため, $r = \sqrt{x^2 + z^2} \gg |x'|, |y'|$ とすると,

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + (r')^2} \sim r(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I ds'}{r(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2})} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint (1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}) ds' \\ &= \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') ds' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint (xx' dx' \mathbf{i} + xx' dy' \mathbf{j}) \end{aligned}$$

$$\oint xx' dx' = 0, \quad \oint xx' dy' = xG, \quad G: \text{ループの面積}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} xG \mathbf{j} = \frac{\mu_0 IG \mathbf{k} \times x\mathbf{i}}{4\pi r^3} = \frac{\mu_0 IG \mathbf{k} \times \mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

輪電流が作る磁場は磁気モーメントを $\mathbf{m} = IG \mathbf{k}$ とおくと,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

となる。 z 軸の周りの回転について対称, 軸がどこを向いていても同じはずだから, これは一般の輪電流がつくる磁気モーメントについても成り立つ。輪電流の位置を \mathbf{r}' にしたときの位置 \mathbf{r} のベクトルポテンシャルは,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (85)$$

となる。したがって, 輪電流が作る磁場は,

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} \quad (86)$$

となる。輪電流が作る遠方での磁場 (86) は単位磁気双極子の磁場 (84) と全く同じとなる。

これが正しいことは, $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r})$ を計算してみればよい。

$$\text{公式 } \text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div} \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div} \mathbf{A}$$

を用いて,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \text{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \mathbf{m} \nabla^2 \frac{1}{r} \right\} \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} - \mathbf{m}(-4\pi\delta(\mathbf{r})) \right\} \end{aligned}$$

$r \neq 0$ の条件で, 右辺第2項は0となる。

水素の原子模型による磁気双極子モーメント

電子と陽子の間にはクーロン力のみが作用する, 電子の質量は陽子の約 $1/2000$ の質量。中心力だから角運動量は保存, 平面運動となり, 電子が陽子の周りに速さ v , 半径 r の円運動をしているとする。電子の質量を m_e , 電気素量を e とすると,

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad m_e = 9.1093897 \times 10^{-31} \text{ kg}$$

$$e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{ C} \quad \frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \times 10^9 \text{ Nm}^2/\text{C}^2$$

となるが, この条件を満たせばどんな軌道をとっても良い, とはなっていない。離散的な状態しか存在しないことがわかっている。その中で, 一番エネルギーレベルが低い状態を基底状態といい, そのときの半径をボーア半径という。

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0.528 \times 10^{-10} \text{ m}$$

である。 h はプランクの定数, $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{ Js}$ である。したがって, 基底状態の時の速度は

$$v = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2.3 \times 10^6 \text{ m/s}$$

軌道の電流は, $I = \frac{ev}{2\pi r}$ である。したがって, この円運動による磁気双極子モーメントを \mathbf{m} とすると,

$$\begin{aligned} |\mathbf{m}| &= IG = \frac{ev}{2\pi r} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} evr = \frac{eh}{4\pi m_e} \\ &= 9.27 \times 10^{-24} \text{ N}\cdot\text{m/T} \quad (\text{A}\cdot\text{m}^2) \end{aligned}$$

となる。これはボーア磁子と呼ばれている。電子の角運動量を \mathbf{L} とすると, $\mathbf{L} = m_e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ であるから,

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}$$

磁性体

輪電流を単位磁気双極子と同一視し, 磁性体を単位磁気双極子の集合体とみなす。誘電体の分極では, 表面に電荷が現れたが, 磁性体の表面には電流が現れ, (84) と整合性があるように磁場を作る。磁石に関するクーロンの法則 (82) はここではあくまでも磁場 (84) を作る仮想的なものである。

単位体積当たりの磁気モーメント \mathbf{M} を磁化という。 $\mathbf{M} = \sum \mathbf{m}_i$, ここで, $\mathbf{m}_i = I_i \mathbf{G}_i$: 単位体積に含まれる単位双極子の磁気モーメント。(85) を磁化の分布に適用すると

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \end{aligned} \quad (87)$$

となり, 公式 $\text{rot}(\phi \mathbf{A}) = \nabla \times (\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \text{rot} \mathbf{A}$ したがって, $\mathbf{A} \times \nabla \phi = \phi \text{rot} \mathbf{A} - \text{rot}(\phi \mathbf{A})$ を適用して,

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \left[\frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \right] dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \int \frac{-\mathbf{n}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right] \end{aligned} \quad (88)$$

となる。ここで右辺第2項には Gauss の定理の別の表現

$$\int_V \text{rot} \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \quad (\text{電磁気学メモを参照せよ})$$

を用いた。右辺第1項は磁束密度のベクトルポテンシャルと電流の関係 (80) を考慮すると, 磁化電流と磁化の関係が $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ であることがわかる。また右辺第2項は十分広い領域での積分は0となり, また積分を磁化した物体の範囲にとると, 境界面での面電流が $-\mathbf{n} \times \mathbf{M}$ であることを示している。

これまで, 磁場を支配する方程式は

$$\text{div} \mathbf{B} = 0, \quad \text{積分形では } \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{真磁荷が存在しない})$$

$$\text{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{積分形では } \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{アンペールの法則})$$

であった。磁性体の中でも真磁荷は存在せず $\text{div} \mathbf{B} = 0$ は成り立つ。

一方, 磁化を源とする磁場もあるから, アンペールの法則に磁化電流を考慮すると

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \left(\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma} (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} dS \right)$$

$$= \mu_0 \left(\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \oint_{\Gamma} \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s} \right)$$

したがって

$$\oint_{\Gamma} \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

磁界の強さ \mathbf{H} を

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H} + \mu_0 \mathbf{M} \quad (89)$$

で定義すると、磁界の強さに関するアンペールの法則となる。

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n I_k, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{j} : \text{電流密度} \quad (90)$$

$$(\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j})$$

輪電流の実体は、原子中の電子のスピンや電子の軌道運動、核スピンなど色々あり得るが、輪電流が同じ方向を向いて、大きな磁気モーメントを持つ物質を強磁性体という。鉄、コバルト、ニッケル、ガドリニウムなどである。強磁性体では、外部から磁場を与えると、磁化の状態が変化し、その経過によって、磁化の量に影響が残る。これをヒステリシスという。強磁性体以外の磁性体では磁化は磁界の強さに比例する。

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m) \quad \chi_m : \text{磁化率} \quad (91)$$

$$\chi_m > 0 : \text{常磁性体}, \quad \chi_m < 0 : \text{反磁性体}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} : \text{比透磁率}$$

磁化率はいろいろな表現 (実用面から理由はあ) があって、統一されていない。

いくつかの物質の磁化率 ($\chi_m : \times 10^{-6}$, 20 °C)

(常磁性体)	χ_m	(反磁性体)	χ_m	(強磁性体)	χ_m
空気	0.36	水素	-0.002	コバルト	2.7×10^4
酸素	1.8	水	-9.05	鉄	5×10^5
アルミニウム	20.8	銅	-9.7	パーマロイ	$\sim 1 \times 10^8$

パーマロイは鉄、ニッケルの合金で透磁率を非常に大きくしたものだ。テキストを参照

しよう : p269 磁束線と磁力線の違いを観察する。「メモ」には、計算法も示してある。

磁束線は連続である。考えてみよう。

磁束管の一部を図に描いてみる。

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \text{ は、言い換えたなら、} \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

磁束管の両端の断面を Σ_1, Σ_2 とする。 $\int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ 。これは、 Σ_1 を入る (出る) 磁束線の数と Σ_2 面を出る (入る) 磁束線の数が等しいことを表している。どこで、どんな磁束管を考えても、この関係は成り立つから、磁束線は連続である。

磁性体の境界条件は誘電体と同様に取り扱うことができる。場の方程式は (78), (90) から

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

である。電束密度、電界について行ったと同様の考察により磁性体 1 と 2 の境界で法線成分について

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (\mathbf{B}_{1\perp} = \mathbf{B}_{2\perp})$$

接線成分について表面実電流がないとすると

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} \quad (\mathbf{H}_{1//} = \mathbf{H}_{2//})$$

がなりたつ。

ここで、仮想的に導入した磁石に関するクーロンの法則を確認しておこう。

永久磁石では実電流 \mathbf{j} がなくても磁化 \mathbf{M} が存在する。したがって (90) より

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad (92)$$

また $\text{div } \mathbf{B} = \mu_0 (\text{div } \mathbf{H} + \text{div } \mathbf{M}) = 0$ より

$$\text{div } \mathbf{H} = -\text{div } \mathbf{M} = \rho_m \quad (93)$$

ここで磁化密度 ρ_m は磁気の湧き出し密度を表し、静電場における電荷密度の役割を果たす。 $\text{rot } \mathbf{H} = 0$ より、永久磁石による磁界の強さ \mathbf{H} は磁気スカラーポテンシャル、すなわち $\mathbf{H} = -\nabla \phi_m$ となる ϕ_m を持つ。 $\nabla^2 \phi_m = -\rho_m$ の無限の遠方で 0 となる解は

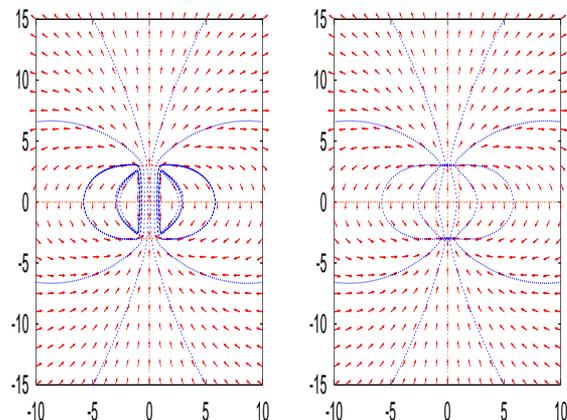
$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (94)$$

これより、

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \text{grad } \phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

これは磁石に関するクーロンの法則 (82) そのものである。磁石に関するクーロンの法則から、電磁気学を展開しても矛盾は起こらない。ただし、必要な仮定が多くなり、理論の統一性がわかりにくくなる。

下図は、一様に磁化した円柱の磁束線、磁力線を図示したものである。詳細は「電磁気学メモ」を参照して下さい。その際、pdf ファイルによる図を何倍にも拡大して見て下さい。(ベクターグラフィックスの意義を考えておこう)



簡単な実験

(小学あるいは中学生レベルの) 簡単な実験をして、学習と現実とがそれほど乖離しているのではないことを確認しておこう。

全て、定性的な実験である。

3 人一組で以下の実験を行う。

実験① 直線電流の周りの磁界

実験② U字型磁石の周りの磁界の方向

実験③ 電磁ブランコによるフレミング左手の法則の確認

実験に必要なもの

方位磁針 1 個, U字型磁石 1 個,
1m 程度のコード 1 本, 1.5V 乾電池 1 個

1 講義と平行して、各組で実験を行い、出席カードの裏に、共同実験者、確認したことを書いて報告。

2 これらが、電磁気学でどう説明されていたかを整理しておこう。

さらに、我々は、静磁場の議論を「電流の相互作用」のみに依拠して理論を組み立ててきた。上の実験で、決定的に不充分なところは何なのか、も考えておこう。電流の磁気作用を最初に発見したのはエルステッドだといわれています。アンペールは「電流の相互作用」を直接的・定量的に調べる詳細な実験を行いました。どんな実験を行ったか、少しぐらいは知らねばなりません (私は詳しくは知りません)。調べておこう。これが、本日の宿題です。

物理II(11 由良) 第1 1 講 電磁誘導

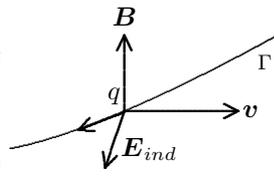
ファラデーの電磁誘導の法則

電流は磁場を生じ(ビオ・サバールの法則), 逆にまた電流は磁場から力(アンペールの力)を受けた。それでは, 電流を引き起こす電界は, 電荷を源とする静電場だけなのだろうか。「磁界の変化は誘導電界を引き起こす」がこの疑問に対する解答であり, これを電磁誘導(electromagnetic induction)といい, 電磁誘導によって回路に流れる電流を誘導電流, 電磁誘導による電圧を誘導起電力という。

はじめに, 特殊な例で電磁誘導を調べておこう。

磁場の中を電荷 q が速度 v で運動するとローレンツ力(76) $F = q(E + v \times B)$ が働いた。いま, 静電場を $E = 0$ とし, 導線が磁場 B の中を速度 v で運動したとする。導体内の電荷 q の荷電粒子は, $qv \times B$ の力を受ける。

導体に固定した座標系から見ると, 静止した荷電粒子は磁場から力を受けないから, 荷電粒子は, 相対運動によって発生した電場

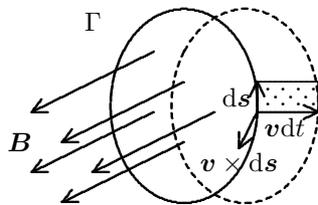
$$E_{ind} = v \times B \quad (95)$$


から作用を受けたと考えられる。導線を閉回路 Γ として, この電場による回路での起電力(electromotive force)は

$$\phi_{emf} = \oint_{\Gamma} E_{ind} \cdot ds = \oint_{\Gamma} v \times B \cdot ds \quad (96)$$

となる。(静電場 E と静電ポテンシャル ϕ との関係 $d\phi = -E \cdot dr$ と符号が逆であることに注意)

閉回路 Γ に囲まれた磁束 Φ_M の変化を見よう。回路の要素 ds が速度 v で動くとき, ds が通った面積を貫く磁束の量は dt 時間の間には $B \cdot (v \times ds)dt$ となる。回路を貫く磁束の時間的変化はこれを回路の一周にわたって積分したものである。



$$\frac{d\Phi_M}{dt} = \oint_{\Gamma} B \cdot (v \times ds) = - \oint_{\Gamma} (v \times B) \cdot ds = - \oint_{\Gamma} E_{ind} \cdot ds$$

したがって

$$\phi_{emf} = - \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (97)$$

となる。すなわち

「閉回路での起電力は閉回路を貫く磁束が減少する速さに等しい」と言える。磁束の変化の原因をこのように閉回路の運動によるとして(97)を導いたが, 荷電粒子に力を作用させる電界を引き起こす原因としての磁束の変化の原因は何であってともかまわないだろう, と予測される。すなわち [ファラデーの電磁誘導の法則]

閉回路 Γ を貫く磁束を $\Phi_M(t)$ とすると, 誘導起電力 ϕ_{emf} は

$$\phi_{emf} = - \frac{d\Phi_M(t)}{dt} \quad (98)$$

$$\phi_{emf} = \oint_{\Gamma} E_{ind}(r, t) \cdot ds, \quad E_{ind} : \text{誘導電界}$$

である。誘導電界(誘導電流)の方向は磁束 $\Phi_M(t)$ の変化を妨げる方向に生ずる(レンツの法則(Lenz's law))。

(98)は極めて簡潔で, 特に法則を $\phi_{emf} = -C \frac{d\Phi_M(t)}{dt}$ で表す, としたときの係数($C=1$)はすっきりしているが, これは, (95)あるいは(97)から予想したように電磁気学を体系的に整理するために工夫された単位系の恩恵でもあり, 次のような簡単なエネルギー保存の考察からも納得できる。

電流 I が流れる回路には抵抗 R と起電力 E が作用しているとする, $E = RI$ が成り立つ。単位時間に電源がする仕事は $P = EI = RI^2$ でジュール熱になる。ここに磁石による磁場があったとすると $W = -I\Phi$ (磁気エネルギーのところで学習する)ポテンシャルエネルギーが発生する。磁石を動かすには単位時間当たり $P = -I \frac{d\Phi}{dt}$ の仕事を要する。このときのエネルギーの釣り合いは $RI^2 = EI - I \frac{d\Phi}{dt}$ となる。すなわち

$$RI = E - \frac{d\Phi}{dt}$$

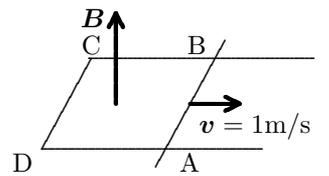
(演習問題解答付き 教師用)

である。これは電流を流す総起電力は電源の起電力 E と磁束変化にもとづく電磁誘導の起電力 $-\frac{d\Phi}{dt}$ の和であることを示す。これは法則(98)の係数が $C = 1$ であることを確認している。

ファラデーの電磁誘導の法則は, 磁石を動かしたり, 電流を変化させて磁場を変化させたとき, 静止した回路の起電力や, 回路を変形させて磁束を変化させるときの起電力を求めるのに適した形をしている。例で確認しておこう。

ファラデーの電磁誘導の法則の例

1 磁束密度 $|B| = 0.1\text{T}$ の一様な磁場の中にニクロム線で作られた図のような装置がある。ABは速さ $|v| = 1\text{m/s}$ で移動している。四角形 ABCD は $AB=1\text{m}$ の長方形で, B はこれに垂直である。



(1) ABの両端に生ずる起電力を求めよ。

$BC=x = x_0 + vt$, $AB=a$ とすると磁束 Φ_M は $\Phi_M = axB$ したがって起電力は

$$\phi = - \frac{d\Phi_M}{dt} = aB \frac{dx}{dt} = 1\text{m} \times 0.1\text{T} \times 1\text{m/s} = 0.1\text{V}$$

(2) $BC=1\text{m}$ の時を $t=0$ として, 1秒後に回路に流れる電流を求めよ。

ただし, ニクロム線の直径は 1mm ,

抵抗率は $\rho = 1.09 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ とする。

時刻 t ではニクロム線の長さは $2a + 2x$, 回路の抵抗は

$$R = \rho \times (2a + 2x) / (\pi r^2)$$

$$= 1.09 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m} \times (2 \times 1 + 2(1+1))\text{m} / (\pi \times (0.0005)^2 \text{m}^2) = 8.33 \Omega$$

$$I = \phi / R = 0.1\text{V} / 8.33 \Omega = 0.012\text{A}$$

(3) 10秒後までに回路に発生する熱量を求めよ。

$$Q = \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t \frac{\phi^2}{R} dt = \phi^2 \int_0^t \frac{\pi r^2 dt}{\rho(2a + 2x_0 + 2vt)}$$

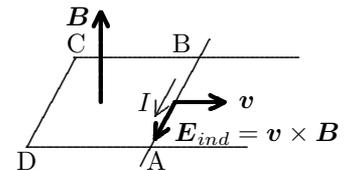
$$= \phi^2 \cdot \frac{\pi r^2}{\rho} \cdot \frac{1}{2v} \log \frac{t + \frac{a+x_0}{v}}{\frac{a+x_0}{v}}$$

$$= (0.1)^2 \frac{\pi \times (0.0005)^2}{1.09 \times 10^{-6}} \frac{1}{2 \times 1} \log \frac{10+2}{2} = 0.0065\text{J}$$

この例は, ファラデーの電磁誘導の法則の適用だと言われているが, 先に述べたとおり, 電荷の運動によるローレンツ力によって説明できる例である。

導線 AB の部分では, 電界 $E_{ind} = v \times B$

が発生し, ABで, 起電力 $aBv = 0.1\text{V}$ を引き起こす。電流 I は, BからAに流れる。その電流に対するアンペールの力($dF = Ids \times B$)は v と反対の向きに作用し, 運動を阻止する方向に作用している。



最もよく取り上げられる交流発電機もその例である。

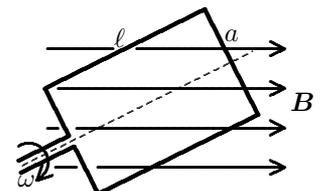
一様な磁場 B に垂直な軸の周りに, 直径 $2a$, 長さ l の長方形が角速度 ω で回転しているとする。

長方形を通過する磁束は

$$\Phi(t) = 2alB \sin \omega t$$

となる。従って,

$$\phi = - \frac{d\Phi(t)}{dt} = -2al\omega B \cos \omega t$$



ファラデーの電磁誘導の法則はこれらを包含した法則になっている。いずれも導線の移動にもなって, 荷電粒子が移動する, という形を取っているが, 電磁誘導には移動する導線は不要である。

2 水平面に面積 1m^2 の輪型の導線が置いてある。鉛直上方に向いた一様な磁界を毎秒磁束密度 $|B| = 0.01\text{T}$ の割合で強めていった。導線での起電力は何Vか。

ファラデーの電磁誘導の法則より, 誘導起電力 ϕ は

$$\phi = - \frac{d\Phi_M(t)}{dt}$$

である。 $\Phi_M(t) = \int_S B(t) \cdot ndS$ より

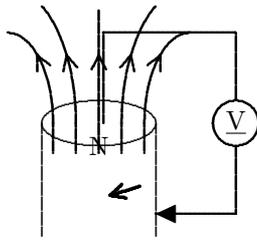
$$\phi = - \frac{d\Phi_M(t)}{dt} = - \frac{d}{dt} \int_S B(t) \cdot ndS = - \int_S \frac{dB(t)}{dt} \cdot ndS = -0.01\text{T/s} \cdot \text{m}^2 = -0.01\text{V}$$

となる。

この例では, 導線の運動はなく, 磁力線を切るということはどこにも起こらないで, 輪の中の磁力線の数が増加する従って, ローレンツ力では説明

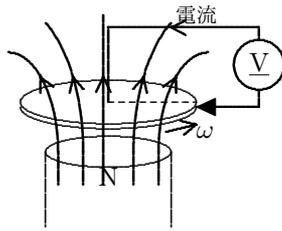
できないことである。しかし、磁場が強くなるということを利用して平行な磁力線を領域に引き寄せると解釈すれば、たまたまそこにあった導線が磁力線を切っていることになり、この割合は $\frac{d\Phi_M(t)}{dt}$ であったと言える。その導線に荷電粒子があったとして、磁力線に固定した座標系から見ると、荷電粒子は運動しており、ローレンツ力による解釈が可能ならばである。しかし、次の単極誘導では、適用法を慎重にしなければならない。

3 回転する円柱状の棒磁石のN極と棒磁石の側面を結んだ回路をつくる。棒磁石は閉回路の一部を形成し、導線は棒磁石の側面での接点で摺動する。導線は磁石の回転ともなって、磁力線を切ってそれぞれの部分で起電力を生ずる。各部分では $\mathbf{E}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{B}$ に対応した起電力が発生し、回路全体の起電力となる。実験結果はこの解釈の正当性を示している。



しかし、磁石が回転しても磁場は変化せず、 $\frac{d\Phi_M}{dt} = 0$ となる。したがって、公式 (98) をそのまま適用するのは間違った結果を導く。これは、導線と磁石の接触部分が整流子の役割をして、常に回路が変わっているからだ、と解釈されている。このままでは、考えにくいので、次のような単極誘導発電器を考える。半径 a の棒状の永久磁石のN極の上に少し離れて金属の回転円板を取り付け、その円盤の中心と円周を接触させる接点を結んだ閉回路をつくる。

中心軸の周りに円盤を角速度 ω で回転すると、図の点線上では中心から r 離れたところでは $v = r\omega$ の速度で点電荷が運動し、 $\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の起電力が生じる。回路全体では、円盤上以外では回路は運動していないので起電力は生じず、結局、電流の方向は図に示したように左回りである。



一方、回転板を固定し、磁石を逆向きに回転すれば、同じことが発生するか、同値の実験が行われ、これには全く電流が流れないことがわかっている。これは、磁石から出る磁力線が磁石に固定したのではなく、ソレノイドで発生する磁力線のように考えるとうまく説明できる。すなわち、磁場はその空間自身を特徴づける物理的な存在であって、磁石に結びついているものではない。多くの混乱は、磁力線を磁石に固定した実体として解釈することから起こっている。電磁気学を作り上げる段階では、こうしたパズルのような問題も、「近接作用」の考え方の確立のためには、一つひとつクリアして進めなければならない。

電磁誘導の法則は他の法則と深く結びついているが、他とは独立した法則であり、他から導くことはできず、電磁誘導の法則独自の法則を含んでいる。その意味で、「飛躍」があることを認識しておかねばならない。しかし、重要なことは、電磁誘導の法則なしには「相対性の原理」を電磁気学に持ち込むことはできない、という事実である。

「全ての自然法則は、我々の物理的常識から考えて同等とみなされるあらゆる観測者(座標系)にたいして、同じ形でいいあらわされねばならない」(同等とは、ここでは「ガリレイ変換」によって結ばれた「慣性系」のことである。)

電磁誘導がある場合の電場

電磁誘導を考慮すると、電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ は、これまで考えた静電界を $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ に、誘導電界を加えなければならない。したがって、例えばオームの法則 (64) は

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \quad (99)$$

となる。ここで、静電場 $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ は、電荷による電場という意味で、電荷の移動による時間依存性があるが、表記の都合により t を省略している。(98),

$$\begin{aligned} (99) \text{ および静電場の性質 } \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} &= 0 \text{ より} \\ \oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} &= \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} \\ &= -\frac{d\Phi_M(t)}{dt} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

$\text{div} \mathbf{B} = 0$ だから、閉曲線 Γ によって囲まれた2つの曲面 Σ_1, Σ_2 にはさまれた空間を V とすると、

$$\int_V \text{div} \mathbf{B} dv = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\mathbf{n} \text{ は領域 } V \text{ から面 } \Sigma \text{ に対して外向きの法線ベクトル})$$

である。面の法線ベクトル \mathbf{n} を、向きをもった閉曲線 Γ の右ねじの方向の面の法線ベクトルと再定義すると、 Σ_1, Σ_2 における法線ベクトルはどちらかが $-\mathbf{n}$ となる。従って、 $\int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$ 。すなわち、閉曲線 Γ によって囲まれた曲面は任意にとれる。よって、上式の右辺の積分は、導体による閉回路 Γ が確定する限り、閉回路 Γ によって囲まれたどの曲面 Σ に対しても同じとなる。ファラデーの電磁誘導の法則 $\phi_{emf} = -\frac{d\Phi_M(t)}{dt}$ の実験的根拠は導体による閉回路 Γ の存在を前提としている。ファラデーは、電磁誘導の法則をこの具体的な閉回路の存在から解放したと言われている。閉回路がなくても、磁場の変化によって、誘導電界が発生し、もしそこに回路 Γ があれば、それによって、誘導起電力が起こると考えたのである。上の両辺からストークスの定理を適用して、

$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS &= -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \\ \text{を導き、任意の閉回路 } \Gamma, \text{ 従って、任意の } \Sigma \text{ について、上の積分が等しいことから電磁誘導の微分形を求める、という手続きは、近接作用説という物理的観念の飛躍の契機を内包している。} \end{aligned}$$

したがってファラデーの電磁誘導の法則は

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (100)$$

$$\text{微分形では} \quad \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (101)$$

とも表せる。また、 \mathbf{B} をベクトルポテンシャルで表せば(真磁荷が存在しない $\rightarrow \text{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$)

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} &= -\int_{\Sigma} \frac{\partial(\text{rot} \mathbf{A})}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} (\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s} \end{aligned}$$

すなわち、 $\mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ だから、回路の誘導起電力は各局所的な起電力の和となる。したがって、一般に静電場と電磁誘導を考慮した電界 \mathbf{E} は (99) に対応して

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (102)$$

となる。

Maxwell 方程式の立場から見ると、 $\text{div} \mathbf{B} = 0$ より $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ となるベクトルポテンシャル \mathbf{A} が存在し、これを (101) に代入して $\text{rot} (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ となるから (102) を満たす ϕ が存在する、となる。

演習

無限に長い直線状導線を流れる交流

$$I(t) = I_0 \cos \omega t$$

によって生ずる電磁誘導電場を求めよ。(準静的取り扱い)

誘導電場はベクトルポテンシャル \mathbf{A} より

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$$

で求まる。

z 軸方向の長さ $2l$ の直線電流から a 離れた点でのベクトルポテンシャルは

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \left\{ \frac{l}{a} (1 + \sqrt{1 + (a/l)^2}) \right\}$$

であった。変形すると

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \left\{ \log \frac{1 + \sqrt{1 + (a/l)^2}}{2a} + \log 2l \right\}$$

となり、最後の項は位置に無関係となり、ベクトルポテンシャルから省いて、 $l \rightarrow \infty$ とすると

$$A_z = \frac{\mu_0 I}{2\pi} \log \frac{1}{a}$$

となる。誘導電場は

$$E_z = -\frac{\partial A_z}{\partial t} = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi} \omega \sin \omega t \log \frac{1}{a}$$

別紙での演習

金属棒の運動 … 電磁誘導とアンペールの力

物理II(11 由良) 第12講 磁気エネルギー

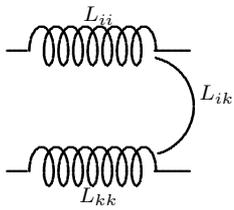
(演習問題解答付き 教師用)

回路系がいくつかの部分回路から構成されているとして、回路 k による磁束密度 \mathbf{B}_k の磁束線が回路 i を貫く磁束 Φ_{ik} は、 \mathbf{B}_k に対するベクトルポテンシャル (81) を \mathbf{A}_k とすると、 $\mathbf{B}_k = \text{rot } \mathbf{A}_k$ だから、

$$\Phi_{ik} = \int_{\Sigma_i} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma_i} \text{rot } \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{s} \quad (103)$$

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_k} \frac{I_k d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (104)$$

となる。これらを重ね合わせると、回路 i が作る磁束も含めて、回路 i を貫く全ての磁束は次のようになる。



$$\Phi_i = \sum_k \Phi_{ik} = \sum_k L_{ik} I_k \quad (105)$$

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_i} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \quad (106)$$

(ノイマンの公式)

となる。 L_{ik} を、 $i = k$ のとき自己インダクタンス、 $i \neq k$ のとき相互インダクタンスという。

自己誘導の例

最も簡単な例で考える。

巻き数 N 、半径 a の円形回路の抵抗は R 、自己誘導係数を L とする。これが一様な磁場 \mathbf{B} の中で、磁場に直角な直径を軸として角速度 ω で回転しているとする。

電流を $I(t)$ とすると回路を貫く磁束 $\Phi_M(t)$ は、

自己誘導による $LI(t)$ と一様な磁場による磁束の和

であるから、

$$\Phi_M(t) = LI(t) + N\pi a^2 \mu_0 H \cos \omega t$$

となる。キルヒホッフの法則より、

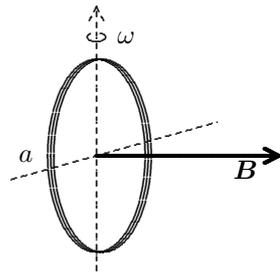
$$- \frac{d\Phi_M(t)}{dt} - RI(t) = 0$$

したがって、電流を決定する方程式は

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = N\mu_0 \pi a^2 H \omega \sin \omega t$$

となる。

$$\text{定常解は } I(t) = \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega N H}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi), \quad \phi = \frac{\omega L}{R} \text{ である。}$$



磁気エネルギー

$-q_m(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2) + q_m(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)$ の磁気双極子の磁束密度 \mathbf{B} での位置エネルギーは

$$\begin{aligned} & - \int_{-\infty}^{\mathbf{r}-\mathbf{d}/2} \mathbf{B}(\mathbf{r}') (-q_m) d\mathbf{r}' - \int_{\infty}^{\mathbf{r}+\mathbf{d}/2} \mathbf{B}(\mathbf{r}') (+q_m) d\mathbf{r}' \\ & = -q_m \int_{\mathbf{r}-\mathbf{d}/2}^{\mathbf{r}+\mathbf{d}/2} \mathbf{B}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -q_m \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{d} = -\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{m} \end{aligned}$$

だから、輪電流 I が作る磁束密度 \mathbf{B} での磁化 \mathbf{M} の位置エネルギーは

$$\begin{aligned} W & = - \int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) dv \\ & = - \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) dv \\ & = -I \oint \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} dv \right\} \cdot d\mathbf{s}' \end{aligned}$$

したがって、磁気双極子のベクトルポテンシャル (87) を用いると

$$W = -I \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (107)$$

となる。磁場の中を電流が流れているときのポテンシャルエネルギーは、磁場を発生する原因によらず同じだと考えられるから、磁場を一般化して考えると、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の中で電流のポテンシャルエネルギーは (107) であると言える。したがって閉回路を流れる電流 I_1 が作る磁場の中を閉回路を流れる電流 I_2 のポテンシャルエネルギーは (81) より

$$W_{12} = -I_2 \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I_1 d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \cdot d\mathbf{s}_2$$

となる。 n 個の電流回路がある場合

$$W = - \sum_{(i,k)} \frac{\mu_0}{4\pi} I_i I_k \oint \oint \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \quad (108)$$

となる。したがって

$$W = \sum_{(i,k)} W_{ik} = - \sum_{(i,k)} L_{ik} I_i I_k = - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} L_{ik} I_i I_k \quad (109)$$

$$W_i = -I_i \Phi_i, \quad \Phi_i = \sum_{k \neq i} \Phi_{ik} = \sum_{k \neq i} L_{ik} I_k \quad (110)$$

Φ_i は該当する回路以外の回路による回路を貫く磁束である。これらはいずれも、系の全エネルギーを表現したものではない。なぜなら、これは回路の電流を一定に保ちながら現在の配置に移動させるのに必要なエネルギーを表しているのであって、回路の電流を一定に保つためには電気的な仕事を外部から与えなければならないからである。

回路 i を移動させると、回路系のエネルギー変化 dU'_m はそれを動かすのに要する力学的な仕事 dW と、磁束の変化によるエネルギー変化 $I_i d\Phi_i$ の和である。

$$dU'_m = dW + \sum I_i d\Phi_i = - \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} dL_{ik} I_i I_k + \sum_i I_i \sum_{k \neq i} dL_{ik} I_k = -dW$$

したがって

$$U'_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} L_{ik} I_i I_k \quad (111)$$

となる。回路は他の回路から力を受けるだけでなく、自己の電流からも力 $d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ を受ける。したがって、(109) と同様にして

$$W = - \frac{1}{2} LI^2 \quad (112)$$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (113)$$

となる。 L は自己インダクタンスである。回路の自己エネルギーは回路の各部分について回路系と同様の考察をすると

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (114)$$

となる。よって自己エネルギーを含めた回路系の全体のエネルギーは

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k L_{ik} I_i I_k \quad (115)$$

となる。

U_m が確かに磁場のエネルギーであることを自己エネルギーを例に導いておこう。

$$\begin{aligned} U_m & = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint I d\mathbf{s} \cdot \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ & = \frac{1}{2} \oint I d\mathbf{s} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \oint I d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv \\ & = \frac{1}{2} \int \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{2} \int \{ \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \} dv = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \end{aligned}$$

公式 $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ を適用、

またガウスの定理を用いて $\int \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv = 0$

すなわち、静磁場のエネルギーは

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad (116)$$

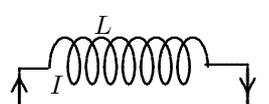
$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad w_m: \text{静磁場のエネルギー密度} \quad (117)$$

と表される。これは、電場のエネルギー (35) の導出に対応している。一般的には、Maxwell 方程式を用いて、後で証明する。

自己インダクタンスの計算には (106) のままでは困難を伴う場合がある。積分が $r = 0$ で発散するからである。計算には、導線に太さと、そこでの電流分布を考慮する必要がある。

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \oint \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' \quad (118)$$

導線を同一軸の周りに一様な巻き線密度で巻いた円筒状のコイルをソレノイド (solenoid) といった。



その磁束密度は第9講より

$$\mathbf{B} = \mu \mathbf{H} = \mu_0 n I \quad (119)$$

であった。単位長さ当たりの巻き数 n 、長さ l 、断面積 S (半径 a) のソレノイドに電流 I が流れているとすると、ソレノイドを貫く磁束 Φ は

$$\Phi = n l B S = \mu_0 n^2 l S I \quad (120)$$

となるから ($l \gg a$)、自己インダクタンスは

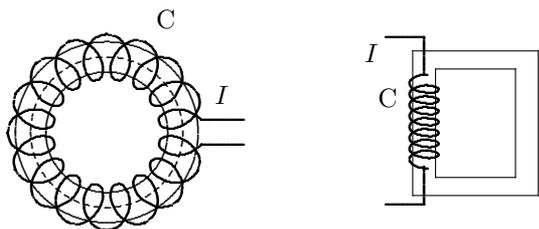
$$L = \mu_0 n^2 l S \quad (121)$$

となる。これは簡単にエネルギーの2つの表現

$$\frac{1}{2} L I^2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv = \frac{1}{2} \int n I \cdot \mu_0 n I dv = \frac{1}{2} \mu_0 (n I)^2 l S = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 l S I^2$$

より求めることもできる。

図のような環状鉄心をもったソレノイドを考える。環状鉄心の中心線の長さを l 、コイル C の巻き数 N 、電流 I とする。コイル C の磁束線は鉄心によって一切外部に漏れないとする (これにはいくつかの議論が必要である)。



このとき直線状のソレノイドの単位長さ当たりの巻き数 n を N/l で置き換えることができる。したがってコイルを貫く磁束は

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} I \quad (122)$$

となり、自己インダクタンスは

$$L = \frac{\mu N^2 S}{l} \quad (123)$$

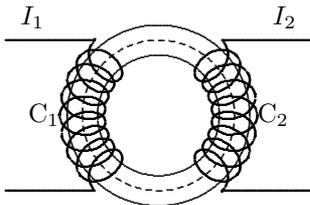
となる。

中心線の長さが l の1つの環状鉄心に、巻き数 N_1 のコイル C_1 (1次側) に電流 I_1 が流れ、巻き数 N_2 のコイル C_2 (2次側) に電流 I_2 が流れているとする。コイル C_1 がつくる磁束がコイル C_2 を貫く磁束は

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} I_1 \times \frac{N_2}{N_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} I_1 \quad (124)$$

となり、相互インダクタンスは $L_{12} = L_{21}$ は

$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} \quad (125)$$



となる。鉄心内に生じる磁束を Φ とし、鉄心の外部に一切漏れないとして、電磁誘導の法則を適用する。

各コイルを貫く磁束は、 $\Phi_1 = N_1 \Phi$ 、 $\Phi_2 = N_2 \Phi$ である。1次側ではコイル C_1 の抵抗を無視すると、 $V_1 - N_1 \frac{d\Phi}{dt} = 0$ 、2次側での誘導起電力 V_2 は $V_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$ となる。したがって、1次側と2次側の電圧の比は

$$\frac{|V_2|}{|V_1|} = \frac{N_2}{N_1} \quad (126)$$

となる。以下、少しだけ、準静的取り扱いで電流回路を調べる (準静的、という意味は次回説明)。

準静的取り扱いの基礎方程式

- 1 電界に関するガウスの法則: $\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t)$
- 2 磁場に関するガウスの法則: $\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0$
- 3 アンペールの法則: $\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$
- 4 ファラデーの電磁誘導の法則: $\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$

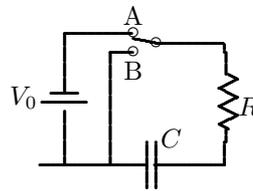
以下のテキストには、準静的取り扱いの基礎方程式から、電流回路の準静的取り扱いをわかりやすく説明してあります。

物理学テキストシリーズ「電磁気学」 砂川重信著 岩波書店
電流は磁場をつくり、電流の変化は電磁誘導を引き起こすが、電流の変化が余り速くないときは直線的な導線がつくる磁場は余り強くなく、電磁誘導も大きくない。これに対し、導線を何重にも巻いたコイル、特に「強磁性体の磁心」をもったコイルは電磁誘導の効果が大きくなる。こうしたコイルとコンデンサー、抵抗を持った回路を考える。導線における電磁誘導、抵抗を無視し、コイル、コンデンサー、抵抗を「回路素子」とし、これらの導線で連結されたものを

回路と考える。

C-R 回路、L-R 回路の基本的な振る舞いを理解するため、どこにでも掲載されている最も基本的な例題と演習問題を考える。例題においては、エネルギーがコンデンサーの電場のエネルギーとして蓄えられていたこと、演習ではエネルギーがコイルに磁場のエネルギーとして蓄えられていたことを理解する、よく工夫された問題である。

[例題] 図において、はじめ $t = 0$ で A 側にスイッチをつないで、コンデンサー C に充電を始める。抵抗 R は電池の内部抵抗を含むとして、コンデンサーに蓄えられる電気量 $Q(t)$ と電流 $I(t)$ をもとめよ。次に十分時間がたつてから、スイッチを B 側に倒したときのようすを調べよ。コンデンサーに蓄えられていたエネルギーはどうか。



電池から流れ出る電流を I 、コンデンサーの電気量を Q とすると

$$V_0 - IR - \frac{Q}{C} = 0 \quad \text{だから} \quad R \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{C}(Q - CV_0)$$

$$\log |Q - CV_0| = -\frac{t}{RC} + c, \quad t = 0 \text{ で } Q = 0 \text{ より}$$

$$Q = CV_0(1 - e^{-t/RC}), \quad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}, \quad \text{十分時間がたつと, } Q = CV_0$$

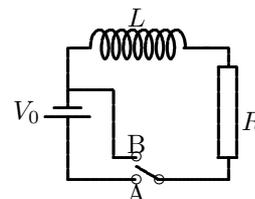
スイッチを B に倒すと

$$IR = \frac{Q}{C}, \quad R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C} \quad \log Q = -\frac{t}{RC} + c, \quad t = 0 \text{ で } Q = CV_0 \text{ より,}$$

$$Q = CV_0 e^{-t/RC}, \quad I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

$$\text{Joule 熱} = \int_0^\infty R I^2 dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{C}{2} V_0^2$$

[演習] 図において、はじめ $t = 0$ で A 側にスイッチをつないで、抵抗 R は内部抵抗を含むとして、電流 $I(t)$ を求めよ。次に十分時間がたつてから、スイッチを B 側に倒したときの様子を調べよ。またそのとき抵抗で発生する熱エネルギーを求めよ。



電池から流れ出る電流を I とすると

$$V_0 - IR - L \frac{dI}{dt} = 0, \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}(I - \frac{V_0}{R})$$

$$\text{解くと} \quad \log |I - \frac{V_0}{R}| = -\frac{R}{L}t + c, \quad I - \frac{V_0}{R} = e^c \cdot e^{-Rt/L}$$

$$t = 0 \text{ で } I = 0 \text{ より } e^c = \frac{V_0}{R} \quad \text{よって,} \quad I(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

$$\text{十分時間がたつと, } I = \frac{V_0}{R}$$

スイッチを B に倒す ($t = 0$) と $-L \frac{dI}{dt} = IR$ が成り立つ。

$$\log I(t) = -\frac{R}{L}t + c, \quad I(t) = e^c \cdot e^{-Rt/L}$$

$$t = 0 \text{ で } I = \frac{V_0}{R} \text{ より } e^c = \frac{V_0}{R} \quad \text{よって,} \quad I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-Rt/L}$$

$$\text{Joule 熱} = \int_0^\infty R I^2 dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = \frac{V_0^2}{R} \cdot \frac{L}{-2R} [e^{-2Rt/L}]_0^\infty = \frac{1}{2} L \left(\frac{V_0}{R}\right)^2$$

これは、電流 I の自己インダクタンス L によるエネルギー $\frac{1}{2} L I^2$ と一致する。

一つの回路にコイル、抵抗、コンデンサー、起電力 $E_e(t) = E_0 \cos \omega_0 t$ の電源が一つだけの回路を考える。

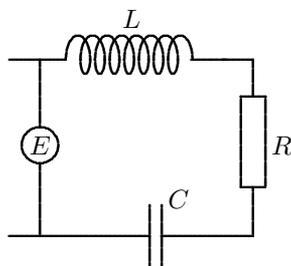
$$E_e(t) - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{Q}{C} = 0 \quad (127)$$

$Q = \int^t I dt$ だから

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{\int^t I dt}{C} = E_e(t)$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -E_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \quad (128)$$

その他、2階の微分方程式が関与する電流回路の学習は、どこにでも掲載されているから、必要に応じて学習しておいて欲しい。また、工学的に重要な交流回路については、必要に応じて、きっちり学習してほしい。



今日の宿題

テキスト「物理学」小出昭一郎著 P.289~p.297 の交流、電気振動を自習すること

これまでの取り扱いを「準静的」という。次回以降は、磁界に関するアンペールの法則に変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を考慮に入れる。準静的取り扱いとはこの変位電流を考慮しない取り扱いである。しかし、これは電磁気学の体系としては大きな問題点を持っている(論理的矛盾ではない)。簡単のために、真空を考えると、基本方程式は

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j}, & \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

となるが、これより、 $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$ を用いると、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ となる。これは電荷の保存則(連続の式) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ と相容れない。電荷の保存則は物理学の最も基本的な原理である。なぜこんなことになってしまったのか。静電場、静磁場の取り扱いから、ファラデーの電磁誘導の法則を経て非定常状態を初めて取り扱うようになった。非定常状態に移行するとき、電磁誘導の法則だけでなく、他の法則、アンペールの法則も非定常に対応するような修正が予想される。準静的扱いはこれを放置したままの取り扱いであり、適用が限定されるのは当然のことである。

既に、エネルギー、電流の保存則の考えから、電束電流を電流の一種と見なす方が合理的であることを見てきた。

平行板コンデンサーに非定常電圧をかけ、電流 $I(t)$ が回路に流れていたとする。導線にはアンペールの法則に従う磁界が発生する。導線を一周する閉曲線 Γ について、アンペールの法則を適用すると

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_1 dS = I(t) \quad (129)$$

となるが、図のように、 Γ を端とする極板の間を通る曲面 S_2 をとると、 $\mathbf{j} = 0$ だから

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0 \quad (130)$$

となり、統一した議論ができなくなる(これを通常、矛盾といっているが、論理的「矛盾」ではなく、法則の適用範囲の問題であり、物理学の問題である。「パラドックス」に近い)。極板間の変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を電流と見なすと

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2 dS = I(t) \quad (131)$$

となり、一致する。

式(131)の最後の等式は既に(61)で導いているが、もっと一般的に成り立つことは次のようにしてわかる。

$\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_1 dS = 0$ である。閉局面 $S_1 + S_2$ について、外向きの法線ベクトル \mathbf{n} は、 $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$ 、 $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ となり、

$\text{div } \mathbf{D} = \rho$ 、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ 、およびガウスの定理を用いると

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2 dS &= \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1 + S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{d}{dt} \int_{S_1 + S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{d}{dt} \int_V \rho dv = - \int_V \text{div } \mathbf{j} dv = - \int_{S_1 + S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= - \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS - \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_2 dS = I(t) \end{aligned}$$

したがって、

アンペールの法則は、電流に変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を含めたとき、

初めて一般性が得られる

ことがわかった。

学生諸君のなかにはすでに、第1講で紹介した、

ファインマン 岩波現代文庫「物理法則はいかに発見されたか」江沢洋訳を読んだ人もいるだろう。そのなかで、ニュートンが彼の法則を如何に探り当てたかの説明の後、

「偉大な仕事をした次の人はマクスウェルで、電気と磁気の法則を発見しました。彼のやり方は、次のようなものでした。彼より先にファラデーやその他の人々が発見していた電磁気学の諸法則をまずならべてみた。よくよく見ると数学的につつまが合わない。それを直すのに彼はある方程式に一つ余分の項を加えたのです。渦柱や遊び車が空間をうめているという模型を自分で考え出し、それをいじっているうちにこの余分の項を思いついた。つまり彼は新しい法則を見いだしたわけですが、誰も注意を払いませんでした。渦柱、遊び車な

んで信じる人はいなかったからです。私たちも今日それを信じません。しかし彼の見いだした方程式は正しかった。論理は誤りでも答えは正しいと言うことがあるわけです。」

と言っています。この講義では無視した電磁気学成立の科学的側面も、科学の本質の理解を助けてくれるはずです。

今回の議論で明らかになるとおり準静的扱いは、場は変化するが、考えている物体の最大の長さに相当する距離を光が通過するのに要する時間内では、場はほとんど変化しない、すなわち場が伝播する有限の速度は考えない取り扱いである、と言える。もっと簡単にいえば、準静的扱いは電磁波に関わる議論を無視する取り扱い、といえる。

準静的扱いが行える一つの条件を考えておこう。導体内の電界を

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$$

とする。電流密度は

$$\mathbf{j}(t) = \sigma \mathbf{E}(t) = \sigma \mathbf{E}_0 \sin \omega t, \quad \sigma: \text{電気伝導率}$$

一方、変位電流密度 $\mathbf{j}_D(t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ は

$$\mathbf{j}_D(t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon \omega \mathbf{E}_0 \cos \omega t$$

である。2乗平均の比は

$$\frac{|\mathbf{j}_D|}{|\mathbf{j}|} = \frac{\epsilon \omega}{\sigma}$$

準定常として扱うためには、

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}$$

金属は $\sigma \sim 10^8 / \Omega \cdot \text{m}$ 、 $\epsilon \sim 10 \epsilon_0 \sim 10^{-10} \text{F/m}$ だから、 $\omega \ll 10^{18} \text{s}^{-1}$ となる。 $\omega \sim 10^3 \text{s}^{-1}$ 程度の普通の交流では、変位電流を考慮しなくて良い。(砂川重信著「電磁気学」)

準静的取り扱いでは、電荷の保存則 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ が $\text{div } \mathbf{j} = 0$ となった。したがって、また、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ の取り扱いといえる。

さらに、導体をオームの法則(64)($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$)で扱うとすると、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ は $\text{div } \mathbf{E} = 0$ を意味し、結局、電荷について、導体内では $\rho = 0$ となる。すなわち、何らの起電力もない導体の領域では、電荷は全く存在しないことになる。電線の中では電荷は存在しない、のである。

$\text{div } \mathbf{j} = 0$ は導線での電流 I がどこで計っても同じであることを意味する。コンデンサーでは電束電流を考慮して電流の保存を考えると、回路全体でキルヒホッフの法則が成り立つ。こうした扱いを電流回路の準静的取り扱いとする。式に基づいて議論できるが、ここではこうした直感的な扱いに止める。

以上の全ての議論をまとめたものが、Maxwellの方程式である。

Maxwellの方程式 (微分形)

1 電界に関するガウスの法則

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (132)$$

2 磁場に関するガウスの法則

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (133)$$

3 マクスウェル・アンペールの法則 (磁界に関するアンペールの法則に電束電流を考慮したもの)

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (134)$$

4 ファラデーの電磁誘導の法則

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (135)$$

繰り返すが、
変位電流を考慮しないと電荷の保存則が成立しない。
磁界に関するアンペールの法則は

$$\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j} \quad (136)$$

であるが、これより、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ となる。これは電荷の保存則 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ と矛盾する。電荷の保存則は、現在の物理学の表現にとって最も普遍的な原理となっている。(質量などは変化する。)

変位電流を考慮すると

電荷の保存則 が成立する。

マクスウエル・アンペールの法則 (134) の発散をとると

$$\text{div rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

左辺は0であり、右辺に電場に関するガウスの法則 (132) を適用すると電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (137)$$

が得られる。

マクスウエル・アンペールの法則は磁界の強さに関するアンペールの法則 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ の電流 \mathbf{j} に変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ を考慮したものであり、これは電流の保存則を常に成り立たす為に要請された修正だったから当然の帰結といえる。

エネルギー保存則 はどうなっているのだろうか。

(第15講で、再検討する)

(134) と \mathbf{E} の積から、(135) と \mathbf{H} の積を引いて

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E}$$

公式 $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ を適用して

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を仮定し、両辺の体積積分を行うと

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2}(\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv = - \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv - \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。 $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv$ はジュール熱の発生による電磁的エネルギーの損失を表している。一方 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は単位面積当たりの単位時間には通過するエネルギー割合を表している。したがってエネルギー保存の式は

$$\frac{dU_{em}}{dt} = - \int \sigma \mathbf{E}^2 dv - \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS \quad (138)$$

$$U_{em} = \int \left(\frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} \right) dv \quad \text{: 場のエネルギー} \quad (139)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} \quad \text{: Poynting のベクトル} \quad (140)$$

となる。

Maxwell 方程式の一つの見方 Maxwell の方程式は複数個の方程式が入り交じって見通し難い。そこで一つの見方を知っておこう。

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (141)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (142)$$

と並べてみると、力学の運動方程式と類似の構造をしていることがわかる。後半の方程式はそれぞれの空間的な条件を与える式と考えられる。(141) の前半の式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{div}(\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}) = -\text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

また (142) の前半の式を用いると

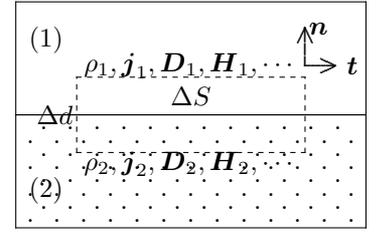
$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{B} = \text{div } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{div rot } \mathbf{E} = 0$$

となる。すなわち、それぞれの後半の方程式を微分した方程式は前半の方程式によって自動的に満たされる。したがって、初期に後半の方程式が満

たされていると、それ以後2つの後半の式は自動的に満たされることになる。その意味で後半の2つの式は前半の方程式の「補足的な条件」を与える式と見なすことができる。こうした見方は、Maxwell 方程式を「電磁ポテンシャル」を用いた表現に書き換えればよく分かる。しかし、これらのことは、話が少し長くなり、数学的準備も少し複雑になるので、割愛したい。詳細は「電磁気学メモ」を参照されたい。

境界条件 について整理しておこう。

簡単のため、物体は静止しているとし、物体1と2が接しているとする。電荷の保存則 (137), Maxwell の方程式 (132)~(135) を境界面をはさむ底面積 ΔS , 十分厚さ Δd が薄い微小体積 $\Delta V = \Delta S \Delta d$ にわたって積分すると、ガウスの定理 (8), (9) を適用して



$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \Delta S = - \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \frac{\Delta d}{2} + \rho_2 \frac{\Delta d}{2}) \Delta S$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta S + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta d \Delta S = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \Delta S = (\rho_1 \frac{\Delta d}{2} + \rho_2 \frac{\Delta d}{2}) \Delta S$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta S - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Delta d \Delta S = (\mathbf{j}_1 \frac{\Delta d}{2} + \mathbf{j}_2 \frac{\Delta d}{2}) \Delta S$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Delta S = 0$$

となる。

さらに、 $\Delta d \rightarrow 0$ の極限をとる。境界面での真電荷密度を σ_t , 面伝導電流密度を \mathbf{J}_c とすると

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\rho_1 \frac{\Delta d}{2} + \rho_2 \frac{\Delta d}{2}) = \sigma_t, \quad \lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\mathbf{j}_1 \frac{\Delta d}{2} + \mathbf{j}_2 \frac{\Delta d}{2}) = \mathbf{J}_c \quad (143)$$

したがって境界では

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) = - \frac{\partial \sigma_t}{\partial t}$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = \sigma_t \quad (144)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_c, \quad \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0$$

が成り立つ。また場を決定するためには等方性の条件 ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{E}, \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \sigma$; 電気伝導率) などの条件が必要となる。

ここで時間的余裕があれば、電磁ポテンシャル の概要を話すかもしれない。いずれにしても、詳しくは「電磁気学メモ」を参照されたい。

レポート課題

1 変位電流

アンペールの法則に変位電流を考慮してマクスウエル・アンペールの法則にしたものが、マクスウエルの方程式であった。そして、この正当性を確認したのが電磁波の観測である。

君が、変位電流を考慮した方がよい、と考える根拠を整理せよ。箇条書きに書けばよい。

2 (単色の) 平面電磁波

平面電磁波の電場 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$ を仮定して、以下のことを説明せよ。定義と Maxwell 方程式を用いて、順次導けばよい。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/c)}, \quad \mathbf{E} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0$$

$$\text{ただし, } \hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \quad \mathbf{H} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0$$

$$\mathbf{S} = c u_{em} \hat{\mathbf{k}}, \quad \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$$

$$\text{ただし, } u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2$$

- (1) レポート提出 …… 講義最終回の時間内
- (2) 指定の用紙1枚に整理する。(スペース不足は裏面で補う)。
- (3) 全ての記述は、鉛筆の手書きで行う。
- (4) 他の人の”書き写し”は、元、複両者を×とする。

物理II(11 由良) 第14講 平面電磁波

一番簡単な平面波の議論をおこなう。

真電荷がなく $\rho = 0$, また $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を仮定し, さらに ϵ, μ は一定, $\sigma = 0$ (絶縁体, 真空など) とする。Maxwell の方程式は

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H}, \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} \quad (145)$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0, \quad \text{div } \mathbf{H} = 0 \quad (146)$$

となる。 \mathbf{E}, \mathbf{H} が空間変数 x, y によらず, ただ z だけの関数とする。(145) は

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (147)$$

$$\mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (148)$$

となる。また (146) は

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (149)$$

となる。これらより, E_z, H_z は z, t によらず一定となり, 波動を考えるために 0 と置いておく。したがって (147), (148) は二組の方程式

$$\epsilon \frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (150)$$

$$\epsilon \frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad \mu \frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (151)$$

になる。 E_x, H_y と E_y, H_x はたがいに他と関係なく解が決まる。そこで,

$$E_y = 0, \quad H_x = 0 \quad (152)$$

として, (150) を満たす解が存在する。これを x 方向の偏波という。また

$$E_x = 0, \quad H_y = 0 \quad (153)$$

として, (151) を満たす波を y 方向の偏波という。

x 方向の偏波 $\mathbf{E}^{(x)} = (E_x^{(x)}, 0, 0), \mathbf{H}^{(x)} = (0, H_y^{(x)}, 0)$ は (150) より

$$\epsilon \mu \frac{\partial^2 E_x^{(x)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x^{(x)}}{\partial z^2} \quad (154)$$

によって決まる。 $H_y^{(x)}$ も同様である。これは空間 1 次元の波動方程式であり, 一般解は

$$u(z, t) = \phi(z - ct) + \psi(z + ct), \quad \phi, \psi \text{ は任意関数} \quad (155)$$

となる。ここで $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}}$ である。これは速さ c で進む進行波で $\phi(z - ct)$ は前進波を, $\psi(z + ct)$ は後退波を表す。

1 次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (156)$$

の一般解を求めておこう。

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \quad (157)$$

とおくと

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(+a), \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} a^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} a^2, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2}$$

を波動方程式 (156) に代入して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (158)$$

となる。したがって両辺を積分して, 積分定数を $f(\xi)$ とおくと

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi) \quad \text{さらに} \quad \xi \text{ で積分して} \quad u = \int f(\xi) d\xi + \psi(\eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

となる。よって波動方程式の一般解は

$$u(x, t) = \phi(x - at) + \psi(x + at), \quad \phi, \psi \text{ は任意関数} \quad (159)$$

d'Alembert の解

となる。 $\phi(x - at)$ および $\psi(x + at)$ はそれぞれ正行波 (前進波), 逆行波 (後退波) である。

解 $u(x, t) = \phi(x - at)$ は $t = 0$ の時, $u(x, 0) = \phi(x)$ である, すなわち, $u(x, t)$ のグラフは $u(x, 0)$ を x の方向に at だけ平行移動したグラフである。したがって $\phi(x - at)$ は速度 a の正行波であることが解る。同様に $\psi(x + at)$

(演習問題解答付き 教師用)

は速度 a の逆行波であることが解る。移動速度 a は波の伝播速度 (位相速度) である。

前進波

$$u(x, t) = \phi(x - at)$$

$$u(x, 0) = \phi(x) \quad \text{at} \quad u(x, t) = \phi(x - at)$$

誘電率 ϵ , 透磁率 μ の物質中の波の伝播速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu}} \quad (160)$$

となる。真空での電波の伝播速度は $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0 \epsilon_0}$ であり, 一般に $\epsilon > \epsilon_0, \mu \geq \mu_0$ であるから, 物質中では真空中に比べ波の伝播速度は遅くなる。今後は混乱が予想されない限り, c_0 も c と表記する。

いま, 前進波のみが存在する場合を考えると $E_x^{(x)} = \phi(z - ct)$ だから

$$\frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial z} = -c \frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial z}, \quad \text{また} \quad \frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_y^{(x)}}{\partial z}$$

$$\text{よって} \quad c \epsilon \frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial z} = \frac{\partial H_y^{(x)}}{\partial z}$$

したがって, 定数分を取り除くと

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x^{(x)} = H_y^{(x)} \quad (161)$$

となる。 $E_x^{(x)}$ と $H_y^{(x)}$ は必ず伴って存在する。従ってこのような電場と磁場を電磁波と呼んでいる。 $E_x^{(x)}$ と $H_y^{(x)}$ は同符号であり, $\mathbf{E}^{(x)}$ が x 方向を向いていれば, $\mathbf{H}^{(x)}$ は y 方向を向いており, その大きさの比は $\sqrt{\mu/\epsilon}$ である。 x 方向の偏波の進行方向 (z 軸の正の方向) は $\mathbf{E}^{(x)}$ から $\mathbf{H}^{(x)}$ に右ねじの進む方向である。

y 方向の偏波 $\mathbf{E}^{(y)} = (0, E_y^{(y)}, 0), \mathbf{H}^{(y)} = (H_x^{(y)}, 0, 0)$ について同様に前進波を考えると

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y^{(y)} = -H_x^{(y)} \quad (162)$$

となり, 波の進行方向は $\mathbf{E}^{(y)}$ から $\mathbf{H}^{(y)}$ に右ねじを回すときのねじの進む方向である。

一般には方程式の線形性から, z 軸方向に前進している波で, x 方向と y 方向の偏波が任意の比で重なり合った波 $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(x)} + \mathbf{E}^{(y)}, \mathbf{H} = \mathbf{H}^{(x)} + \mathbf{H}^{(y)}$ が存在する。このときも

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_x^{(x)} H_x^{(y)} + E_y^{(y)} H_y^{(x)} = 0 \quad (163)$$

となり, \mathbf{E} と \mathbf{H} は進行方向に垂直だけでなく, 互いに垂直であることがわかる。また電場のエネルギー密度と磁場のエネルギー密度は等しい。

$$u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 + \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2, \quad \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 = \frac{1}{2} \mu \mathbf{H}^2 \quad (164)$$

同様に後退波を考えると

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x^{(x)} = -H_y^{(x)}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y^{(y)} = H_x^{(y)} \quad (165)$$

となる。いずれにしても \mathbf{E} から \mathbf{H} に右ねじの進む方向が進行方向となっており, (163), (164) も成立する。

1888 年, ドイツの物理学者ハインリヒ・ルドルフ・ヘルツ (Heinrich Rudolf Hertz) は電磁波を初めて観測した。ここに, アンペールの法則に電束電流を考慮することの正当性が確認され, Maxwell 方程式が物理学の基礎方程式であることが確立した。

しかし, 式 (154) などから, この基礎方程式には真空中での光速 $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$ を含んでいる。「基礎方程式に速度を含む」ことは力学における慣性系の再検討を要求する。実験 (マイケルソン-モーレイの実験など) は「真空中の光速は不変である」ことを示している。「相対性原理」(物理法則は等価な慣性系では同じ方程式に従う) を適用すると, 慣性系ではガリレイ変換ではなく, ローレンツ変換に従うことが明らかになった。これが特殊相対性理論である。

前進波 $\phi(z - ct)$ の関数形は任意で, 特別な正弦関数形を仮定する。変数を $z - ct = -\frac{c}{\omega}(wt - c\frac{\omega}{c}z) = -\frac{c}{\omega}(wt - kz), k = \frac{\omega}{c}$ とおいて $wt - kz$ に

変換すると、 x 方向の偏波、 y 方向の偏波は

$$E_x^{(x)}(z, t) = E_{x0} \sin(\omega t - kz + \alpha) \quad , \quad H_y^{(x)}(z, t) = H_{y0} \sin(\omega t - kz + \alpha)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{x0} = H_{y0} \quad (166)$$

$$E_y^{(y)}(z, t) = E_{y0} \sin(\omega t - kz + \beta) \quad , \quad H_x^{(y)}(z, t) = H_{x0} \sin(\omega t - kz + \beta)$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{y0} = -H_{x0} \quad (167)$$

となる。ここに ω は角振動数、 $k = \frac{\omega}{c}$ は波数で、周期と $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 、波長と $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ の関係にある。

(教科書 p.305 図 8-13 を参照しよう。)

大学1年生の学生にとっては、一般的な前進波 $\phi(z - ct)$ を正弦関数に限定して取り扱うことの「飛躍」に戸惑うこともあるだろう。これには本質的な根拠がある。

電磁場を支配する方程式は全て線形であった。それにしたがって、電磁場は「線形空間」となる。その要素は全て有限の大きさを持っている。そうした空間の要素は、その空間に含まれる互いに直交する基底ベクトル(基本となる関数)の一次結合で一意的に展開することができる。これを三角関数に選ぶ方法をフーリエ解析という。一般の前進波 $\phi(\xi)$ を $\sin \xi$ で表したのはその代表として、一つを選んで議論しようとしたものであり、他の基底ベクトルは、異なる波数 k の正弦関数となる。重ね合わせは、関数を周期関数(あるいは有限の区間に限定する)とするか、無限に広がった座標での波(波束などという)を考えるかによって、足し算になるか、積分になるかの違いはあるが、それぞれの要素の関数はそれぞれ他とは独立に振る舞いが決まる。前進波を正弦関数に選んだが、それは、前進波の多くの性質をこの特定の関数によって表現することができるからである。

$\alpha - \beta = n\pi$ の時、 $\frac{E_y^{(y)}}{E_{y0}} = (-1)^n \frac{E_x^{(x)}}{E_{x0}}$ となり、 \mathbf{E} は xy 平面から進行方向の z 軸方向を見ると直線上を振動する。これを直線(平面)偏波といい、光の時、電界ベクトルと進行方向を含む面を偏光面という。

$\alpha - \beta \neq n\pi$ の時、電界ベクトルは xy 面に投影すると楕円を描く。これを楕円偏波という。

ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は z 軸方向を向き

$$S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = |E_x^{(x)} H_y^{(x)} - E_y^{(y)} H_x^{(y)}|$$

$$= E_{x0}^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin^2(\omega t - kz + \alpha) + E_{y0}^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin^2(\omega t - kz + \beta)$$

となり、時間平均は

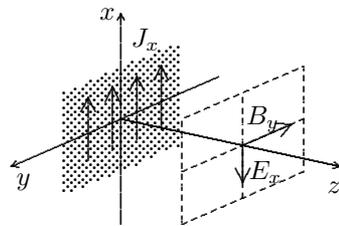
$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_{x0}^2 + E_{y0}^2) \quad (168)$$

となる。

平板からの電磁波の放射

一番簡単な無限に広がった平板からの電磁波の放射を考える。この場合は、境界条件が簡単となり、解が求まる。現実的な電磁波の放射は「メモ」を見て欲しい。

xy 平面に無限に広がった導体板に x 軸方向に y 軸方向の単位幅あたり J_x の電流が流れているとする。定常で電流 $J_x = J_0$ が平板上を一様に流れているとすると、



z だけ離れた点での磁場はアンペールの法則より

$$B_y = -\mu_0 J_0 / 2 \quad (169)$$

となる。いま電流が角振動数 ω で周期的に変化しているとする。

$$J_x = J_0 \cos \omega t \quad (170)$$

平板の近傍での磁場は

$$B_y = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \cos \omega t \quad (171)$$

から、 z だけ離れた解は

$$B_y = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \cos(kz - \omega t) \quad (172)$$

となるはずである。これは x 方向の偏波であり、電場は(161)より

$$E_x = -\frac{\mu_0 J_0 c}{2} \cos(kz - \omega t) \quad (173)$$

となる。

ポインティングベクトルは

$$S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{\mu_0 J_0^2 c}{4} \cos^2(kz - \omega t) \quad (174)$$

その平均値は

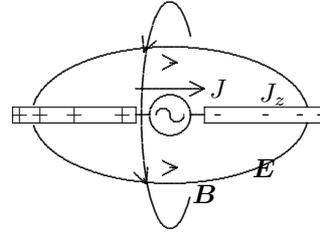
$$\langle S \rangle = \frac{\mu_0 J_0^2 c}{8} \quad (175)$$

両サイドから放射される単位面積あたりの放射のエネルギーは

$$2 \langle S \rangle = \frac{\mu_0 J_0^2 c}{4}$$

となる。

無限の平板からの電磁波の放射は現実からかけ離れている。電磁波の放射はアンテナが用いられる。線形アンテナはおおよそ次の原理である。2つの導体棒の一つの直線上に左右に近接して並べ、その近い端に電圧あるいは電流を制御して、棒全体の電荷分布(同じことであるが電流)を振動させる。



はじめ、棒は全体として帯電していないとする。いま ($z < 0$) に正の、右部 ($z > 0$) に負の電荷があり、左部から右部に電圧がかかっている。正の電荷は左部から右部に移動し電流は右に流れる。これによって棒の周りには左部から右部を向いて右回りの磁場が発生する。また電荷分布に応じた電場が棒の周りに発生する。これらが光速で棒から離れる方向に進行する。

電気双極子の振動による電磁波の放射は、このアンテナを一般化したものである。これについては「電磁気学メモ」を参照されたい。電磁波の放射については、学ばねばならないことが多くある。

電磁気学のテキストとして評価の高い

物理学入門コース「電磁気学II」長岡洋介著 岩波書店から例題と演習問題を拝借する。

例題

「レーザーは光の放射に関する原子の性質を利用して、強い単色光のビームを放射させる装置である。出力1ワットのレーザーから、直径0.01mmの細い光のビームが出ている場合、光の電磁場の強さはおよそどれほどか。」

1ワットの出力とは、レーザーから毎秒1ジュールのエネルギーが放射されていることを意味する。このエネルギーが、断面積 $3.14 \times (5 \times 10^{-6})^2 \approx 8 \times 10^{-11} \text{m}^2$ の光のビームにより運ばれるから、このエネルギーの流れの密度は、

$$S \approx \frac{1}{8 \times 10^{-11}} \approx 1.3 \times 10^{10} \text{J} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{m}^2$$

である。エネルギー密度は

$$u_{em} = \frac{S}{c} \approx \frac{1.3 \times 10^{10}}{3 \times 10^8} \approx 43 \text{J} \cdot \text{m}^{-3}$$

となる。したがって、 $u_{em} = \epsilon_0 E^2$ より電場は

$$E = \sqrt{\frac{u_{em}}{\epsilon_0}} \approx \left(\frac{43}{9 \times 10^{-12}} \right)^{1/2} \approx 2 \times 10^6 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$$

となる。また磁場は

$$B = \frac{E}{c} \approx \frac{2 \times 10^6}{3 \times 10^8} \approx 6.7 \times 10^{-3} \text{T}$$

となる。

演習

1 電場の振幅が $0.1 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ の電磁波において、磁束密度の振幅はいくらか。また、エネルギーの流れの密度(ポインティング・ベクトルの大きさ)はいくらか。

$B_0 = E_0/c$, $E_0 = 0.1 \text{V} \cdot \text{m}^{-1}$ のとき、 $B_0 = 3.3 \times 10^{-10} \text{T}$ 。ポインティング・ベクトルの振幅は $S_0 = E_0 B_0 / \mu_0 = 2.6 \times 10^{-5} \text{J} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{s}$

2 z 軸の正、負の向きに進む2つの電磁波がある。電場は x 軸の方向を向き、

$$E_1(z, t) = E_0 \cos(kz - \omega t), \quad E_2(z, t) = E_0 \cos(kz + \omega t)$$

である。この2つの電磁波が同時に伝わる時、その重ね合わせによって生じる電磁場の振動はどうなるか。

$\mathbf{B} = \frac{1}{c} \hat{k} \times \mathbf{E}$ より、磁場は y 軸方向を向き、

$$\text{それぞれ } B_1(z, t) = B_0 \cos(kz - \omega t), \quad B_2 = -B_0 \cos(kz + \omega t).$$

ただし、 $B_0 = E_0/c$ 。

重ね合わせによって生じる電場および磁場は、

$$E(z, t) = E_1(z, t) + E_2(z, t) = 2E_0 \cos kz \cdot \cos \omega t$$

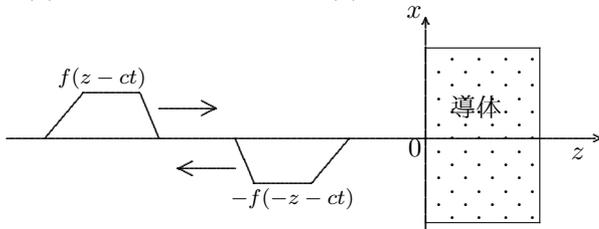
$$B(z, t) = B_1(z, t) + B_2(z, t) = 2B_0 \sin kz \cdot \sin \omega t$$

電場と磁場は、腹(振幅が最大の点)と節(振幅が0の点)の位置が入れ替わった定常波になる。

物理II(11 由良) 第15講 運動量保存則

導体面による電磁波の反射と運動量

平面波の完全導体 ($\sigma = \infty$) との境界での反射を考える。 ϵ, μ は一定とする。境界を $z = 0$ とし、 x 軸方向の偏波を $E_x = f(z - ct) + g(z + ct)$ ((155) 参照) とする。 $t = 0$ では z 軸の負の方から前進波だとすると $z < 0$ に対して $g(z) = 0$, $z > 0$ に対して $f(z) = 0$ となる。



境界 $z = 0$ での導体面上では電界の接線方向成分は 0 だから

$$E_x(z = 0) = f(-ct) + g(+ct) = 0 \quad (176)$$

となる。よって $g(\xi) = -f(-\xi)$, $\xi > 0$ 。したがって

$$E_x = f(z - ct) - f(-z - ct) \quad (177)$$

同様に磁界の強さは

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(z - ct) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(-z - ct) \quad (178)$$

となり、 $z = 0$ 導体表面では

$$H_y(z = 0) = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(-ct) \quad (179)$$

となる。導体内部では $\mathbf{H} = 0$ だから、 $z = 0$ で (179) だけの \mathbf{H} の不連続が存在する。したがって (144) より、導体表面に x 軸方向の面密度 J_x の電流

$$J_x = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(-ct) \quad (180)$$

が生じていることになる。この面電流は磁束密度 B_z から力を受ける。磁束密度は導体の外部と内部の平均と考えて良いから、導体面はローレンツ力による圧力

$$p = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_z = J_x B_y = 2\epsilon \{f(-ct)\}^2 = 2\epsilon E^2 \quad (181)$$

を受ける。したがって逆に単位時間に c だけ進む電磁波 $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H_y, 0, 0)$ は反射によって単位体積あたり運動量の変化

$$|\Delta \mathbf{P}| = \frac{2\epsilon E^2}{c} \quad (182)$$

を受けたと考えられる (\mathbf{E} は入射電磁波の電場)。これは反射波と入射波の差であるから、入射電磁波の運動量はこの半分となる。すなわち $\epsilon E_x^2/c = E_x H_y/c^2$ となる。これが z 軸方向へ進行していることを考慮すると、一般に電磁波の運動量密度は

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (182)$$

と表されることが予想できる。電磁波はエネルギーだけでなく、運動量を持っているはずである。また、面に垂直に入射する電磁波から面が受ける圧力は

$$\frac{S}{c} (\text{完全吸収}) \leq p \leq \frac{2S}{c} (\text{完全反射}) \quad (183)$$

となるはずである。

すでにエネルギー保存則については (138) で議論した。しかし、そこでは、電磁場のみのエネルギーが議論され、ジュール熱 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ は系の外へ流れる。真電流は荷電粒子の運動によって発生し、エネルギー保存則は荷電粒子の運動も含めた系で成り立つはずである。また、運動量の保存則は力の基本的な性質である作用・反作用の法則と深く結びついている。我々は電流の相互作用から、これが各電流素片 $I ds$ 間の相互作用について成り立つとして、ビオサバールの法則とアンペールの力を出発点に選んだ。しかし、電流の相互作用の各電流素片での力には作用・反作用の法則は成り立たないという深刻な問題があった。勿論 2 つの電流全体としては作用・反作用の法則は成り立つ。従って、遠隔作用説を押し通すのは困難で、これは近接作用説に基づいて、しかも真電流の実体を系に入れた議論を通じて解決できると予想される。この節では、簡単な系におけるエネルギー保存則と運動量保存則を通して、近接作用説の統一した解釈を確立する。

N 個の荷電粒子 (電荷 q_k , 質量 m_k , 位置 $\mathbf{r}_k(t)$, 速度 $\mathbf{v}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$) からなる系を考える。

$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ である。場の方程式は

$$\text{div } \mathbf{D} = \sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \quad (184)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (185)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sum_k \mathbf{v}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \quad (186)$$

$$\text{rot } \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (187)$$

(演習問題解答付き 教師用)

各質点の運動方程式は、各 $k(k = 1, 2, \dots, N)$ について、

$$\frac{d(m_k \mathbf{v}_k)}{dt} = \int_V \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \mathbf{E} + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \mathbf{v}_k \times \mathbf{B} \} dv \quad (188)$$

である。

始めにエネルギー保存則を考える。

(188) に \mathbf{v}_k をかけて、全ての粒子にわたって、和をとる。

$$\sum m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \int_V \left\{ \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{E} + \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{v}_k \cdot (\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}) \right\} dv$$

右辺第 2 項は恒等的に 0 である。右辺第 1 項はジュール熱 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ の項である。これに (186) を代入して、

$$\frac{d}{dt} \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 = \int_V (\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{E} dv$$

公式 $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$,

および $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, (187) を考慮すると

$$\mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{E} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 + \int_V (\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \right\} = - \int_V \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv$$

右辺にガウスの定理を適用して、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_k \frac{1}{2} m_k v_k^2 + \int_V (\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \right\} = - \int_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (189)$$

これは、力学的エネルギーと電磁場のエネルギーの和の減少は、右辺の表面から出ていく放射のエネルギーに等しい、ことを意味している。

次に運動量の保存則を考える。(188) の全ての粒子の和をとると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_k \mathbf{v}_k &= \int_V \left\{ \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{E} + \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{v}_k \times \mathbf{B} \right\} dv \\ &= \int_V \left\{ \mathbf{E} \text{div } \mathbf{D} + (\text{rot } \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \times \mathbf{B} \right\} dv \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_k \mathbf{v}_k &= \int_V \left\{ \mathbf{E} \text{div } \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right\} dv \\ &= \int_V \left\{ \epsilon_0 (\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\} dv \end{aligned}$$

ここで

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (190)$$

$$\mathbf{G}_M = \sum m_k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{G}_{em} = \int_V \mathbf{g} dv \quad (191)$$

とおき、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ を考慮すると

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em}) &= \int_V \epsilon_0 \{ \mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E} \} dv \\ &\quad + \int_V \frac{1}{\mu_0} \{ \mathbf{B} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} \} dv \end{aligned}$$

右辺の \mathbf{E} の項の各 x 成分, y 成分, z 成分を調べると

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E})_x &= E_x \text{div } \mathbf{E} - \{ E_y \times (\text{rot } \mathbf{E})_z - E_z \text{rot } (\mathbf{E})_y \} \\ &= E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} E_x^2 - \frac{1}{2} E_y^2 - \frac{1}{2} E_z^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(E_x^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E})_y &= \frac{\partial}{\partial x} (E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial y} \left(E_y^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) + \frac{\partial}{\partial z} (E_y E_z) \\ (\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E})_z &= \frac{\partial}{\partial x} (E_z E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z E_y) + \frac{\partial}{\partial z} \left(E_z^2 - \frac{1}{2} E^2 \right) \end{aligned}$$

である。右辺の \mathbf{B} の項も全く同様だから、 x, y, z を x_1, x_2, x_3 として

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j - \frac{\epsilon_0}{2} E^2 \delta_{ij} + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2\mu_0} B^2 \delta_{ij}$$

とおくと

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em}) = \int_V \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (192)$$

となる。(T_{ij}) は「Maxwell の応力テンソル」と呼ばれる。右辺の i 成分は、 $A_j = T_{ij}$ とおくと、ガウスの定理を用いて、

$$\int_V \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dv = \int_V \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dv = \int_V \text{div } \mathbf{A} dv$$

$$= \int_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} \sum_j T_{ij} n_j dS$$

となる。したがって、

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em})_i = \int_{\Sigma} \sum_j T_{ij} n_j dS$$

$$F_i = \int_{\Sigma} \sum_j T_{ij} n_j dS, \quad i = 1, 2, 3 \quad (193)$$

とおくと、以下のようになる。

$$\frac{d}{dt} (\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em}) = \mathbf{F} \quad (194)$$

一般に面を通して伝えられる力は応力テンソル T を用いて表せる。面素 $dS = \mathbf{n} dS$ の j 方向成分 $dS_j = n_j dS$ を通して伝えられる力 $d\mathbf{F}$ の i 成分 dF_i は

$$dF_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} dS_j \quad (195)$$

となる。表現を簡潔にするため座標 (x, y, z) を $(x_i, i = 1, 2, 3)$ と表し、また式の中に同じ指標が現れたときには $\sum_{j=1}^3$ などの総和記号は省略することもある。したがってある領域に働く全体の力の i 成分は

$$F_i = \int f_i dv = \int T_{ij} dS_j \quad (196)$$

となる。一方単位体積あたりの力を \mathbf{f} とすると

$$F_i = \int f_i dv \quad (197)$$

となる。(196), (197) が等しいはずだから

$$\int f_i dv = \int T_{ij} dS_j$$

ガウスの発散定理を用いると

$$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (198)$$

となる。Maxwell の応力テンソルに適用すると、体積力 \mathbf{f} は

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (199)$$

となる (各自導出せよ)。第1項は静電力、第2項は電磁力である。最後の項は

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{a^2} \mathbf{S} \right) = \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

となり、(182) で予想した電磁波の運動量の変化を表している。したがって Maxwell の応力テンソルを仮定すると、(182) は自然な解釈となる。

Maxwell 応力テンソルによって、静電場の応力分布を考えてみよう。図のように電気力管を管に垂直な面で切断したとする。

始めに、電気力管の微小側面 ΔS 、 ΔS に垂直な単位ベクトル (ΔS の管の内から外向けの法線ベクトル) を \mathbf{n} とする。

電気力管の定義より、 $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$ 、すなわち $E_i n_i = 0$ である。

ΔS に対する応力は

$$F_i = (\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \delta_{ij}) n_j \Delta S = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 n_i \Delta S$$

よって $\mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \Delta S \mathbf{n}$

となる。従って、電気力管の側面では面に垂直で単位面積あたり $\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$ の内側に向かう力、すなわち、圧力が加わっており、電気力管を細くするように作用している。

電気力管の切断面について、同じように微小面積 ΔS 、 ΔS に垂直な単位ベクトルを \mathbf{n} とする。切断面では $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$ となっているから、

$$F_i = (\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \delta_{ij}) n_j \Delta S = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \Delta S n_i \quad \text{よって } \mathbf{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \Delta S \mathbf{n}$$

電気力管の垂直断面では、面に垂直な単位面積あたり $\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$ の張力が作用している。

電気力管はゴムひものようなふるまいをする。2つの異符号の点電荷では、電気力線は負の電荷から正の電荷に向かう。いずれの電気力管をとっても、電気力管のいずれの点でも張力が作用し、結果として、2つの電荷は引き合うことになる。同符号の場合は反発し合うことになる。

静磁場も静電場と全く同様の応力テンソルだから、こうした解釈は磁場

の中での電流が受ける力、フレミングの左手の法則をうまく説明することになる。中学・高校では、「磁場の中で、電流がつくる磁場がその磁場を強め合う方から弱め合う方へ力が働く」と説明されている。

これより、 \mathbf{g} は電磁場の運動量密度を表しており、またこの運動量保存則の導出から、Maxwell 応力テンソルは単に体積力を導くテンソルというだけでなく、電磁場の応力分布の正しい表現となっていることがわかる。単色の平面電磁波では $\mathbf{S} = c u_{em} \hat{\mathbf{k}}$ だったから、 $u_{em} = cg$ である。

2010年3月13日、新聞各紙は、

光の圧力で星空を舞う—世界初の宇宙帆船「イカロス」などの見出しで太陽の光を帆に受けて、光の圧力でヨットのように航行する世界初の小型ソーラ電力セイル実証機「IKAROS (イカロス)」の機体が完成したことを報じた。宇宙航空研究開発機構が5月18日に打ち上げるH2Aロケットで、金星探査機「あかつき」とともに金星の方向へ向かうというものです。(気象などによって実際の打ち上げは2010年5月21日に行われた。)

小惑星「イトカワ」から帰還した「はやぶさ」は感動的でしたが、この「イカロス」の成果にも注目したい。3月の新聞報道を要約すると、「イカロス」は、太陽光を帆に受けて航行する宇宙ヨット(帆船)。直径1.6m、高さ80cmの円筒形で、胴体部分に一辺約14mの薄い帆が巻き付けられている。金星への航行時は帆を大きく開く。太陽光を受けると、0.5gほどの重りをぶら下げたのと同じ圧力を得られる、とのこと。

ちょっと、計算してみよう。ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ (\mathbf{E} は電場、 \mathbf{H} は磁場) は単位面積当たりの単位時間に通過するエネルギー割合を表している。太陽光の地球表面での単位時間、単位面積あたり垂直方向の放射エネルギー(太陽定数)は、 1.37 kW/m^2 であることがわかっている。すなわち、 $S = 1.37 \text{ kW/m}^2$ である。従って、太陽からの距離が地球と同じ点での、太陽光の圧力 p は、 c を光速とすると

$$p \approx \frac{S}{c} = \frac{1.37 \times 10^3 \text{ J/(s} \cdot \text{m}^2)}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 0.46 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

となる。帆の面積は $(14\text{m})^2 \approx 200\text{m}^2$ だから、太陽光が帆に垂直に入射するとして、帆が受ける力は完全吸収から完全反射の間で

$$0.92 \times 10^{-3} \text{ N} < f < 1.84 \times 10^{-3} \text{ N}$$

となるだろう。 $1.84 \times 10^{-3} \text{ N} \approx 0.2 \text{ g}$ 重。イカロスは「ソーラ電力セイル」推進で、帆の約10%が薄膜太陽電池で、この電力によるイオンエンジンの推力も併用されている。

宇宙航空研究開発機構は2010年7月9日、光を帆に1カ月間浴び続け、秒速約10mの速度変化を観測し、1.12mN(0.114g重)に相当する力を受けていた、と発表しました。これによりIKAROSは、惑星間航行において、光子による史上最大の加速度を発揮した実証機となりました。この力は極めて小さいのですが、継続的に長期間作用させることが出来、大きな効果を発揮できるのです。宇宙の飛行物体の加速はこうしたエンジンの推力だけでなく、太陽や惑星、衛星などの引力を組み合わせて効果的に軌道や速度を制御します。太陽光の反射だけでは太陽に近づく方向に力を働かすことはできません。この点について、ネットに間違った記述がありますので注意して下さい。

夏目漱石の「三四郎」には、光の圧力の実験がでてきます。現在にいたって、やっとその実用化に目処がついた、ということです。1950年代の少年雑誌にはイオンロケット、光子ロケットの構想が何度も載っていました。「イカロス」は自ら光を発生して推進するロケットではなく、したがって、「帆船」という巧みな命名がされていますが、光の圧力(光は運動量を持っていること)を用いるという意味で光子ロケットと同じ原理です。少し注意して欲しいことは、光の圧力は、量子論的な議論に依存する考え方ではなく、古典電磁気学 ($p = \frac{S}{c}$ の解釈に、その特徴が現れている) の中で理解できるものです。その意味で、ここで「光子」という表現を用いることは必ずしも適切ではない、と感じています。

まとめの話

以上の講義では、「電磁ポテンシャル」、「電磁波の反射・屈折」の議論を割愛した。「電磁気学メモ」を参照していただきたい。また、Maxwell方程式は「特殊相対性理論」の枠組みの中で完全に理解でき、それは「電気力学」という形でまとめられる。原子模型からはじまる微視的世界については、非相対論的な量子力学で、さらに光子や物質の生成消滅を含む相互作用は相対論的な場の理論「量子電磁力学」の学習を待たねばならない。さらに、これ以降のことを私に聞かれても、受け売りしかできない。

「光より速いニュートリノ 国際研究で観測 相対論と矛盾」というニュースが世界を駆けめぐりました。名古屋大、宇都宮大、神戸大、東邦大などが参加する国際共同研究グループは2011年9月23日、素粒子の一種ニュートリノが光よりも速い、との実験結果を得たと発表しました。特殊相対性理論に反するというのです。これが真実なのかどうかは、多くの検証実験を待たねばなりません。もし「光より速いニュートリノ」が真実であるとするならば、電磁気学といえどもその根本のところ、解釈の一部を修正しなければならなくなるのかもしれない。

科学の学習においては、まじめにテキストを読み解くだけでは、本質はわからない。些細なことでも良いから、自分の具体的な課題にそれを適用して、はじめて本当の意味が理解できる。演習問題は疑似体験を提供する。

電磁気学ノートチェック

2回目の電磁気学ノート 6点満点で評価を行う。

レポート(2つの課題) 提出

学籍番号、名前を確認 10点満点で評価を行う。

テスト要領

2月8日 定時に始める。2教室に分かれる。受験の教室は別途連絡がある。

一切の参照許可物なし。66点満点で評価。