

電磁気学メモ

2011年

由良忠義

この「電磁気学メモ 2011年」は、大阪府立大学，工学部，機械工学科・海洋システム工学科，「物理II」の講義の補助教材です。教科書は「物理学」小出昭一郎著ですが，議論の展開はおおむねこのメモにしたがいます。学生諸君には毎回，事前に，講義要旨のメモを配布します。どちらも，有効な活用を期待します。

(2011,12,1 改訂)

由良忠義

名	前

概要

電磁気学 (electromagnetism), あるいは古典電磁気学は確立された美しい体系で, Maxwell の 4 つの方程式に集約されます。われわれのカリキュラムの物理 II 「初等電磁気学」は, 「電気力学」あるいは「場の古典論」といわれる相対性原理をふまえた統一的な理論の基礎でもあります。学習の課題を, まず第一にいくつかの直感的, 実験的な現象からどのようにして 1 つの体系に帰納されたのか, 第二に各種の電磁的現象が電磁気学によってどう解釈されるのかにしばります。法則の各側面が入り交じって関係し, 全体像を理解するには少し努力が必要です。理解の流れ, 言い換えれば理論の展開には, 遠隔作用説から近接作用説への流れ, 真空の電磁気学から誘電体, 磁性体の電磁気学への流れ, 定常から非定常への流れがあります。統一的な理解にはベクトル解析をはじめとするいくつかの数学的手法も必要です。このメモはそれらの学習を支援するために書いているものです。基本的には我々のテキスト「物理学」小出昭一郎著の 6 章, 7 章, 8 章で十分ですが, 少し別の表現をしてそれらを補うことになればと思います。selfcontainedにできるだけ省略なく展開するため, 大学 1 年度の学生にはほんのちょっとだけ努力が必要などころもあるかもしれません。昔に比べ, 電磁気学の学習はずいぶん学習環境が良くなっています。単位系は統一され, どのテキストを見てもほぼ同じ記号や単位が用いられ, 混乱が少なくなり, 静電場の解法 (調和関数) がコンピュータグラフィックの援用で原理的な理解があれば済ますこともできるようになった, などがその例です。

したがって, このメモの全体構成は, はじめに講義で出てくる主な法則を公式として, また混乱しやすい単位系について整理し, 続いて, それらの関係で少しわかりにくいところを解説する, さらに, 数学的に必要ないくつかの公式とその簡単な証明を与えておく, となりました。

記号法はテキストにできるだけ従います。閉曲線に沿っての \mathbf{r} での線素はテキストでは $d\mathbf{r}$ ですが, ここでは線積分を強調するため $d\mathbf{s}$ を用いました。また電位, 磁位はテキストでは V, V_m が用いられていますが, ポテンシャルであることを強調するため ϕ, ϕ_m を用いました。さらに, 磁化は \mathbf{M} を用い, テキストの磁気分極 \mathbf{P}_m と $\mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$ の関係にあります。座標は冗長になりますが混乱を避けるためできるだけ explicit に表現しています。

テキストとの最大の相違は表現形式が違うことです。同じ内容を異なった式で表すことがあります。ここでは E-B 対応と呼ばれる形式を採用しています。本来何であっても良いのですが, 論理一貫性をわかりやすくするためにこれを採用し, 最初に公式集を掲載した所以です。応用の時は必ず参照して下さい。

このメモは, 20 数年前に著者の電磁気学の整理のために作成していたものを講義の副教材に改編しながら現状に至ったものです。読者の学習に有効に活用していただければ幸いです。誤り等, 問題点が多数あると思いますが, ご指摘いただければ幸いです。また, 全くどの点でも不十分で, 講義を進めていくなかで, 順次追加訂正していきます。

もし受講生でこれのプリントをお考えならば, 第 1 回の講義後にされることをお勧めします。

このテキストの扱いは, 現在では, 学習塾 樽井文化センター のホームページに記されている。

URL <http://taruibunka.la.coocan.jp>

追記 多分, 私の電磁気学入門の講義は本年度を以て最後となります。10 年版にわずかの修正を加えておきました。お粗末な講義につき合ってくれた多くの学生諸君に深く感謝しています。

私などが今更申すまでもなく, 科学は完成したものでもなく, すっきりしたものでもありませんが, その中であっても, 初等電磁気学は特筆すべき美しい体系にまとめられた分野です。したがって, いくつかの困難はありますが, 整理して学習すれば確かな修得が可能で, それを乗り越え, より強力に前に進み続けてほしいと思っています。

目次

第 1 章	電磁気学メモ	2
1.1	電磁気学公式	2
1.2	Maxwell 方程式への道しるべ	6
1.3	MKSA 単位系	7
1.4	物理定数表	8
第 2 章	電磁気学の展開	9
2.1	クーロンの法則と静電場の性質	9
2.2	導体と静電場, 静電場のエネルギー	12
2.3	誘電分極と電束密度	16
2.4	電流に関する保存則	20
2.5	磁石と静磁場	23
2.6	電流の相互作用とビオ・サバールの法則	24
2.7	アンペールの法則と真磁荷は存在しないこと	27
2.8	輪電流による磁気モーメントと磁性体	29
2.9	ファラデーの電磁誘導の法則	33
2.10	磁気エネルギー	37
2.11	準静的取り扱いと電流回路	41
2.12	マックスウェル・アンペールの法則と Maxwell の方程式	44
2.13	平面電磁波	48
2.14	電磁波の反射, 屈折	52
2.15	平板, および電気双極子からの電磁波の放射	54
2.16	導体面による電磁波の反射と運動量	57
2.17	エネルギー保存則と運動量保存則	60
第 3 章	電磁気学のためのベクトル解析	63
3.1	ベクトルの基本性質	63
3.2	2変数, 3変数の関数の微分	66
3.3	多重積分, 面積分と線積分	71
3.4	立体角, ポテンシャル, ベクトルポテンシャル	76
3.5	いくつかの偏微分方程式	81
第 4 章	付録	87
4.1	アンペールの法則に関するアンペールの考え	87
4.2	柱状磁石の磁場の計算	88
4.3	ものに沿って進む波	89

第1章 電磁気学メモ

1.1 電磁気学公式

1 静電場

[1] 真空における静電場

(a) 電荷に関する Coulomb の法則

$$\mathbf{F}_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad \mathbf{F}_2: q_2 \text{ が } q_1 \text{ から受ける力} \quad (1.1)$$
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2, \quad \epsilon_0: \text{真空の誘電率}$$

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad \mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (1.2)$$

(b) 静電場

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r}), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q'}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}): q' \text{ による } \mathbf{r} \text{ での電界} \quad (1.3)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (1.4)$$

[2] 静電場の性質

(a) 静電場についてのガウスの法則

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i, \quad (\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho) \quad (1.5)$$

(b) 電位

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}, \quad \mathbf{E} = -\nabla\phi = -\text{grad } \phi \quad (1.6)$$

$$(\text{rot } \mathbf{E} = 0, \quad \nabla^2\phi = -\frac{1}{\epsilon_0}\rho)$$

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r}, \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n \frac{q_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|}, \quad \phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (1.7)$$

[3] 電気容量

$$q = C\phi, \quad q = CV, \quad C \text{ (ファラッド)} \quad (1.8)$$

$$W = \frac{1}{2}QV, \quad w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \quad (1.9)$$

[4] 誘電体

$$C = \epsilon_r C_0, \quad \epsilon_r: \text{比誘電率} \quad (1.10)$$

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}, \quad \mathbf{P}: \text{誘電分極 (電気分極)}, \quad \sigma_p: \text{分極電荷密度} \quad (1.11)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}, \quad \mathbf{D}: \text{電束密度 (電気変位)} \quad (1.12)$$

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q_t, \quad q_t : \text{真電荷} \quad (1.13)$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (1.14)$$

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \chi_e : \text{電気感受率 (分極率)}, \quad \mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon : \text{誘電率} \quad (1.15)$$

電気力線, 電束線の屈折率

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (1.16)$$

[5] (電流, エネルギーの) 連続の方程式

$$\int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = 0, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}, \quad \sigma : \text{導電率} \quad (1.17)$$

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dU}{dt} = - \int_{\Sigma} \phi \left(\mathbf{j} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) \cdot \mathbf{n} dS, \quad \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} : \text{変位電流密度}, \quad \phi : \text{電位} \quad (1.18)$$

$$Q = \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv : \text{電流による発熱}, \quad U = \int \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 dv : \text{電気的エネルギー} \quad (1.19)$$

2 静磁場

[1] 真空における静磁場 (理論の構成上は不要)

(a) 磁石に対する Coulomb の法則

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m1} q_{m2}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad \mathbf{F}_2 : q_{m2} \text{が} q_{m1} \text{から受ける力} \quad (1.20)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 : \text{真空の透磁率}$$

(b) 静磁場

$$\mathbf{F} = q_m \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m = -\mu_0 \text{grad } \phi_m, \quad \mathbf{B} : \text{磁束密度}, \quad \phi_m : \text{磁位} \quad (1.21)$$

(c) 磁気モーメント

$$\mathbf{m} = \sum q_{mi} \mathbf{r}_i, \quad \left(\sum q_{mi} = 0 \text{ より } \mathbf{r} \text{ の原点の取り方によらない} \right) \quad (1.22)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{N} : \text{力の能率} \quad (1.23)$$

[2] 定常電流と磁束密度の関係

(a) 電流の相互作用

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{l_1} \oint_{l_2} \frac{d\mathbf{s}_2 \times (d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}, \quad \mathbf{F}_2 : \text{電流 } I_2 \text{が電流 } I_1 \text{から受ける力} \quad (1.24)$$

$$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad \text{真空の透磁率}$$

(b) ビオ・サバールの法則

$$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad (\text{真空}) \quad (1.25)$$

(c) ローレンツ力

$$\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}), \quad \Delta \mathbf{F} = I \Delta \mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (1.26)$$

$\Delta \mathbf{F} : \text{アンペールの力}, \quad \mathbf{B} : \text{磁束密度}$

$$d\mathbf{N} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F}, \quad \mathbf{N} = I \mathbf{G} \times \mathbf{B} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}, \quad \mathbf{m} = I \mathbf{G} : \text{磁気モーメント } \text{Am}^2 \quad (1.27)$$

(d) アンペールの法則 (真空)

$$\phi_m = \frac{1}{4\pi} I \Omega, \quad \phi_m : \text{磁位}, \quad \Omega : \text{閉曲線電流 } I \text{ を臨む立体角} \quad (1.28)$$

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{j} : \text{電流密度} \quad (1.29)$$

$$(\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j})$$

$$\mathbf{B}(\text{真空}) = \mu_0 \mathbf{H} : \text{磁束密度 (テスラ (T)=ウエーバー/m}^2\text{=Wb/m}^2)$$

[3] 磁性体

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M}, \quad \mathbf{M} : \text{磁化}, \quad \mathbf{H} : \text{磁界の強さ} \quad (1.30)$$

$$\text{テキストの磁気分極 } \mathbf{P}_m \text{ とは } \mathbf{P}_m = \mu_0 \mathbf{M}$$

$$\mathbf{B} : \text{磁束密度 (テスラ (T)=ウエーバー/m}^2\text{=Wb/m}^2)$$

$$\nabla \times \mathbf{M} = \mathbf{j}_m, \quad \mathbf{j}_m : \text{磁化電流密度, これが磁化の源}$$

強磁性体以外では

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0 (1 + \chi_m)$$

$$\chi_m > 0 : \text{常磁性体}, \quad \chi_m < 0 : \text{反磁性体}, \quad \mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} : \text{比透磁率}$$

[4] 静磁場の性質

(a) 磁束密度に関するガウスの法則

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{真磁荷が存在しない} \rightarrow \text{磁束線の連続性}) \quad (1.31)$$

$$(\text{div } \mathbf{B} = 0)$$

(b) 磁界の強さに関するアンペールの法則

磁化 \mathbf{M} と磁化電流密度 \mathbf{j}_m との関係を $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ として

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n I_k, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{j} : \text{電流密度} \quad (1.32)$$

$$(\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j})$$

3 電磁誘導の法則

[1] ファラデーの電磁誘導の法則

$$\phi_{emf} = -\frac{d\Phi_M(t)}{dt}, \quad \phi_{emf} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} \quad (1.33)$$

ϕ_{emf} : 誘導起電力, $\Phi_M(t)$: 磁束, \mathbf{E}_{ind} : 誘導電界

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.34)$$

[2] コイル

$$\Phi_M(t) = LI(t), \quad \phi_{emf} = -L \frac{dI}{dt} \quad (1.35)$$

L : 自己インダクタンス, 自己誘導係数 (ヘンリー)

$$\Phi_{21}(t) = L_{21} I_1(t), \quad \phi_{21} = -L_{21} \frac{dI_1}{dt} \quad (1.36)$$

L_{21} : 相互インダクタンス, 相互誘導係数 (ヘンリー)

4 変位電流 (電束電流)

磁界の強さに関するアンペールの法則の電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ に $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$: 変位電流密度 を考慮して,
 マックスウエル・アンペールの法則

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.37)$$

5 Maxwell の方程式, 微分形 (と積分形)

[1] 電界に関するガウスの法則

$$\operatorname{div} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad \left(\int_{\Sigma} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dv \right) \quad (1.38)$$

[2] 磁場に関するガウスの法則

$$\operatorname{div} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad \left(\int_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \right) \quad (1.39)$$

[3] マックスウエル・アンペールの法則

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \left(\oint_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\} \cdot \mathbf{n} dS \right) \quad (1.40)$$

[4] ファラデーの電磁誘導の法則

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad \left(\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \right) \quad (1.41)$$

6 電磁波

[1] ポインティングベクトル

$$\frac{dU}{dt} = -\int \sigma \mathbf{E}^2 dv - \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.42)$$

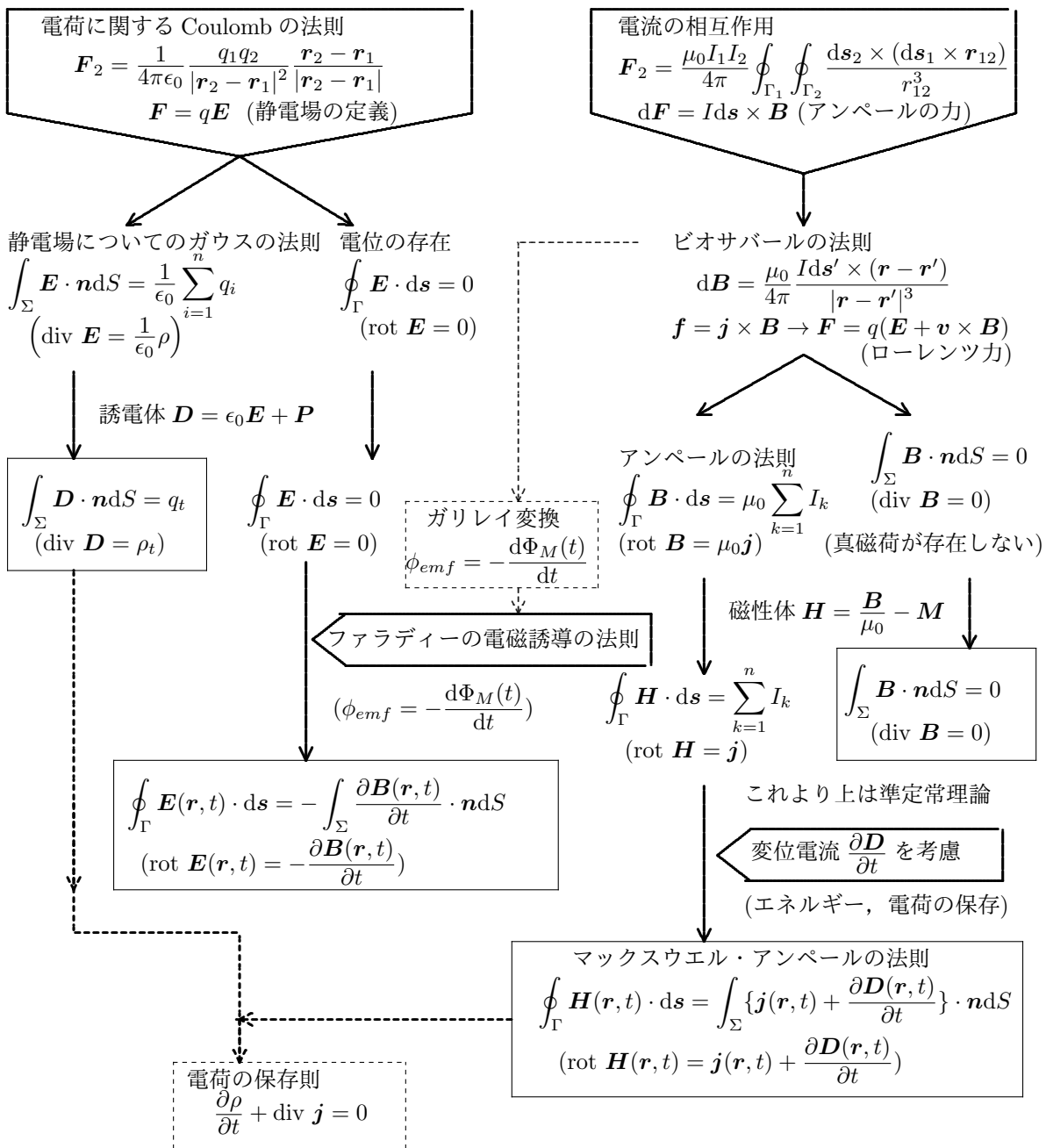
$$U = \frac{1}{2} \int (\epsilon \mathbf{E}^2 + \mu \mathbf{H}^2) dv : \text{場のエネルギー}, \quad \mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} : \text{Pointing のベクトル}$$

[2] Maxwell の応力テンソル

$$T_{ik} = \epsilon E_i E_k - \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ik} + \mu H_i H_k - \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 \delta_{ik}, \quad f_i = \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j}, \quad \mathbf{f} : \text{体積力} \quad (1.43)$$

1.2 Maxwell 方程式への道しるべ

以下はこのメモの展開を示している。これは歴史的な展開と一致するものではなく、次章での「電磁気学の展開」で採用した Maxwell の方程式へのわかりやすい道筋を示したものである。



実験・観測事実、既に”確立”している物理学の基礎観念、数学的手法が、電磁気学の確立に如何に融合しているかを楽しんで下さい。論理の展開は、個別から一般ですが、具体的には以下の流れを含みます。

- a 遠隔作用説から近接作用説への流れ
- b 真空の電磁気学から誘電体, 磁性体の電磁気学への流れ
- c 定常から非定常への流れ

1.3 MKSA 単位系

物理量	よく使う記号	MKS(SI) 単位	等価な単位
長さ	l, x	1m	
質量	m	1kg	
時間	t	1s	
角度	θ	1(ラジアン)	
速度	v	1m/s	
加速度	a	1m/s ²	
力	f, F	1N(ニュートン)	=1kg·m/s ²
圧力	p	1Pa(パスカル)	=1N/m ²
エネルギー, 仕事 電力量	E, W Pt	1J(ジュール) 1eV(電子ボルト)	=1N·m =1W·s=1kg·m ² /s ² =1C·V(=0.2389cal) =1.602×10 ⁻¹⁹ J
仕事率, 電力	P	1W(ワット)	=1J/s=1V·A=1C·V/s
温度	T	1K(ケルビン)	
エントロピー	S	1J/K	=1kg·m ² /s ² ·K
物質量	n	1kmol	1N _A = 6.022 × 10 ²⁶ /kmol N _A : アボガドロ数

電磁気を含む単位

物理量	よく使う記号	MKSA(SI) 単位	等価な単位
電流	I	1A(アンペア)	=1C/s
電荷, 電束	q, Q, Φ	1C(クーロン)	=1A·s
電束密度, 電気分極	D, P	1C/m ²	=1A·s/m ²
電位, 電圧	ϕ, V	1V(ボルト)	=1N·m/C=1J/C=1Wb/s
電界の強さ	E	1V/m	=1N/C=1Wb/m·s
電気双極子モーメント	p	1C·m	=1A·m·s
電気容量	C	1F(ファラッド)	=1C/V=1J/V ² =1C ² /J
誘電率	ϵ	1F/m	=1C ² /N·m ² =1C/V·m
電気感受率	χ_e		=1F/m=1C/V·m
電気抵抗, インピーダンス	R, Z	1Ω(オーム)	=1V/A=1J/C·A=1W/A ²
磁束密度	B	1T(テスラ)	=1Wb/m ² =1N/A·m=1N·s/C·m =1kg/A·s ² (= 10 ⁴ ガウス)
磁束	Φ_m	1Wb(ウエーバー)	=1N·m/A=1V·s=1kg·m ² /A·s ²
磁荷	q_m		=1A·m=1N·m ² /Wb
磁気モーメント	m	1A·m ²	=1N·m ³ /Wb
磁界の強さ, 磁化	H, M	1A/m	=1N/Wb
磁位	ϕ_m	1A	
自己(相互)インダクタンス	L, M	1H(ヘンリー)	=1Wb/A=1V·s/A=1Ω·s=1J/A ²
透磁率	μ	1H/m=1Wb/A·m	=1N/A ² =1kg·m/A ² ·s ²

1.4 物理定数表

よく使う物理定数の一覧です。

物理量	よく使う記号	MKSA(SI) 単位系による値
素電荷	e	$1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$
電子ボルト	eV	$1.60217733 \times 10^{-19} \text{J}$
真空中の光速	c	$2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}$
プランクの定数	h	$6.626075 \times 10^{-34} \text{Js}$
	$\hbar = h/2\pi$	$1.05457266 \times 10^{-34} \text{Js}$
アボガドロ数	N_A	$6.0221367 \times 10^{26} \text{kmol}^{-1}$
気体定数	R	$8.314510 \times 10^3 \text{J/Kkmol}$
ボルツマン定数	$k = R/N_A$	$1.380658 \times 10^{-23} \text{J/K}$
原子質量単位	u	$1.6605402 \times 10^{-27} \text{kg}$
真空の透磁率	μ_0	$4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$
真空の誘電率	$\epsilon_0 = 1/\mu_0 c^2$	$8.854187817 \times 10^{-12} \text{C}^2/\text{Nm}^2$
	$1/4\pi\epsilon_0$	$8.9876 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$
電子の質量	m_e	$9.1093897 \times 10^{-31} \text{kg}$
陽子の質量	m_p	$1.672623 \times 10^{-27} \text{kg}$
中性子の質量	m_n	$1.6749286 \times 10^{-27} \text{kg}$
万有引力定数	G	$6.67259 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2$

(光速は c を用いるが, 混乱が予想されるときのみ, 真空の光速は c_0 を用いる。)

第2章 電磁気学の展開

2.1 クーロンの法則と静電場の性質

点電荷に関する Coulomb の法則

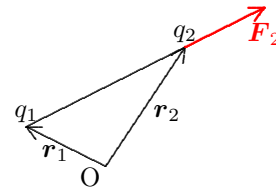
F_2 : q_2 が q_1 から受ける力について

$$F_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$$

ϵ_0 : 真空の誘電率

は高い精度で確立され、我々の出発点としてふさわしい。



はじめだから、ちょっとだけ考察を加えておこう。

クーロン力は2体力，中心力であること

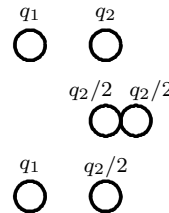
ある一対の電荷の間の力が，他の第3の電荷の存在によって影響されない。どうもそのようだ。そうでなければ，話は非常に複雑になる。ただし，帯電した2つの物体が及ぼし合う力は，第3の帯電した物体の出現によって，変化することが多い。それは，第3の物体の電荷が2つの物体の電荷分布に影響を与え，2つの物体の電荷分布を変化させ，相互の力を変化させたと考えられる。これは2体力か3体力かという問題とは別のことである。

中心力であることは $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ で示されている。この力は，力が，またそれから定義される静電場がベクトル量であることを示している。物理学でいうベクトルとは，ベクトル空間の公理(3章参照)を満たすだけでなく，変位ベクトルと同じ座標の変換性(ガリレイ変換，ローレンツ変換など)を持っていることを指す。中心力で，その大きさが距離のみに依存する力は保存力である。

クーロンによる $q_1 q_2$ に比例すること

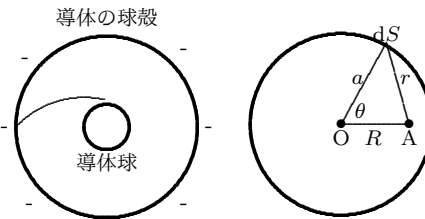
q_1 と q_2 でのクーロン力を計測し，さらに q_2 と全く同じ帯電していない導体球を接触させて， $q_2/2$ だけ帯電した導体球をつくり， q_1 と $q_2/2$ で計測してちょうど半分の力を得た。こうした考察を重ねクーロン力は $q_1 q_2$ に比例することを予測した。

Charles Augustin Coulomb(1736-1806)



距離の逆二乗に比例すること

キャベンディッシュ(1773)は，導体球殻を帯電させ，中心に帯電させていない導体球を入れておいて，導線で導体球殻と内部の導体球を結んだとき，常に導体球は帯電しないことを見いだした。Henry Cavendish(1731-1810)



右図のように，外球の半径を a ，外球に与えられた全電荷を Q とすると，外球上の電荷密度は $Q/4\pi a^2$ 。外球の微小面積 dS 上の単位電荷が図の球内の A 点につくるポテンシャル $\Phi(R)$ は $\Phi(R) = (Q/4\pi a^2) \int_S \phi(r) dS = (Q/4\pi a^2) 2\pi \int_0^\pi \phi(r) a^2 \sin \theta d\theta$

で与えられる。 $r^2 = a^2 + R^2 - 2aR \cos \theta$ ， $r dr = aR \sin \theta d\theta$ の関係を利用して，変数を θ から r にかえると， $\Phi(R) = (Q/2aR) \int_{a-R}^{a+R} \phi(r) r dr$ となる。ここで， $r\phi(r) = dK(r)/dr$ とおくと，

$\Phi(R) = (Q/2aR)[K(a+R) - K(a-R)]$ である。内部の導体球が帯電しないことから，内部では中心方向の電界は $E(R) = 0$ ，つまり， $\Phi(R) = k = (\text{一定値})$ である。したがって， $2aRk = Q[K(a+R) - K(a-R)]$ 。これを R で2回微分すると，

$$\frac{d^2 K(a+R)}{d^2 R} = \frac{d^2 K(a-R)}{d^2 R} \text{ となる。ここで } a \text{ と } R \text{ は任意であるから，} \frac{d^2 K}{d^2 R} = A = (\text{一定値}) \text{ である。}$$

これを積分すれば， $dK(r)/dr = Ar + B = r\phi(r)$ となる。これから， $\phi(r) = A + B/r$ の形であることがわかる。

$F(r) \propto -d\phi(r)/dr$ にこれを代入すると， $F(r) \propto B/r^2$ をうる。(砂川重信「電磁気学演習」参照)

クーロン(1785)はねじり天秤を用いて詳細にクーロン力を計測した。

$$F(r) = \frac{k}{r^{2+\delta}} \text{ と表すと}$$

ヘンリー・キャベンディッシュ(1773)

$$|\delta| < \frac{1}{50}$$

マックスウェル(キャベンディッシュ研究所の初代所長)

$$|\delta| < \frac{1}{21600}$$

Plimpton, Lawton (1936)

$$|\delta| < 2 \times 10^{-9}$$

Bartlett, Goldhagen, Phillips (1970)

$$|\delta| < 1.3 \times 10^{-14}$$

実験結果であること

全ては経験と実験に基づくものであり、精度の問題だけでなく、確かめられた適用範囲においてのみ信憑性がある。

1C はどんな量か

1m 離れた 2 つの 1C の電荷が及ぼし合うクーロン力は $8.9876 \times 10^9 \text{N}$ となり、1C はとてつもない大きな電荷量になっている。1 C は 1Coulomb で、1A(アンペア)の電流が 1秒間に流れた電荷の量を表す。後で、1A は電流の相互作用を用いて定義する。

演習

The electron and proton of a hydrogen atom are separated (on the average) by a distance of approximately $5.3 \times 10^{-11} \text{m}$. Find the magnitudes of the electric force and the gravitational force between the two particles.

$$G = 6.7 \times 10^{-11} \text{Nm}^2/\text{kg}^2, m_e = 9.11 \times 10^{-31} \text{kg}, m_p = 1.67 \times 10^{-27} \text{kg}$$

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{|e|^2}{r^2} = 8.99 \times 10^9 \frac{\text{Nm}^2}{\text{C}^2} \frac{(1.60 \times 10^{-19} \text{C})^2}{(5.3 \times 10^{-11} \text{m})^2} = 8.2 \times 10^{-8} \text{N}$$

$$F_g = G \frac{m_e m_p}{r^2} = (6.7 \times 10^{-11} \frac{\text{Nm}^2}{\text{kg}^2}) \times \frac{(9.11 \times 10^{-31} \text{kg})(1.67 \times 10^{-27} \text{kg})}{(5.3 \times 10^{-11} \text{m})^2} = 3.6 \times 10^{-47} \text{N}$$

これは、当面、水素原子を議論するときには、万有引力を無視しても良い、ということの意味する。

参考

岩波現代文庫「物理法則はいかに発見されたか」 R.P. ファインマン 江沢洋訳
には、逆二乗則にしたがう万有引力とクーロン力の違いについての一般大衆向けの話がある。さらにこの本には、このメモでは触れていない電磁誘導における角運動量の保存則、など面白い話題が満載されている。全ての理系の学生にとって、これは必読書である。このメモでは、「理解を助けるため」、できるだけ論理展開に関心を集中し、以下では、こうした話題のほとんどを割愛する。

n 個の点電荷 ($q_i(\mathbf{r}_i), i = 1, 2, \dots, n$) から点 \mathbf{r} にある電荷 q が受ける力 \mathbf{F} は、各電荷からの力の重ね合わせを仮定すると

$$\mathbf{F} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \sum_{i=1}^n q_i \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \quad (2.2)$$

となる。これを電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ の電荷分布で表現すると

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (2.3)$$

となる。点 \mathbf{r} にある単位電荷に対するクーロン力を電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ と定義する。電界を電界の強さ、電場などとも言う。電荷 q に対するクーロン力は $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = q\mathbf{E}(\mathbf{r})$ となる。このとき電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ は

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (2.4)$$

となる。静電場はベクトル空間の公理（ベクトル解析の 3.1 節を参照）を満たしている。これが静電場の 2 つの性質

$$\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv, \quad \text{即ち} \quad \text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (\text{静電場についてのガウスの法則}) \quad (2.5)$$

および

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \text{即ち} \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2.6)$$

と等価であることが以下のようにしてわかる。

電磁気学の基本法則は (2.5), (2.6) のように積分形で表したり、微分形で表したりする。大学の 1 年次の学生諸君にはベクトル解析は学習途上であり、2 つの表現の同一性がわかりにくいと思われるが、話を簡潔にするため、付録のベクトル解析の結果だけは知っているとして展開する。

(2.5) については、 $\oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$ にガウスの定理 $\int_V \text{div } \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS$ (3.58) を適用して、 $\int_V \text{div } \mathbf{E} dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv$ となり、 V は任意ということで $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ となる。(2.6) についても、ストークスの定理 (3.62) によって 2 つは同一であることがわかる。

まず、閉曲面 Σ に囲まれた領域 V について、クーロンの法則 (2.4) を直接代入することによって

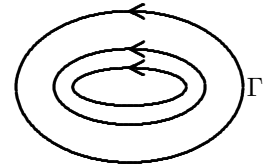
$$\begin{aligned} \oint_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \oint_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \int \nabla \frac{-\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \cdot \mathbf{n} dv' dS = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int -\rho(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' dv \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int -\rho(\mathbf{r}') (-4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')) dv' dv = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho(\mathbf{r}) dv \end{aligned}$$

となる。ここでガウスの定理 (3.58) および $\nabla^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r})$ (3.67) を用いた。 v' による積分は全空間にわたる積分、 v, S による積分は領域 V および境界面 Σ での積分であり、右辺は領域内の電荷分布のみによって決まることを意味している。また閉曲線 Γ に囲まれた曲面 Σ について、

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Sigma} \text{rot } \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} \text{rot} \left\{ \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \right\} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \left\{ \int \rho(\mathbf{r}') \text{rot} \nabla \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \right\} \cdot \mathbf{n} dS = 0\end{aligned}$$

ここで Stokes の定理 (3.62) および任意のスカラ関数 ϕ にたいして $\text{rot grad } \phi = 0$ であることを用いた。

逆の議論をしよう。静電場の 2 つ目の性質 $\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ から始める。これは、たとえば、右図のような静電場が存在しないことを主張している。もし存在しているとすると、微小電荷を任意の電気力線 Γ に沿って一周すると仕事は 0 とはならない。すなわち、微小電荷 q に対して、 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ で、電気力線に沿って積分すると $\mathbf{E} // d\mathbf{s}$ で $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} > 0$ だから、 $\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = q \oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ となるからである。 $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ である場 \mathbf{E} を「渦なし」という。

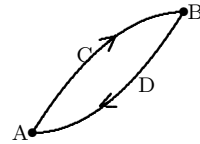


$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ とする。一周の閉積分路 Γ を A-C-B-D-A とすると、

$$\begin{aligned}\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{A-C-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} + \int_{B-D-A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0 \\ \int_{A-C-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= - \int_{B-D-A} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}\end{aligned}$$

したがって

$$\int_{A-C-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_{A-D-B} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$$

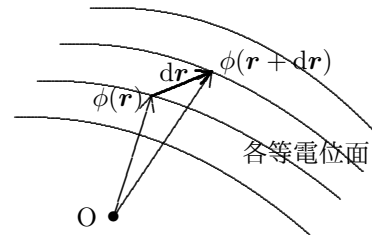


任意の 2 点 A, B 間の積分 $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ は途中の積分路によらず決まり、積分

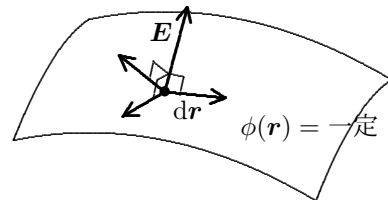
$$\phi(\mathbf{r}) = - \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.7)$$

は位置 \mathbf{r} のみの関数である。 $\int_A^B \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ は単位電荷を A から B まで移動させるときの電場のする仕事である。したがって $\phi(\mathbf{r})$ は単位電荷を無限の遠方から \mathbf{r} まで電場に逆らって移動させたときの (外力が系にした) 仕事であり、静電ポテンシャル (電位、単位は $V(\text{ボルト}) = J/C$) という。

$$\begin{aligned}d\phi(\mathbf{r}) &= \frac{\partial\phi}{\partial x} dx + \frac{\partial\phi}{\partial y} dy + \frac{\partial\phi}{\partial z} dz = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} \\ d\phi(\mathbf{r}) &= \phi(\mathbf{r} + d\mathbf{r}) - \phi(\mathbf{r}) \\ &= \left(- \int_{\infty}^{\mathbf{r} + d\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right) - \left(- \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} \right) \\ &= - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + d\mathbf{r}} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}\end{aligned}$$



等電位面 ($d\phi(\mathbf{r}) = 0$ なる曲面) では、 $d\mathbf{r}$ を面内の微小変位とすると、 $\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r} = 0$ 、則ち電界 \mathbf{E} は等電位面に垂直である。さらに電界 \mathbf{E} は電位が減少する方向に向いている。



また上式では $d\mathbf{r}$ は任意だから

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = -\text{grad } \phi \quad (2.8)$$

静電場の 1 つ目の性質 $\text{div } \mathbf{E} = \frac{1}{\epsilon_0} \rho$ を適用すると

$$\nabla^2 \phi = -\frac{1}{\epsilon_0} \rho \quad (2.9)$$

即ち、静電ポテンシャル ϕ はポアソンの方程式を満たすことがわかる。

$$\text{一般に } \begin{cases} \nabla^2 \phi = 0 & (\text{ラプラスの方程式}) \\ \nabla^2 \phi = g(\mathbf{r}) & (\text{ポアソンの方程式}) \end{cases} \text{である。}$$

(3.79) より無限の遠方で 0 となる解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV' \quad (2.10)$$

となる (3.5 節参照)。これより得られる電界 $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ はクーロンの法則 (2.4) そのものである。

多くのテキストでは、クーロンの法則から静電場のガウスの法則を導くのに、電荷 q の位置から見た場の点を \mathbf{r} とし、電場 $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ について立体角を用いて $\int_{\Sigma} \mathbf{E}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{n} dS = q/\epsilon_0$ を証明し、続いて「重ね合わせの原理」によってこれを一般に拡張する。これは単に電荷の位置を平行移動して重ね合わせたに過ぎないのだが、直感的に納得しにくいときは以下のように電荷 (源, source) の位置 \mathbf{r}' と場の位置 \mathbf{r} を陽に表しその手続きを実行すれば自明であることがわかる。電荷の位置を原点ではなく \mathbf{r}' とし、 \mathbf{r} における電界を $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ とすると

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}, \quad \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

となるが、被積分関数は微小面積 dS の点 \mathbf{r}' から見た立体角 (3.4 節参照) だから

$$\int_{\Sigma} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = 4\pi \quad \text{が成り立ち、} \quad \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = q/\epsilon_0$$

となる。これを各電荷 $q(\mathbf{r}')$ について重ね合わせたものがガウスの法則となる。すなわち、

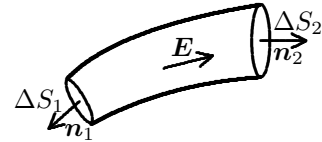
$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\Sigma} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') \int_{\Sigma} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{n} dS}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dV' = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \rho(\mathbf{r}') 4\pi dV' = \frac{q}{\epsilon_0} \end{aligned}$$

$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0$ を導くときも同様で、まず電荷 q の位置 \mathbf{r}' と場の位置 \mathbf{r} を陽に表し、 $d\mathbf{s} = d\mathbf{r} = d(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ 、 $(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot d\mathbf{s}/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = d|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ (一般に $\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr$) を用いて証明し、これを重ね合わせればよい。

静電場の表現として、電界に比例した密度 で接線の方向が電界の方向の曲線—電気力線、側面が電気力線で囲まれた管—電気力管がしばしば用いられる。

図のような電気力管の一部を切断し、切断面を ΔS_1 、 ΔS_2 、面の外向きの法線ベクトルをそれぞれ \mathbf{n}_1 、 \mathbf{n}_2 とする。

管の側面での面の法線は電場 \mathbf{E} に垂直である。従って、管内に電荷がない ($\text{div } \mathbf{E} = 0$) とすると、ガウスの法則より、 $\mathbf{E}_1 \cdot \mathbf{n}_1 \Delta S_1 + \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2 = 0$ となる。すなわち、 $\mathbf{E}_1 \cdot (-\mathbf{n}_1) \Delta S_1 = \mathbf{E}_2 \cdot \mathbf{n}_2 \Delta S_2$ 。これは、 ΔS_1 面に入ってくる電気力線の数と ΔS_2 面を出ていく電気力線の数が等しいことを意味する。これが電気力線の連続性である。電気力線の連続性は $\text{div } \mathbf{E} = 0$ が保証している。



具体的な静電場、電気力線などは当メモの JAVA アプレットを参照して下さい。

以上によって、クーロンの法則 (2.2) と静電場の性質 (2.3), (2.4) が等価であることが証明できた。クーロンの法則を静電場 (静止した電荷分布による定常な電場) の性質として書き換えることは、応用上の利便性だけでなく場の考えの展開の出発点として重要である。

2.2 導体と静電場、静電場のエネルギー

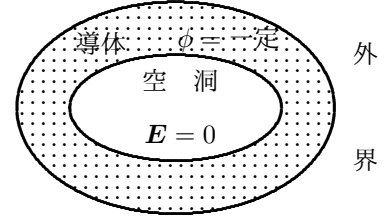
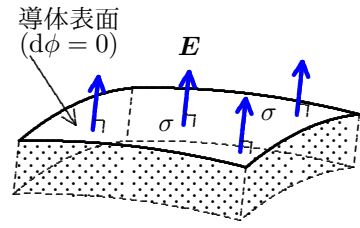
はじめに、電極を構成する導体について考える。金属のように電気をよく通す物体を導体、電気を通さない物体を不導体 (絶縁体) という。導体の平衡状態では、導体内部の静電場は 0 である。なぜなら導体では伝導電子 (自由電子) やイオンが無数にあり、電界 \mathbf{E} が 0 でない間は電荷が移動を続けるからである。(一般に金属中の電子、半導体中の電子と正孔、イオン導体中のイオンなど電荷を担って移動するものをキャリアという)。言い換えれば、平衡状態では、1つの導体の電位はどこでも同じである。導体を電界内におくと、導体内部の電位が同じになるまで伝導電子やイオンが移動し、導体表面は正、負に帯電する。これを静電誘導という。また、 $\text{div } \mathbf{E} = \rho/\epsilon_0$ より、導体内部では電荷密度は 0 となる ($\rho = 0$)。導体表面は 1つの等電位面 ($d\phi = 0$) をなし、したがって導体表面での電界は面に垂直になる。

導体の表面電荷密度を σ とすると、導体表面の微小面積を囲む扁平な円盤に対してガウスの法則を適用して、導体の直ぐ外側での電界は

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \quad (2.11)$$

となることがわかる。

また導体で囲まれた空洞の内部では、内部に電荷がない限り電界は 0 である。なぜなら、導体境界は同じ電位であり、空洞内に導体の電位より少しでも高い電位のところがあつたとすると、周りより電位が高い点があつて必ず存在し、その点を囲む微小な閉曲面 Σ について、曲面上では $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n}$ は正となり、ガウスの法則 $\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} q > 0$ より空洞内に電荷があることになる。低い電位のところがあつた場合も同様であり、結局空洞内の電位は導体境界の電位と同じとなる。



空洞内では、(2.9) で $\nabla^2 \phi = 0$ 、すなわちラプラスの方程式が成り立つ。連続な解 ϕ は境界で最大値、最小値をとり (最大値の原理、3章参照)、導体からなる境界では電位が一定だから、内部でも同じ電位となる。これは、ラプラス方程式の解 (調和関数という) の基本性質であり、一般に静電場を解くとはラプラスあるいはポアソンの方程式 (2.9) を解くことと同じ事になっている。

また空洞内に電荷があれば、その電荷分布に応じて内部に電場が発生する。しかし、内部の電場は導体外部の影響は全くなく、内部の電荷分布や空洞の形状のみによって決まることになる。これらのことは **静電遮蔽** と言われる。

n 個の点電荷 ($q_i(\mathbf{r}_i), i = 1, 2, \dots, n$) が分布しているときのポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_{(i,j)} \frac{q_i q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i(\mathbf{r}_i), \quad \phi_i(\mathbf{r}_i) = \sum_{j(\neq i)} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \quad (2.12)$$

となる。 $\sum_{(i,j)}$ は点電荷のすべての組み合わせである。また $\phi_i(\mathbf{r}_i)$ は電荷 q_i 以外の電荷の作る点 \mathbf{r}_i におけるポテンシャルである。

議論を連続体に拡張するためには、クーロンの法則を少し注意して扱う必要がある。当初、電荷 q が電場 \mathbf{E} を乱さない程度に微小な電荷として、 $\mathbf{F} = q\mathbf{E}$ を導入した。

電荷密度 $\rho_1(\mathbf{r})$ の帯電体 1 と電荷密度 $\rho_2(\mathbf{r})$ の帯電体 2 を考え、帯電体 2 が帯電体 1 がつくる静電場 $\mathbf{E}_1(\mathbf{r})$ から受けるクーロン力は、 $\rho_1(\mathbf{r}), \rho_2(\mathbf{r})$ が 0 でない領域を含む領域 V にわたる積分で表すことができる。

$$\mathbf{F} = \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) dv \quad (2.13)$$

領域 V における電場は、 $\rho_1(\mathbf{r})$ による電場 \mathbf{E}_1 と $\rho_2(\mathbf{r})$ による電場 $\mathbf{E}_2(\mathbf{r})$ の和である。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}_1(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_2(\mathbf{r})$$

したがって、式 (2.13) は本来

$$\mathbf{F} = \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}(\mathbf{r}) dv \quad (2.14)$$

とすべきであつたと考えられる。ところが、(2.13) と (2.14) は静電場に関する限り全く同じとなる。なぜなら、(2.13) と (2.14) の差の力 (自己力というそうだ) を \mathbf{F}_s とすると、

$$\mathbf{F}_s = \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \mathbf{E}_2(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \rho_2(\mathbf{r}) \left\{ \int_V \rho_2(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \right\} dv$$

となるが、記号 \mathbf{r} と \mathbf{r}' を入れ替えると、 $\mathbf{F}_s = -\mathbf{F}_s$ が得られ、 $\mathbf{F}_s = 0$ となるからである。すなわち、帯電体 2 による電場は全体として帯電体 2 に力を加えたことにならない。これは作用反作用の法則と矛盾しない。従って、静電場のみを考えている間は (2.13) と (2.14) は同等である。

電荷が電荷密度 $\rho(\mathbf{r})$ で連続的に分布しているとすると (2.12) は

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dv \quad (2.15)$$

となる。ここで $\text{div } \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$, $\mathbf{E} = -\text{grad } \phi$ を代入すると

$$U = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \phi \text{div } \mathbf{E} dv = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \{\text{div}(\phi \mathbf{E}) - \text{grad } \phi \cdot \mathbf{E}\} dv = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \phi \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS + \frac{1}{2}\epsilon_0 \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{E} dv$$

十分遠方では ϕ は r , \mathbf{E} は r^2 にそれぞれ反比例, 表面積は r^2 に比例し, 面積分の項は積分を十分広くとることによって 0 とすることができる。したがって

$$U = \frac{1}{2} \int \epsilon_0 \mathbf{E}^2 dv \quad (2.16)$$

となる。任意の電荷分布, すなわち任意の静電場に対して (2.16) が成り立つから, 静電場のエネルギーは, 場のエネルギー密度 w

$$w = \frac{1}{2}\epsilon_0 \mathbf{E}^2 \quad (2.17)$$

を用いて表すことができる。(2.17) をそのまま離散電荷の場合 (2.12) に適用すると困難が現れる。ただ 1 つの点電荷の場合でも,

$$\frac{1}{2} \int \epsilon_0 \mathbf{E}^2 dv = \frac{1}{2} \int \frac{q^2}{(4\pi)^2 \epsilon_0 r^4} 4\pi r^2 dr = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \int \frac{q^2}{r^2} dr \rightarrow \infty, \quad r \rightarrow 0$$

となり, 無限の自己エネルギーを持つことになるからである。

同様に n 個の導体が決まった配置で分布しているとき全ポテンシャルエネルギーは

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n)$$

と書けるはずである。導体の形状や配置が変われば U は変わる。いまこれらを一定として, 導体 i に微小電荷 dq_i を無限の遠方から移動させたとすると, このときの仕事は $\frac{\partial U}{\partial q_i} dq_i$ となるから導体 i の電位 ϕ_i は

$\phi_i = \frac{\partial U}{\partial q_i}$ となる。この電位 ϕ_i は

$$\phi_i = \frac{\partial U}{\partial q_i} = \sum_j D_{ij} q_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.18)$$

と表せる。なぜなら, 導体 j にだけ電荷 q_j を与えたとすると, 各導体の電位 $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_n$ は電荷 q_j に比例する。すなわち $\phi_i = D_{ij} q_j$ ($i = 1, 2, \dots, n$) となる。ところが各導体にそれぞれ q_j ($j = 1, 2, \dots, n$) を与えると, それぞれについて $\phi_i = D_{ij} q_j$ が成立し, それれらを重ね合わせたものについても成り立つからである。重ね合わせの原理が成り立つのは, 各導体 j だけに q_j に電荷を与えていたとき, 系は平衡状態となり, 各導体 i の内部の電界は 0 となるが, それらを単純に加えあわせた場合の電場も全ての導体 i の内部の電界は 0 となり, これが平衡状態であることが分かる。(2.18) を積分して

$$U = U(q_1, q_2, \dots, q_n) = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{ij} q_i q_j \quad (2.19)$$

U の $q_i q_j$ の係数 D_{ij} は $q_j q_i$ の係数 D_{ji} と同じ ($D_{ij} = D_{ji}$) であるはずである。(2.18) を q_i , ($i = 1, 2, \dots, n$) について解いて

$$q_i = \sum_j C_{ij} \phi_j, \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.20)$$

としたとき, C_{ij} を容量係数 (単位はファラッド: $F=C/V$) という。このときポテンシャルエネルギーは

$$U = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j D_{ij} q_i q_j = \frac{1}{2} \sum_i \sum_j C_{ij} \phi_i \phi_j = \frac{1}{2} \sum_i q_i \phi_i \quad (2.21)$$

となる。簡単な例として, 内側の球殻の半径 r_1 , 外側の球殻の半径 r_2 の導体からなる同心球殻を考える。それぞれの電荷を q_1, q_2 , 電位を ϕ_1, ϕ_2 とすると

$$\phi_1 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_1} + \frac{q_2}{r_2} \right), \quad \phi_2 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{q_1}{r_2} + \frac{q_2}{r_2} \right)$$

となる。これを逆に解くと

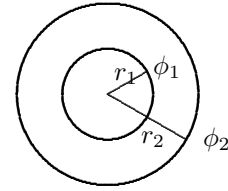
$$q_1 = 4\pi\epsilon_0 \left(\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \phi_1 - \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \phi_2 \right)$$

$$q_2 = 4\pi\epsilon_0 \left(-\frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1} \phi_1 + \frac{r_2^2}{r_2 - r_1} \phi_2 \right)$$

より

$$C_{11} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad C_{12} = C_{21} = -4\pi\epsilon_0 \frac{r_1 r_2}{r_2 - r_1}, \quad C_{22} = 4\pi\epsilon_0 \frac{r_2^2}{r_2 - r_1}$$

導体 i を接地 (アース) すると, $\phi_i = 0$ となる。



導体 i はそれ自身で容量 c_{ii} を持っているが, これらを組み合わせて大きな容量を持たせたものを蓄電器 (コンデンサー) という。2点間の電圧 V と電気量 q の間には $q = CV$ の関係がある。 C を蓄電器の容量という。導体の系について, 2個の導体を電極とし, 導体 1, 2 のみが $q_1 = +Q, q_2 = -Q$ に帯電しているとすると,

$$\phi_1 = D_{11}q_1 + D_{12}q_2, \quad \phi_2 = D_{21}q_1 + D_{22}q_2$$

となり, 2つの導体の電位差 (電圧) は $V = \phi_1 - \phi_2 = (D_{11} + D_{22} - 2D_{12})q$ であり, 電気容量は $C = 1/(D_{11} + D_{22} - 2D_{12})$ となる。

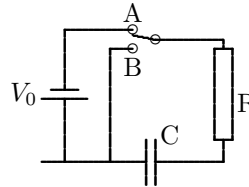
コンデンサーの両端にかかる電圧を V , 容量を C としたとき, 帯電した導体の電荷 q を $q + dq$ にするためには, 負極から電荷 dq を正極に移動させればよい。このとき Vdq の仕事を要する。したがって電荷 Q を蓄えているコンデンサーの静電エネルギーは

$$W = \int_0^Q Vdq = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{Q^2}{2C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV \quad (2.22)$$

となる。

コンデンサーの静電エネルギーが $\frac{1}{2}CV^2$ であることは, つぎの例を考えるとよくわかる。

図において, はじめ $t = 0$ で A 側にスイッチをつないで, 容量 C のコンデンサー C に充電を始める。抵抗の大きさ R の抵抗 R は電池の内部抵抗を含むとして, コンデンサーに蓄えられる電気量 $Q(t)$ と電流 $I(t)$ をもとめよ。次に十分時間がたってから, スwitchをB側に倒したときのようなすを調べよ。コンデンサーに蓄えられていたエネルギーはどうなるか。



電池から流れ出る電流を I , コンデンサーの電気量を Q とすると $IR + \frac{Q}{C} = V_0$ だから $R \frac{dQ}{dt} = -\frac{1}{C}(Q - CV_0)$

$$\log |Q - CV_0| = -\frac{t}{RC} + c, \quad t = 0 \text{ で } Q = 0 \text{ より } Q = CV_0(1 - e^{-t/RC}), \quad I = \frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

十分時間がたつと, $Q = CV_0$

スイッチをBに倒すときをあらためて, $t = 0$ とする。 $IR = \frac{Q}{C}, \quad R \frac{dQ}{dt} = -\frac{Q}{C} \quad \log Q = -\frac{t}{RC} + c, \quad t = 0 \text{ で}$

$Q = CV_0$ より,

$$Q = CV_0 e^{-t/RC}, \quad I = -\frac{dQ}{dt} = \frac{V_0}{R} e^{-t/RC}$$

$$\text{を計算すると, } \int_0^\infty RI^2 dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2t/RC} dt = \frac{C}{2} V_0^2$$

Joule 熱は, $t = 0$ でコンデンサーに蓄えられていたエネルギー $\frac{1}{2}CV_0^2$ に等しい。

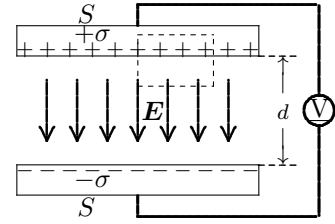
最も簡単な平行板コンデンサーを考える。導体でできた極板の面積を S , 極板間の距離を d とし, 十分に面積は広く極板の端の部分の議論は無視するとする。表面電荷密度を σ として, 図のような微小な破線で囲まれた板状の空間に対してガウスの法則を適用して式 (2.11), すなわち $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ が得られる。

さらに、極板間において、極板に平行で微小な板状の空間に対してガウスの法則を適用すると、極板間のどこでも $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ となる。したがって $V = Ed, Q = S\sigma$ より

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{S\epsilon_0}{d} \quad (2.23)$$

となる。静電エネルギーは $W = \frac{1}{2}QV = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \times Sd$ となる。

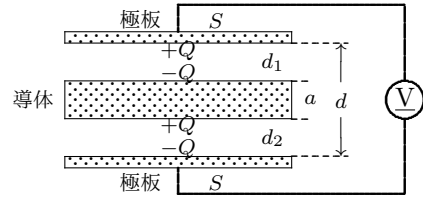
極板に面電荷密度 $\pm\sigma$ の電荷が帯電しているとき、 $dq (> 0)$ の電荷を負極板から正の極板に移動する仕事 dW は $dW = Vdq, V = Ed = \frac{\sigma}{\epsilon_0}d, q = S\sigma$ だから、 $dW = \frac{d}{\epsilon_0 S} qdq, W = \frac{d}{2\epsilon_0 S} q^2 = \frac{1}{2}qV, q = \frac{\epsilon_0 S}{d}V$ となり、 $q = CV, C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$ の関係が確認できる。



つぎに、 d だけ離れた極板の間に厚さ a の導体を挿入した平行板コンデンサーを考える。

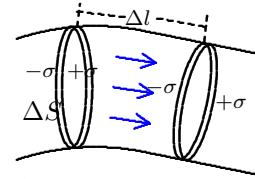
同様にガウスの法則を適用すると、挿入した導体板にはそれぞれ $+\sigma, -\sigma$ の表面電荷が帯電し、2つの真空部分は等しい電界 $E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$ を持つ。したがって

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{Q}{\frac{Q}{\epsilon_0 S}(d_1 + d_2)} = \frac{\epsilon_0 S}{d - a} \quad (2.24)$$



となる。 $a \rightarrow 0$ で導体の挿入の効果はなくなる。この考えを拡張すると、静電場の持つエネルギーが場の量 (2.17) で表されることが次のようにして納得できる。静電場を電気力線で囲まれた無数の電気力管に分割する。電気力管の断面積は電界に比例する。

電気力管を、力管に垂直な距離 Δl ずつ離れた無数のうすい極板で分割する。各極板は $E\Delta S = \text{一定}$ に応じて両面に $\pm\Delta q = \pm\sigma\Delta S = \pm\epsilon_0 E\Delta S = \text{一定}$ の電荷が分布し、真空部分では元の電界と同じ電界が再現される。



それぞれの真空部分の空間は微小コンデンサーとなっており、静電エネルギーは (2.23) より

$$\Delta W = \frac{1}{2}\Delta q\Delta V = \frac{1}{2}\Delta S \times \sigma \times E \times \Delta l = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2 \times \Delta S\Delta l$$

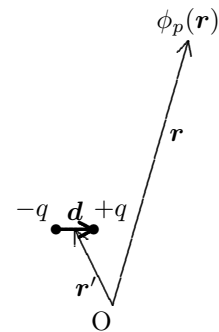
となる。これは全ポテンシャルエネルギーが (2.16) のように積分で表されるというだけでなく、局所的なエネルギー密度 $w = \frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ が real なものであることを強く印象づける。

2.3 誘電分極と電束密度

微小距離 d ($|d| \ll |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$) だけ離れた2つの電荷 $-q, +q$ を電気双極子といい、 $\mathbf{p} = q\mathbf{d}$ を双極子モーメントという。

電気双極子の2つの電荷の中心を \mathbf{r}' とすると、点P (\mathbf{r}) における静電ポテンシャル ϕ_p は

$$\begin{aligned} \phi_p(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left\{ \frac{-q}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' - \mathbf{d}/2)|} + \frac{+q}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + \mathbf{d}/2)|} \right\} \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} q\mathbf{d} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{p} \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \end{aligned} \quad (2.25)$$



ここで ∇ は点Pの座標 \mathbf{r} による演算である。右辺の $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ をあらためて \mathbf{r} とおくと

$$\mathbf{E}_p(\mathbf{r}) = -\text{grad } \phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r} - r^2\mathbf{p}}{r^5} \quad (2.26)$$

である。

電荷分布 $\rho(\mathbf{r})$ から離れた場所での静電場(電気双極子近似)

点 \mathbf{r}' の近傍 (V') での電荷分布 $\rho(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi})$ から十分離れた観測点 \mathbf{r} , ($|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}|$) での静電場を考える。観測点での静電ポテンシャルは

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r} - (\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi})|} dv_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi})}{\sqrt{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2 - 2(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{\xi}^2}} dv_{\boldsymbol{\xi}}$$

$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \gg |\boldsymbol{\xi}|$ より,

$$\begin{aligned} \phi(\mathbf{r}) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{V'} \frac{\rho(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \left(1 + \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \boldsymbol{\xi}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \right) dv_{\boldsymbol{\xi}} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \mathbf{p} \cdot \nabla \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \end{aligned}$$

ここで,

$Q = \int_{V'} \rho(\mathbf{r}') dv_{\boldsymbol{\xi}}$ (全電荷量), $\mathbf{p} = \int_{V'} \boldsymbol{\xi} \rho(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi}) dv_{\boldsymbol{\xi}}$ (\mathbf{r}' を中心とした電気双極子モーメント)

全電荷量が0 ($Q = 0$) の系では, \mathbf{p} は \mathbf{r}' に依存しない。特に,

単位双極子の場合は, $\rho(\mathbf{r}' + \boldsymbol{\xi}) = q\delta(\boldsymbol{\xi} - \frac{\mathbf{d}}{2}) - q\delta(\boldsymbol{\xi} + \frac{\mathbf{d}}{2})$ とおけるから,

$$Q = 0, \quad \mathbf{p} = q\mathbf{d} \quad \text{となる。}$$

電場は

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{r}) &= -\nabla\phi(\mathbf{r}) = -\frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \nabla \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \nabla((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p}) + (\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right) \\ &= \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{-\mathbf{p}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} + \frac{3((\mathbf{r} - \mathbf{r}') \cdot \mathbf{p})(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^5} \right) \end{aligned}$$

双極子を原点にもってくる ($\mathbf{r}' = 0$) と,

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r}}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left(-\frac{\mathbf{p}}{r^3} + \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p})\mathbf{r}}{r^5} \right)$$

となる。

領域 V に電気双極子が, 単位体積当たりの双極子モーメント \mathbf{P} で分布しているとすると静電ポテンシャルは (2.25) より

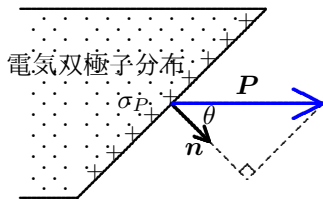
$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' \quad (2.27)$$

となる。' はいずれも電気双極子の位置 \mathbf{r}' に関する演算である。

(2.27) に $\text{div}' \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{div}' \mathbf{P}(\mathbf{r}') + \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right)$ およびガウスの定理を用いると

$$\phi_p(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{-\nabla' \mathbf{P}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (2.28)$$

となる。すなわち電気双極子の分布は静電ポテンシャルにたいして, (2.10) と比較することによって, 右辺第1項から体積密度 $\rho_p = -\nabla \mathbf{P}$ の電荷の分布をもたらし, 第2項から周囲の曲面 Σ に面積密度 $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ の電荷の分布をもたらしていることがわかる。



すなわち, 電気双極子が均一に分布していても, (2.28) の右辺第2項から電界を引き起こす原因としての表面電荷が現れる。

$$\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} \quad (2.29)$$

多くの物体は電界の中に入れると, 分子のレベルで電気的に中性であっても, 分子の構成要素の正電荷の部分 (原子核など) は電界の方向へ, 負の電荷の構成要素は電界と逆方向の力を受け電気双極子モーメントを生じる。一般に電界によってこうした双極子モーメントを発生することを誘電分極 (dielectric polarization), \mathbf{P} を電気分極 (electric polarization) という。絶縁体は誘電分極するという意味で誘電体 (dielectric) ともいわれる。したがって, 誘電体を電気双極子の分布と見なして, 電界の変化を調べてみる。

分極した誘電体をどのように分割しても外部に電荷を取り出すことができない。分極による電荷はクーロンの法則の源となったこれまでの電荷—真電荷—と少し違う。したがって, 誘電体を含む電場の扱いは新しい概念が必要となる。真電荷の分布密度 ρ_t に対する真空での電界 \mathbf{E}_t の取り扱いに変更しない。則ち $\text{div} \mathbf{E}_t = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_t$ とする。一方誘電分極による電界 \mathbf{E}_p は, 無限の遠方まで物質の組成の変化が滑らか

(微分可能)で、 $\mathbf{P}(\infty) \rightarrow 0$ とすると電気双極子による電界の式 (2.28) の右辺第 2 項は無視でき、分極電荷 $\rho_p = -\nabla \cdot \mathbf{P}$ のみによって引き起こされると考えられる、則ち $\text{div } \mathbf{E}_p = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_p$ となる。

このとき物質内での電界はこれらの和 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p$ となるから

$$\text{div } \mathbf{E} = \text{div } (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho_t - \frac{1}{\epsilon_0} \nabla \cdot \mathbf{P}$$

となる。ここで電束密度 (electric flux density) \mathbf{D} を

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} \quad (2.30)$$

と定義すると

$$\text{div } \mathbf{D} = \rho_t, \quad \text{積分形では } \int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS = q_t, \quad q_t : \text{真電荷} \quad (2.31)$$

となる。これが誘電体を含む空間で成り立つガウスの法則 (電束密度に関するガウスの法則) である。微分形では組成の滑らかな変化を仮定して導いたが、積分形では領域内に不連続な変化があってもそのまま適用できる。

\mathbf{E}_p に対する電位 $\phi(\mathbf{r})$ は (2.28) と表せるから、

$$\begin{aligned} \int_V \text{div } \mathbf{E}_p dv &= \int_V \text{div } (-\text{grad } \phi_p(\mathbf{r})) dv \\ &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{V'} (-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')) \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' dv - \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \int_{\Sigma'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' dv \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \int_{V'} (-\nabla' \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r}')) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' dv + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \int_{\Sigma'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS' dv \\ &= \frac{1}{\epsilon_0} \int_V (-\nabla \cdot \mathbf{P}(\mathbf{r})) dv + \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \int_{\Sigma'} \mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}' \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dS' dv = -\frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

$V \in V'$ でなければならず、 dS' の積分では $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ は 0 であるが、 $\mathbf{P}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'$ は分極による表面電荷で、電氣的に中性な誘電体が均一に分極しているとその和は 0 となり、いずれにしても表面積分 dS' の項は 0 である。一般には V' を無限に広くとり、 $\mathbf{P}(\infty) \rightarrow 0$ と考える。したがって

$$\int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \text{div } (\mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p) dv = \int_{\Sigma} \mathbf{E}_t \cdot \mathbf{n} dS + \int_V \text{div } \mathbf{E}_p dv = \frac{q_t}{\epsilon_0} - \frac{1}{\epsilon_0} \int_{\Sigma} \mathbf{P} \cdot \mathbf{n} dS$$

となり、積分形が得られる。

本来、電束 (electric flux) の考えは、電荷 q にたいして、電荷から電気力線にそって流れ出すある種の流体のようなものの流れを想定し、電束の総量が q となるように定義したものである。 q から立体角 $d\Omega$ の面積を貫く電束は $d\Phi = \frac{q}{4\pi} d\Omega$ であり、その点での電束密度は $D = \frac{d\Phi}{dS} = \frac{q}{4\pi r^2}$ となる。この考えは、電束の「実体」について以外は式 (2.31) と完全に合致している。誘電体の中の電界 \mathbf{E} や電束密度 \mathbf{D} は巨視的あるいは平均的な量と定義している。誘電体の中の電束は分子レベルでは複雑に変化しているが、分子を分断することのないように面を設定してそこを貫く電束を平均化したものとする。

誘電体は分極して、表面での分極電荷密度 σ_p をもつ。誘電体全体の電気双極子モーメントは $Sd \cdot \mathbf{P}$ となるが、これを 1 対の電気双極子と見ると $d \cdot S\sigma_p$ となり、 $\sigma_p = P$ が得られる。すなわち分極に垂直な面の表面電荷密度は分極に等しい。一般にはすでに (2.29) で見たように、 $\sigma_p = \mathbf{P} \cdot \mathbf{n}$ となる。

平行板コンデンサーにおいて、誘電体がないときの電界を E_0 としておくと、誘電体の中では分極による逆向きの電界 $\frac{\sigma_p}{\epsilon_0} = \frac{P}{\epsilon_0}$ が発生し電界の強さは $E = E_0 - \frac{P}{\epsilon_0}$ となる。こうして $D = \epsilon_0 E_0 = \epsilon_0 E + P$ で分極が表面に現れない表現になる。

電束密度は新しく導入する場の量であり、(2.31) はその定義に相当する。さらに電束密度と電界の関係 (2.30) は常に成り立つものである (定義) が、電気双極子との対応で、多くの場合等方性の誘電体を仮定すると次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{P} = \chi_e \epsilon_0 \mathbf{E}, \quad \chi_e : \text{電気感受率 (分極率)} \quad (2.32)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \epsilon = \epsilon_0 (1 + \chi_e) : \text{誘電率}, \quad \epsilon_r = \epsilon / \epsilon_0 : \text{比誘電率} \quad (2.33)$$

いくつかの誘電体の比誘電率

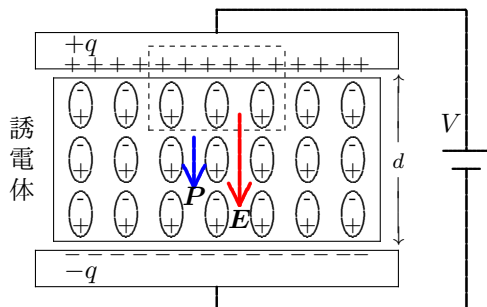
物質	ϵ_r	物質	ϵ_r
空気 (20 °C)	1.000536		
水蒸気 (110 °C)	1.0216	水蒸気 (140 °C)	1.00785
水 (25 °C)	78.54	エタノール (25 °C)	24.36
食塩 (25 °C)	5.9	炭素	5.5
ソーダガラス	5.5~8.5	磁器	5~7
ゴム	2.5~4.6	ポリエチレン	2.3~2.7
パラフィン	2.1~2.5	塩化ビニール	3.3~6.0
チタン酸バリウム	1150~3200		

誘電体内で、中心に電荷 q が、ある半径 r の球に対してガウスの法則を適用すると $D \cdot 4\pi r^2 = q$ したがって $D = \frac{q}{4\pi r^2}$ これより $E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{q}{r^2}$ となる。これが誘電体内のクーロンの法則である。

また真電荷密度 ρ_t に対する真空中での電界 \mathbf{E}_t および、誘電体の中での誘電分極による電界 \mathbf{E}_p はそれぞれ静電ポテンシャル (2.10), (2.28) から導かれ、それらの和である誘電体の中での電界 $\mathbf{E} = \mathbf{E}_t + \mathbf{E}_p$ は静電ポテンシャルを持つ。したがって

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad \text{すなわち} \quad \text{rot } \mathbf{E} = 0 \quad (2.34)$$

これは真空中で成り立つ静電場の性質 (2.6) が誘電体の中でも同様に成立することを示している。いま、2つ極板の間に誘電体を挟んだ平行板コンデンサーと極板間に何もはさまない平行板コンデンサーとを比較する。いま、どちらも極板には真電荷 $\pm q$ を帯電させたとする。図は誘電体をはさんだときのモデルである。



破線で囲まれた領域に電束密度に関するガウスの法則を適用すると

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D} \cdot n dS = D \Delta S = \sigma_t \Delta S$$

すなわち同じ電荷 q にたいして、誘電体を挿入したときも、元のままのときも同じ次式が成り立つ。

$$D = \sigma_t \quad (\sigma_t \text{ は導体表面の真電荷密度}) \quad (2.35)$$

誘電体をはさまなかったときの電界を E_0 、電圧を V_0 とする。それぞれのコンデンサーでは

$\epsilon E = \sigma_t$	$\epsilon_0 E_0 = \sigma_t$
$q = CV$	$q = C_0 V_0$
$V = Ed$	$V_0 = E_0 d$

したがって、

$$E = \frac{1}{\epsilon_r} E_0 \quad (2.36)$$

一般に、分極は電界にたいして同じ方向に起こると考えられ、したがって比誘電率は $\epsilon_r > 1$ が成り立つ。したがって、誘電体内では分極による電界によって電界が小さくなる。また $\frac{V_0}{V} = \frac{E_0}{E} = \frac{C}{C_0} = \epsilon_r$ だから、コンデンサーの容量

$$C = \epsilon_r C_0 \quad (2.37)$$

は真空のときより大きくなる。

ここで誘電体内でのエネルギー密度にふれておく。真空中では (2.17) となるが、これを誘電体に拡張した

$$w = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} \quad (2.38)$$

が予想される。誘電体内でも静電ポテンシャル ϕ をもち、電荷密度を ρ とすると、(2.15) より連続体の静電エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2} \int \rho \phi dv$$

となる (少し曖昧さがあるが、ここではふれない)。(2.31) を適用すると

$$U = \frac{1}{2} \int \phi \nabla \cdot \mathbf{D} dv = \frac{1}{2} \int \{ \nabla \cdot (\phi \mathbf{D}) - \nabla \phi \cdot \mathbf{D} \} dv$$

右辺第1項にガウスの定理を適用し、 $\mathbf{D}\phi$ が十分遠方で少なくとも $1/r$ の3乗で減少することから0と置くことができ、(2.38) が得られる。

いま2つの誘電体1, 2が接しているとする。

誘電体の境界では、面積 ΔS の境界面を両面から囲む十分小さい厚さ Δd の微小な直方体に対して、ガウスの法則 (2.31) を適用すると

$$D_1 \cdot n \Delta S + D_2 \cdot (-n) \Delta S = \sigma_t \Delta S, \quad n: \text{面の法線ベクトル}$$

が成立する。したがって、境界で真電荷がないとすると

$$D_1 \cdot n = D_2 \cdot n$$

すなわち

$$D_{1\perp} = D_{2\perp} \quad (D_{1\perp} = D_{2\perp}) \quad (D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2) \quad (2.39)$$

となる。(2.39) は境界で ΔS に入る電束線の数が出ていく電束線の数に等しい、すなわち電束線の連続性を意味する。

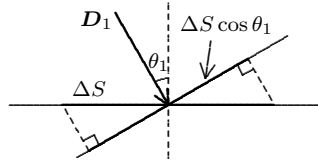
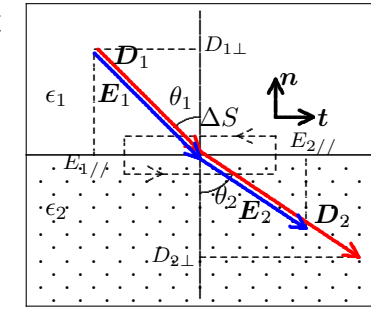
図のように、微小面積 S に角度 θ_1 で入射した電束線 D_1 の数は

$$D_1 S \cos \theta_1$$

同様に、微小面積 S を角度 θ_2 で出ていく電束線 D_2 の数は

$$D_2 S \cos \theta_2$$

であり、 $D_1 \cos \theta_1 = D_2 \cos \theta_2$ は、これらが等しいことを表している。



等方性の誘電体では E は D と平行であり、電界を含む面内の長方形の一周にわたって静電場の性質 (2.34) を適用して

$$E_1 \cdot (-t) + E_2 \cdot t = 0 \quad t: E \text{ を含む面内での境界面の任意の接線ベクトル}$$

したがって $E_1 \cdot t = E_2 \cdot t$, すなわち

$$E_{1//} = E_{2//} \quad (E_1 \sin \theta_1 = E_2 \sin \theta_2) \quad (2.40)$$

電気力線は境界で電束線のような連続性は保証されない。

また、(2.39), (2.40) および $D_1 = \epsilon_1 E_1, D_2 = \epsilon_2 E_2$ から電気力線 (電束線でもある) の屈折の法則

$$\frac{\tan \theta_1}{\tan \theta_2} = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \quad (2.41)$$

が得られる。 $\epsilon_1 < \epsilon_2$ のとき、 $\theta_1 < \theta_2$ となる。

2.4 電流に関する保存則

電流を真電荷の流れとして、その保存則を見ておこう。閉曲面 Σ で囲まれた領域 V について、電荷密度を ρ とする。任意の点での電流密度 j は電荷の流速を u とすると $j = \rho u$ である。

Σ 上の微小面積 ΔS を単位時間に通過する電荷量は

$$\rho u \cdot n \Delta S = j \cdot n \Delta S$$

n は領域から外向きの面に垂直な単位ベクトルとなる。

したがって単位時間に全表面を通して流出する電荷は $\int_{\Sigma} j \cdot n dS$ となる。これは領域 V の電荷総量の減少に等しいはずである。

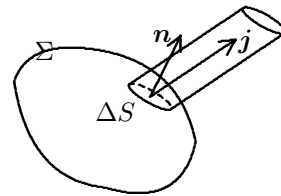
$$\int_{\Sigma} j \cdot n dS = -\frac{d}{dt} \int_V \rho dv$$

よって電荷の保存則は

$$\int_{\Sigma} j \cdot n dS + \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dv = 0 \quad (\text{微分形 } \frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } j = 0) \quad (2.42)$$

となる。

いま誘電体の分子レベルまでも表す位置を ξ , 電荷密度を $\rho(\xi, t)$ とすると、分極した分子の電気双極子



モーメント \mathbf{p} は、 $\mathbf{p} = \int \mathbf{P} dv = \int \rho \boldsymbol{\xi} dv$ だからその時間的変化は $\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} \boldsymbol{\xi} dv$ となる。(2.42) を適用して、さらに部分積分を行うと

$$\frac{\partial \mathbf{p}}{\partial t} = - \int \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \boldsymbol{\xi} dv = - \int \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\xi} dS + \int \rho \mathbf{u} dv$$

となる。

$$\begin{aligned} x \text{ 成分だけ考えて, } \left(- \int \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) \boldsymbol{\xi} dv \right)_x &= - \int \left\{ \frac{\partial}{\partial x} (\rho u_x) x + \frac{\partial}{\partial y} (\rho u_y) x + \frac{\partial}{\partial z} (\rho u_z) x \right\} dv \\ &= - \int \operatorname{div} (\rho x \mathbf{u}) dv + \int \rho u_x dv = \left(- \int \rho (\mathbf{u} \cdot \mathbf{n}) \boldsymbol{\xi} dS + \int \rho \mathbf{u} dv \right)_x \end{aligned}$$

右辺第1項は分子の電荷が存在しない領域まで広げておくと0となる。分極 \mathbf{P} はこれを単位体積当たり平均化したものだから

$$\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = \frac{\int \rho \mathbf{u} dv}{\int dv} = \overline{\rho \mathbf{u}} \quad (2.43)$$

とおける。すなわち分極の時間変化 $\frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t}$ は分子のレベルの電流の空間的に平均化した量を与えている。真電荷の移動による電流を \mathbf{j}_t とすると連続の式は

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div} \mathbf{j}_t + \operatorname{div} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial t} = 0$$

と拡張されるべきである。ミクロに見て $\operatorname{div} \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ のはずだから、これを代入し、 $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P}$ より

$$\operatorname{div} \left(\mathbf{j}_t + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \right) = 0 \quad (2.44)$$

となる。 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を変位電流（電束電流）密度という。

電流の連続性を得るためには、電流に $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を付加しておけばよい。

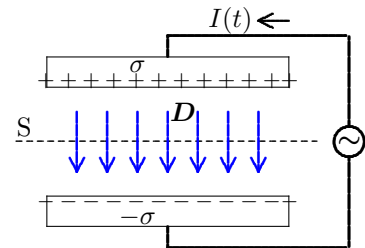
そのうち、 $\epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}$ を真空変位電流という。これは真空を真電荷が流れるのではないという意味でこれまでの電流とは違うが、真電荷が流れたと同じ「効果」を持つという意味で電流の考えの中に入れる。

例で見ておこう。平行板コンデンサーに交流の電圧をかけたとする。コンデンサーの電荷 $+q$ の増加が電流となるから、表面電荷密度を σ とすると

$$I(t) = \frac{dq}{dt} = S \frac{d\sigma}{dt} \quad (2.45)$$

となる。コンデンサー内の電束密度 D は $D = \sigma$ だから、この電流を書き換えると、

$$I(t) = S \frac{d\sigma}{dt} = \frac{d\mathbf{D}}{dt} \cdot \mathbf{n} S = \int_S \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.46)$$



となる。これは、極板間の真空において、 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を電流密度と見なすことによって、非定常な場合でも回路全体での電流の連続性が保証されることを意味している。後で、電流による磁界（アンペールの法則）が電束電流を電流と見なすこと（マクスウェル・アンペールの法則への拡張）によって、矛盾のない理論が成り立つことを見る。

電流には現象的にそれを阻止する方向に抵抗が働く。すなわちオームの法則

$$V = RI \quad (2.47)$$

が成立する。抵抗は長さに比例し、導線の断面積に反比例するから

$$R = \rho \frac{l}{S} \quad (2.48)$$

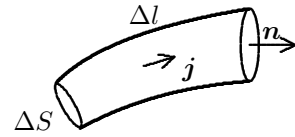
ここで ρ は抵抗率である。この逆数 $\sigma = 1/\rho$ を電気伝導率という。表面電荷密度や電荷密度と記号的に混乱しやすい。

物体の中に断面積 ΔS 、電流に沿った長さ Δl の微小体積を考え、これにオームの法則を適用する。

$$\Delta V = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} \Delta l = -\frac{1}{\sigma} \frac{\Delta l}{\Delta S} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} \Delta S$$

よって、オームの法則の局所的な表現は以下となる。

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} \quad (2.49)$$



導体の定常電流では (2.42) より $\text{div } \mathbf{j} = 0$ 、したがって、電気伝導率 σ が一定とすると $\text{div } \mathbf{E} = 0$ 、さらに誘電率 ϵ が一定とすると $\text{div } \mathbf{D} = 0$ 、(2.31) より真電荷密度は $\rho_t = 0$ となる。

空間の領域 V でのエネルギー保存を考える。ジュール熱と言われる熱の発生は

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} &= \int_V \mathbf{E} \cdot \mathbf{j}_t dv = - \int_V \text{grad } \phi \cdot \mathbf{j}_t dv = \int_V \{ \phi \text{div } \mathbf{j}_t - \text{div}(\phi \mathbf{j}_t) \} dv \\ &= \int_V \phi \text{div } \mathbf{j}_t dv - \int_{\Sigma} \phi \mathbf{j}_t \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

一方電界 \mathbf{E} は $U = \int_V \frac{1}{2} \epsilon \mathbf{E}^2 dv$ のエネルギーを持っているから

$$\begin{aligned} \frac{dU}{dt} &= \int_V \mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv = - \int_V \text{grad } \phi \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv \\ &= \int_V \{ \phi \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \text{div}(\phi \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \} dv = \int_V \phi \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} dv - \int_{\Sigma} \phi \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{dQ}{dt} + \frac{dU}{dt} &= \int_V \phi (\text{div } \mathbf{j}_t + \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) dv - \int_{\Sigma} \phi (\mathbf{j}_t + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{n} dS \\ \text{div } \mathbf{D} &= \rho_t, \quad \frac{\partial \rho_t}{\partial t} = -\text{div } \mathbf{j}_t \end{aligned}$$

を用いると

$$\frac{dQ}{dt} + \frac{dU}{dt} = - \int_{\Sigma} \phi (\mathbf{j}_t + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.50)$$

となる。エネルギー保存の法則は変位電流を電流の一種と見なすべきことを強く印象づける。

話の本筋ではないが、知っておいた方がよいことを追加する。

キルヒホッフの法則

実用的な電流回路の計算には次の「キルヒホッフ法則」が役に立つ。

キルヒホッフの法則

- (1) 電荷は生成も消滅もしないから、全ての結合点で、その点に入る全ての電流と全ての出っていく電流は等しい。
- (2) 回路の中のどんな閉じた一回りも電圧は 0 となる。

諸君は中、高校で定常的な回路の計算は習熟しているとして、これらの応用はここでは省略する。

ゼーベック効果と熱電対

2つの異なる金属をつなぎ、両方の接点に温度差を与えると金属の間に電圧が発生し、電流が流れる。これをゼーベック効果という。伝導電子は金属の中を気体分子のようにふるまい、一つの金属の両端に温度勾配を与え続けると、高温部の伝導電子の密度が低下し正に帯電し、伝導電子は低温部に移動し、低温部は負に帯電する。この効果は金属によって異なり、2種類の金属の両端を接続し、2つの接続点温度に差を与えると近似的に温度差に比例した電流が流れる。こうした構造を持った回路を熱電対^{ねつでんつい}という。温度計に利用されている。

逆に、異なる2種類の金属や半導体を2つの点で接合したものに、電流を流すと、熱も輸送し、片方の接点は冷やされ、もう一方は温められる。これをペルティエ効果という。クーラーに利用されている。

温度差のある導体に電流を流すと、ジュール熱の放出の他に、同じ温度勾配でも電流の向きによって逆の熱の出入り起こる。これをトムソン効果という。

熱電効果とは、電気伝導体や半導体などの金属中において、熱流の熱エネルギーと電流の電気エネルギーが相互に及ぼし合う効果で、ゼーベック効果、ペルティエ効果、トムソン効果を熱電効果をいう。

2.5 磁石と静磁場

まず理解を助けるため、磁石に関するクーロンの法則

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{q_{m1}q_{m2}}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}, \quad \mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2 \quad \text{真空の透磁率} \quad (2.51)$$

を仮定しよう（磁荷の単位は $\text{A}\cdot\text{m}$ ということになる）。議論の一貫性（整合性）は後で証明する。このとき、磁石による静磁場は静電場と全く同様にして

$$\mathbf{F} = q_m \mathbf{B}, \quad \mathbf{B} : \text{磁束密度 (テスラ (N/Am))} \quad (2.52)$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \sum_{i=1}^n q_{mi} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3}, \quad \mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv', \quad \rho_m(\mathbf{r}) : \text{磁荷分布} \quad (2.53)$$

$$\mathbf{B} = -\mu_0 \nabla \phi_m, \quad (d\phi_m = -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s}), \quad \phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad \phi_m : \text{磁位} \quad (2.54)$$

などと定式化できる。ただし、対応 $\mathbf{B} \leftrightarrow \mathbf{E}$ 、磁位の定義などに注意しておく必要がある。

\mathbf{r}' を中心とする微小距離 \mathbf{d} だけ離れた2つの磁荷 $-q_m, q_m$ の磁気双極子を考える。磁気双極子のモーメントは $\mathbf{m} = q_m \mathbf{d}$ である。

磁気双極子が磁場 (\mathbf{d} が微小だから、磁場は一様とする) から受ける力のモーメント \mathbf{N} を求めておこう。

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= \sum \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_i = (\mathbf{r}' - \frac{\mathbf{d}}{2}) \times (-q_m \mathbf{B}) + (\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{d}}{2}) \times (+q_m \mathbf{B}) = q_m \mathbf{d} \times \mathbf{B} \\ \mathbf{N} &= \mathbf{m} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.55)$$

また磁気双極子による磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は電気双極子の場合 (2.25) と同じように導ける。磁気双極子による磁位 ϕ_m は

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \cdot (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

だから、簡単のため右辺で $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ を \mathbf{r} と置いて

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\mu_0 \nabla \phi_m = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{3(\mathbf{r} \cdot \mathbf{m})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} \quad (2.56)$$

となる。

\mathbf{m} が \mathbf{r} にたいして定数の時、

$$\begin{aligned} (\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} &= (m_x \frac{\partial}{\partial x} + m_y \frac{\partial}{\partial y} + m_z \frac{\partial}{\partial z}) \frac{\mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mathbf{m}}{r^3} + m_x \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r^3} + m_y \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r^3} + m_z \mathbf{r} \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r^3} \\ &= \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{r}}{r^5} (m_x x + m_y y + m_z z) = -\frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} \end{aligned}$$

あるいは後で求めるベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m} \times \nabla \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} \quad (2.57)$$

を用いて、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ から求めることもできる。

これが正しいことは、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ を計算してみればよい。

公式 $\text{rot}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A}$ を用いて、

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \text{rot} \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ -(\mathbf{m} \cdot \nabla) \frac{\mathbf{r}}{r^3} - \mathbf{m} \nabla^2 \frac{1}{r} \right\} = \frac{\mu_0}{4\pi} \left\{ \frac{3(\mathbf{m} \cdot \mathbf{r})\mathbf{r} - r^2 \mathbf{m}}{r^5} - \mathbf{m}(-4\pi\delta(\mathbf{r})) \right\}$$

$r \neq 0$ の条件で、右辺第2項は0となる。

ここではさらに直接座標を用いて求めておこう。磁気双極子の中心を原点にとり、 \mathbf{m} は z 軸方向とし、それに垂直な面を xy 平面にとる。 xz 平面上の点 $P : \mathbf{r} = (x, 0, z) = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}$ での磁場は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 q_m (\mathbf{r} - \mathbf{d}/2)}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{d}/2|^{3/2}} + \frac{-\mu_0 q_m (\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)}{4\pi |\mathbf{r} + \mathbf{d}/2|^{3/2}} = \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \left\{ \frac{x\mathbf{i} + (z - d/2)\mathbf{k}}{|x\mathbf{i} + (z - d/2)\mathbf{k}|^3} - \frac{x\mathbf{i} + (z + d/2)\mathbf{k}}{|x\mathbf{i} + (z + d/2)\mathbf{k}|^3} \right\}$$

となる。 $r = \sqrt{x^2 + z^2} \gg d$ となると

$$\begin{aligned}
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi} \left\{ \frac{x\mathbf{i} + (z - d/2)\mathbf{k}}{|x^2 + (z - d/2)^2|^{3/2}} - \frac{x\mathbf{i} + (z + d/2)\mathbf{k}}{|x^2 + (z + d/2)^2|^{3/2}} \right\} \\
 &= \frac{\mu_0 q_m}{4\pi r^3} \left[\{x\mathbf{i} + (z - d/2)\mathbf{k}\} \left(1 + \frac{3zd}{2r^2}\right) - \{x\mathbf{i} + (z + d/2)\mathbf{k}\} \left(1 - \frac{3zd}{2r^2}\right) \right] \\
 &= \frac{\mu_0 q_m d}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3xz}{r^2} \mathbf{i} + \frac{3z^2 - r^2}{r^2} \mathbf{k} \right\} \\
 \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0 |\mathbf{m}|}{4\pi r^3} \left\{ \frac{3xz}{r^2} \mathbf{i} + \frac{3z^2 - r^2}{r^2} \mathbf{k} \right\} \quad (2.58)
 \end{aligned}$$

いずれにしても、磁石に関するクーロンの法則を仮定すると、磁気双極子の作る磁場は (2.56) によって表されることがわかる。

2.6 電流の相互作用とビオ・サバルの法則

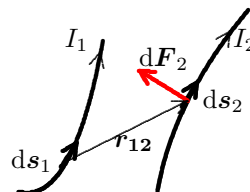
さて、静電場の出発点を電荷に関するクーロンの法則にとったと同様に、静磁場の出発点を磁石に関するクーロンの法則にとるためには、真電荷に相当する真磁荷の存在が望ましい。現在のところ、真磁荷は発見されていない。したがって、別の原理を出発点に選ぶ方が統一した理論を構成し易い。電荷に関するクーロンの法則の役割を、次の実験に基づく静磁場についての法則に担わせることにする。しかるべき処理によって、静磁場のクーロンの法則はこれによって説明されると予想を立てる。こうした流れの中でアンペールは数々の実験をした。この議論の進め方を「電気一元論」ということもある。

定常電流 I_1 が定常電流 I_2 に及ぼす力 \mathbf{F}_2 は

$\mathbf{r}_{12} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ とおくと

$$\mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \oint_{\Gamma_1} \oint_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{s}_2 \times (d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (2.59)$$

$\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{ N/A}^2$ 真空の透磁率



となる。

比例係数 μ_0 がすっかりした値であるのは、単位系の選択法による（後で述べる）。閉曲線 Γ_1, Γ_2 は任意の曲線について成立するから、これより、電流 I の点 \mathbf{r}' にある線素 $d\mathbf{s}'$ が点 \mathbf{r} に作る磁束密度 $d\mathbf{B}(\mathbf{r})$ を

$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{4\pi |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (2.60)$$

とすると、電流 I の点 \mathbf{r} における線素 $d\mathbf{s}$ が磁束密度 $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ から受ける力は

$$d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}, \quad d\mathbf{F}: \text{アンペールの力} \quad (2.61)$$

となる。(2.60) をビオ・サバル (Biot-Savart) の法則という。

電流の相互作用 (2.59) をビオ・サバルの法則 (2.60) と アンペールの力 (2.61) に分解するということは、遠隔作用説で表現すると Γ_1 上の電流素片 $I_1 d\mathbf{s}_1$ が Γ_2 上の電流素片 $I_2 d\mathbf{s}_2$ に作用する力は

$$d^2 \mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \frac{d\mathbf{s}_2 \times (d\mathbf{s}_1 \times \mathbf{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

である、ということに対応する。公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を用いて、

$$d^2 \mathbf{F}_2 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} [(d\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)) d\mathbf{s}_1 - (d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)] \cdot \cdot \cdot \quad (a)$$

全く同様に、 Γ_2 上の電流素片 $I_2 d\mathbf{s}_2$ が Γ_1 上の電流素片 $I_1 d\mathbf{s}_1$ に作用する力は

$$d^2 \mathbf{F}_1 = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi r_{12}^3} [(d\mathbf{s}_1 \cdot (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)) d\mathbf{s}_2 - (d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)] \cdot \cdot \cdot \quad (b)$$

(a) の第 1 項は Γ_1 の線素 $d\mathbf{s}_1$ に平行な方向を向いており、(b) の 第 1 項は Γ_2 の線素 $d\mathbf{s}_2$ に平行な方向を向いている。右辺第 2 項は (a), (b) 同じ大きさで、反対の向きの力を表している。(a), (b) の右辺第 1 項の違いより、電流素

片間の力は作用・反作用の法則を満たしていない。(a) から電流 I_2 が電流 I_1 から受ける全体の力 \mathbf{F}_2 を求めるとき、(a) の第 1 項の $d\mathbf{s}_2$ での積分は

$$\int_{\Gamma_2} \frac{d\mathbf{s}_2 \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} = \int_{\Sigma_2} \text{rot} \left(\frac{\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3} \right) \cdot \mathbf{n} dS_2 = 0$$

となる。 \mathbf{F}_1 についても同様だから、

$$\mathbf{F}_2 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(d\mathbf{s}_1 \cdot d\mathbf{s}_2)(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}, \quad \mathbf{F}_1 = -\frac{\mu_0 I_1 I_2}{4\pi} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \frac{(d\mathbf{s}_2 \cdot d\mathbf{s}_1)(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

従って、電流 I_1 と電流 I_2 の間の力は作用・反作用の法則を満たしている。歴史的にも、電流素片の相互作用を書き換える色々な工夫があったそうだが、成功しなかった。結局、電流の相互作用を遠隔作用説のままで、電流素片の相互作用に分解すれば作用・反作用の法則を維持することが困難となった。ここでも、近接作用説への転換が求められたことになる。 [補足] 相対性原理によると、保存則は非局所的であってはならない。

ビオ・サバルの法則を電流密度で表すと、 $I d\mathbf{s}'$ を $\mathbf{j}(\mathbf{r}') dv'$ に置き換えて、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (2.62)$$

となる。あるいは、式 (2.62) は、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \text{ただし} \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.63)$$

としても同じである。なぜなら、代入してみると、

$$\text{公式 } \text{rot}(\phi \mathbf{A}) = \nabla \phi \times \mathbf{A} + \phi \text{rot } \mathbf{A} \text{ (今の場合 } \mathbf{A} \text{ に対応した部分 } \mathbf{j}(\mathbf{r}') \text{ は } \mathbf{r} \text{ について定数) を用いると}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \text{rot} \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{j}(\mathbf{r}') dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

となるからである。(2.62) あるいは (2.62) が、電荷についてのクーロンの法則に対する電場の式 (2.4) に対応した磁場の式である。

法則の電流 I による表現から電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ による表現の変換は直感的にやればよいが、次のように考えておこう。導線 Γ を電流 I が流れているときの電流密度は

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \int_{\Gamma} I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{t}(s) ds, \quad \text{曲線 } \Gamma: \mathbf{r} = \mathbf{r}(s), \quad \mathbf{t}(s) ds = d\mathbf{s}, \quad \mathbf{t}(s) \text{ は線素 } ds \text{ の単位接線ベクトル}$$

と表せるから、任意の $f(\mathbf{r})$ に対して、

$$\begin{aligned} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) f(\mathbf{r}) dv &= \int \left\{ \int_{\Gamma} I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(s)) \mathbf{t}(s) ds \right\} f(\mathbf{r}) dv = \int_{\Gamma} \left\{ \int I \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}(s)) f(\mathbf{r}) dv \right\} \mathbf{t}(s) ds \\ &= \int_{\Gamma} I f(\mathbf{r}(s)) \mathbf{t}(s) ds = \int_{\Gamma} I f(\mathbf{r}) d\mathbf{s} \end{aligned}$$

よって、電流密度 \mathbf{j} で表現された法則は導線 Γ を流れる電流 I に対する法則に書き換えられる。これは、電流 I に関する法則の全てが直ちに電流密度で表した法則に拡張できることを保証しているのではない。

しかし、任意の電流素片 $I d\mathbf{s}$ に対して成り立つ法則は、 $I d\mathbf{s} \rightarrow \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$ の書き換えが可能で、(2.62) は (2.60) の拡張として成り立つはずである。なぜなら、 \mathbf{r} を含む体積 ΔV の微小領域に含まれている電流素片を $\Delta \mathbf{J}_k = I_k \Delta \mathbf{s}_k$, $k = 1, 2, \dots$, とすると、電流密度 \mathbf{j} は

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{\sum_k \Delta \mathbf{J}_k}{\Delta V}$$

と定義できるから、領域 V について、

$$\sum_k f(\mathbf{r}_k) I_k \Delta \mathbf{s}_k \rightarrow \int_V f(\mathbf{r}) \mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$$

の書き換えが可能となり、電流素片 $I d\mathbf{s}$ についての法則を $\mathbf{j}(\mathbf{r}) dv$ についての法則に書き換えることができる。

また、アンペールの力 (2.61) で、 $I d\mathbf{s}'$ を $\mathbf{j}(\mathbf{r}') dv'$ と置き換えて、単位体積あたりのアンペールの力 \mathbf{f} は、

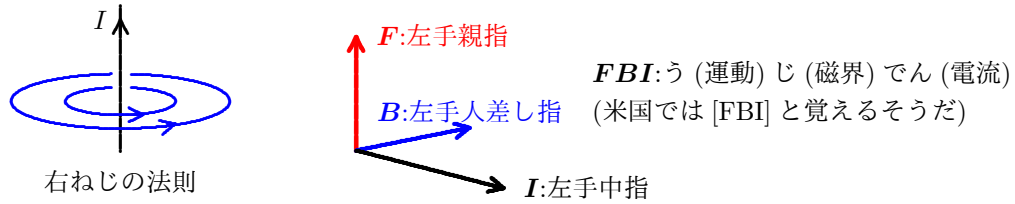
$$\mathbf{f} = \mathbf{j} \times \mathbf{B} \quad (2.64)$$

となる。

はじめにビオサバルの法則を考える。

電気力線と同様に、磁束密度を磁束密度の大きさに比例した密度で示した図を磁束線という。ビオサバルの法則は無数の直線電流の場合は左のようになる。また、電流が磁界から受ける力、アンペールの力は

右図のようになる。高校以下で学んだ電流の相互作用の議論すなわち、磁場の形成（右ねじの法則）と電流が磁場から受ける力（フレミング左手の法則）はそれぞれの核心部分を定性的に表現したものである。



右ねじの法則

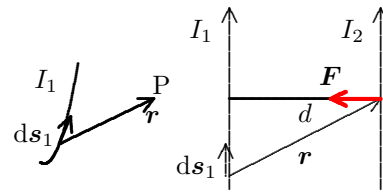
これらは極めて簡単な実験でかなりの精度で確認できる。しかし、ビオサバールの法則は磁場の強さが電流からの距離の2乗に反比例する、という決定的な主張を含んでいることも忘れてはならない。

ビオサバールの法則の一つ目の例として、距離 d だけ離れた平行2直線に同じ方向に I_1, I_2 の電流が流れているとき、単位長さ当たりの力を求めてみよう。電流 I_1 の線素 ds_1 の部分が電流 I_2 上の1点Pに作る磁束密度 $d\mathbf{B}$ は

$d\mathbf{B} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \frac{ds_1 \times \mathbf{r}}{r^3}$ だから、 $d\mathbf{B}$ は I_1 と I_2 が作る平面に垂直（紙面の表面から裏面に向かう）であり、

$$B_{\perp} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} \int \frac{r \sin \theta dx}{r^3} = \frac{\mu_0 I_1}{4\pi} d \int \frac{dx}{r^3}$$

$$= \frac{2\mu_0 I_1 d}{4\pi} \int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2 + d^2)^{3/2}} = \frac{2\mu_0 I_1 d}{4\pi} \cdot \frac{1}{d^2} = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d}$$



となる。すなわち直線電流が距離 d だけ離れたところに作る磁束密度は右ねじを電流の向きにすすめるときのねじの回る向き（右ねじの法則）で、大きさは

$$B = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi d} \quad (2.65)$$

となる。電流 I_1 による磁束密度 \mathbf{B} が線素 ds_2 の電流 I_2 に作用する力 $d\mathbf{F}$ は $d\mathbf{F} = I_2 ds_2 \times \mathbf{B}$ で与えられるから、単位長さ当たりの力 \mathbf{F} は引き合う方向（フレミング左手の法則）で、大きさは

$$F = \frac{\mu_0 I_1 I_2}{2\pi d}$$

となる（ピンチ効果, pinch:締め付ける）。

MKSA 有理化単位系では、1mの間隔で平行に置かれた2本の直線状導体に同じ大きさの電流が流れたとき、導体の単位長さ当たり $2 \times 10^{-7} \text{N}$ の力を及ぼす時を1Aと定義する。すなわち、 $2 \times 10^{-7} \text{N/m} = \frac{\mu_0 \times 1\text{A} \times 1\text{A}}{2\pi \times 1\text{m}}$, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} \text{N/A}^2$ となる。1C（クーロン）=1A×1secである。また後で議論するが光速を $c = 2.99792458 \times 10^8 \text{m/s}$ とすると、 $\sqrt{\epsilon_0 \mu_0} = \frac{1}{c}$ だから、

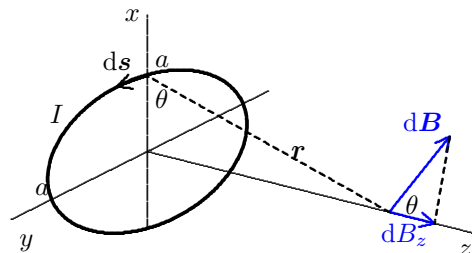
$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = \frac{\mu_0 c^2}{4\pi} = 8.9876 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2 \text{ となる。}$$

また、磁束密度の単位は(2.61)から、1T(テスラ)=1N/A·mとする。これは常用単位の 10^4 ガウスに相当する。

ビオサバールの法則の二つ目の例として、円形電流が中心軸上の点に作る磁場を求めておこう。xy平面上の半径 a の円周上を電流 I が流れているとする。

z 軸上の点P(z)では、円周上の線素 ds と \mathbf{r} は垂直であり、 $ds \times \mathbf{r}$ は ds と \mathbf{r} の面に垂直であり、大きさは $|ds \times \mathbf{r}| = rds$ なる。磁界は対称性より z 軸方向を向いており

$$dB_z = \frac{\mu_0 I |ds \times \mathbf{r}|}{4\pi r^3} \cos \theta$$



$$B = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{Iads}{(z^2 + a^2)^{3/2}} = \frac{\mu_0 I a^2}{2(z^2 + a^2)^{3/2}} \quad (2.66)$$

円の中心での磁束密度は

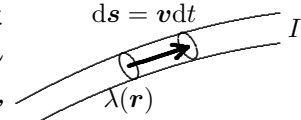
$$B = \frac{\mu_0 I}{2a} \quad (2.67)$$

であり、遠方の軸上 ($z \gg a$) の磁束密度は次のようになる。

$$B = \frac{\mu_0 I a^2}{2z^3} \quad (2.68)$$

次に、アンペールの力を考える。

導線を、線密度 (単位長さ当たり) の電荷 $\lambda(\mathbf{r})$ が速度 \mathbf{v} で移動しているとすると、電流は $I = \lambda v$ となる。電流に沿って微小時間 dt の移動距離に等しい線素 $d\mathbf{s} = \mathbf{v} dt$ を考えると、そこに含まれる電荷 dq は $dq = \lambda ds = \lambda v dt$ 、したがって $I d\mathbf{s} = \mathbf{v} dq$ となる。(2.61) を適用すると $d\mathbf{F} = \mathbf{v} dq \times \mathbf{B}$ となる。



したがって一般に、電場 \mathbf{E} 、磁場 \mathbf{B} の中を電荷 q が速度 \mathbf{v} で運動するとつぎのローレンツ力が働く。

$$\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (2.69)$$

これをあらためて磁場、電場の定義と見なすこともできる。

2.7 アンペールの法則と真磁荷は存在しないこと

磁場が磁荷の分布から発生するならば、(2.54) のように磁位 (磁気スカラーポテンシャル) が存在し、 ϕ_m の傾きから求めることができた。しかし電流が作る磁場はスカラーポテンシャルを持たない。静電場に関するクーロンの法則 () は、2つの場に関する法則、静電場に関するガウスの法則 (2.5) と電位の存在の法則 (2.5) で表された。同じように、ここでは、ビオ・サバールの法則が2つの場の法則

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \text{積分形では } \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{アンペールの法則}) \quad (2.70)$$

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{積分形では } \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{真磁荷が存在しない}) \quad (2.71)$$

で表されることを見る。図形的な表現に関心があれば、付録を参照されたい。

始めに、ビオ・サバールの法則 (2.62) から出発する。

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

これを、公式 $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ に直接代入して、

$$\text{div } \mathbf{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla \cdot \left(\mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \nabla \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int -\mathbf{j}(\mathbf{r}') \cdot \text{rot} \left(\text{grad} \frac{-1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = 0$$

よって

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad \text{積分形では } \int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\text{真磁荷が存在しない})$$

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ は磁場の重要な性質である。静電界 \mathbf{E} と比較すると明らかなように、磁場はすべてビオ・サバールの法則によって発生し、それ以外の原因が存在しないとすると、静電場の真電荷に相当する磁場の真磁荷は存在しないことを示している。もし、真磁荷が存在するのならば、磁場の「湧きだし」を引き起こし、 $\text{div } \mathbf{B} \neq 0$ をもたらす。また、同じことであるが、 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ は、磁束密度の連続性を保証する。また、ビオ・サバールの法則の $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ は、すでに

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r}), \quad \text{ただし } \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

によって与えられることを知っているし、このベクトルポテンシャル \mathbf{A} は $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を満たす (3.3 節参照)。したがって、

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{B} &= \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} \\ &= -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla^2 \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = -\frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ &= \mu_0 \int \mathbf{j}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \mu_0 \mathbf{j}(\mathbf{r}) \end{aligned}$$

よって、

$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j} \quad \text{積分形では } \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

したがって、ビオ・サバルの法則 (2.62) から、真磁荷が存在しない条件 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ とアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ が導かれた。

次に、逆の議論をしよう。すなわち、真磁荷が存在しない条件 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ とアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ とを仮定する。

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ なるベクトル \mathbf{B} にたいして、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ なるベクトルポテンシャル \mathbf{A} が存在する (3.3 節参照)。任意の ϕ に対して、 $\text{rot } (\nabla \phi) = 0$ だから、 \mathbf{B} のベクトルポテンシャルを \mathbf{A} とすれば、 $\mathbf{A} + \nabla \phi$ もベクトルポテンシャルである。そのため、ベクトルポテンシャルに条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ (クーロン条件) も付け加える。さらに、 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ ならば、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ である。従って、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ (定常電流)、十分遠方では $\mathbf{j} = 0$ を満たす任意の \mathbf{j} に対して、方程式 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$, $\text{rot } \mathbf{A} = \mathbf{B}$, 条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を満たす解が、ベクトルポテンシャル \mathbf{A}

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.72)$$

であることを示せばよい。しかし、これはそれぞれ証明済みである。これより、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A}(\mathbf{r})$ を計算すると、ビオ・サバルの法則 (2.62) が得られる。また、輪型の線電流の場合は

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.73)$$

であり、これよりたとえば輪型の線電流の場合のビオ・サバルの法則が得られる。

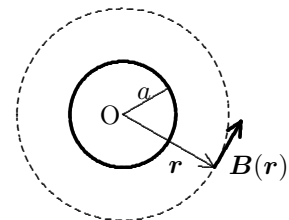
$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \text{rot } \mathbf{A} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times I d\mathbf{s}' = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

こうして、真磁荷が存在しない条件 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ とアンペールの法則 $\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}$ はビオ・サバルの法則と等価であることがわかる。

アンペールの法則が磁場を求めるのに非常に役立つ場合を2つだけ考える。

半径 a の無限に長い円筒状の導体に電流が I が流れているときの磁場を求めよう。図は軸に垂直な切断面で、電流は紙面の下から上に向かって流れているとする。中心 O からの半径を r として、アンペールの法則より、

$$\begin{aligned} r > a \text{ のとき, } & 2\pi r \times B(r) = \mu_0 I \quad \text{より, } B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \\ r < a \text{ のとき, } & 2\pi r \times B(r) = 0 \quad \text{より, } B(r) = 0 \end{aligned}$$



導線を同一軸の周りに一様な巻き線密度で巻いた円筒状のコイルをソレノイド (solenoid) という。

無限に長いソレノイドで、単位長さあたりの巻数を n とする。ソレノイドに電流 I が流れたときの磁束密度を求めておこう。

磁束密度は、ソレノイドの中も外も、対称性より軸に平行となる。ソレノイドの内部に軸に平行で軸方向の長さが l の長方形 $ABCD$ を考えると、

$$\text{アンペールの法則 } \left(\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \right) \text{ より}$$

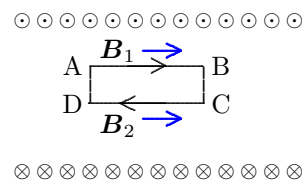
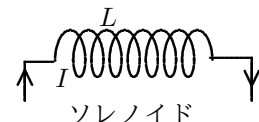
$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = B_1 l + B_2 (-l) = 0$$

となり、 $B_1 = B_2$ すなわち内部ではどこでも同じ磁界の強さを持つ。ソレノイドの外で軸に平行な長方形を考えると、同様に外では同じ磁界の強さを持つことになる。ところが十分ソレノイドから離れたところでは磁場は0と考えられるから、ソレノイドの外では磁場は常に0となる。また長方形がコイルをまたぐようにとると

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = Bl = nl\mu_0 I$$

となり、ソレノイドの内部の磁束密度が求まる。

$$B = \mu_0 n I$$



このように、アンペールの法則に対称性をうまく用いて磁束密度を求めることができる場合は、それほど多くはない。

しかし、静電場をガウスの法則で表したように定常電流による磁場をアンペールの法則で表すのは、実用のためというのではなく、磁場を電場と統一して理解するのに欠かせないからである。

2.8 輪電流による磁気モーメントと磁性体

輪電流が磁場から受ける力の合力は

$$\mathbf{F} = \oint d\mathbf{F} = \oint I d\mathbf{s} \times \mathbf{B} \quad (2.74)$$

となるが、磁場が一定とすると、受ける力は $\mathbf{F} = 0$ となる。一方、力の能率 \mathbf{N} は一般に 0 とはならない。

$$d\mathbf{N} = \mathbf{r} \times d\mathbf{F} = \mathbf{r} \times (I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}) \quad (2.75)$$

xy 平面内に輪電流（円形である必要はない）をとり、回路面に垂直で、電流の流れる方向に右ねじの進む方向で輪の面積に等しいベクトルを \mathbf{G} とする。原点から電流素片 $I d\mathbf{s}$ へのベクトルを \mathbf{r} とする。また磁束密度 \mathbf{B} を xz 平面にとり、 x, y, z 方向の単位ベクトルを $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ とすると

$$\mathbf{G} = G\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}, \quad \mathbf{B} = B_x\mathbf{i} + B_z\mathbf{k}, \quad d\mathbf{s} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j}$$

公式 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を用いると

$$d\mathbf{N} = I\{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{B})d\mathbf{s} - (\mathbf{r} \cdot d\mathbf{s})\mathbf{B}\} = I\{xB_x ds - (xdx + ydy)\mathbf{B}\}$$

よって \mathbf{B} 一定として輪電流の一周について積分すると

$$\begin{aligned} \mathbf{N} &= I \oint \{-yB_x dy\mathbf{i} + xB_x dy\mathbf{j} - (xdx + ydy)B_z\mathbf{k}\} \\ &= IB_x G\mathbf{j} = I\mathbf{G} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2.76)$$

ここで $\mathbf{m} = I\mathbf{G}$ とおくと、 $\mathbf{N} = \mathbf{m} \times \mathbf{B}$ となり、(2.55) と比較すると、 $\mathbf{m} = I\mathbf{G}$ が輪電流の磁気モーメントであることがわかる。このことは輪電流の作る磁場を求めることによってもっと直接的に理解できる。

$x-y$ 平面上の輪電流を考える。輪電流がつくる磁場のベクトルポテンシャルは

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}, \quad d\mathbf{s}' = dx'\mathbf{i} + dy'\mathbf{j}$$

とおくと、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}$$

$$r = \sqrt{x^2 + z^2} \gg |x'|, |y'| \text{ とすると, } |\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + (r')^2} \sim r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right),$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}'}{r \left(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right)} = \frac{\mu_0 I}{4\pi r} \oint \left(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}\right) d\mathbf{s}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') d\mathbf{s}' = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} \oint (xx' dx'\mathbf{i} + xy' dy'\mathbf{j})$$

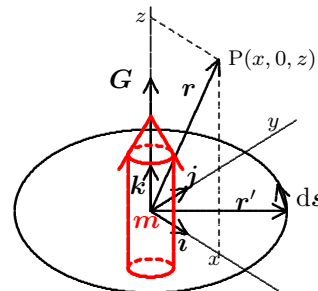
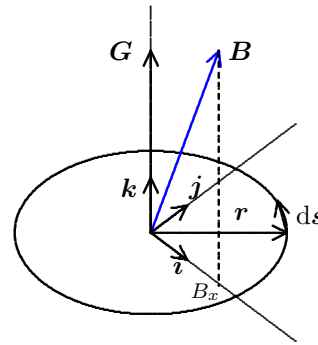
$$\oint xx' dx' = 0, \quad \oint xy' dy' = xG, \quad G: \text{ループの面積}$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 I}{4\pi r^3} xG\mathbf{j} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IG\mathbf{k} \times x\mathbf{i}}{r^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{IG\mathbf{k} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

輪電流が作る磁場は磁気モーメントを $\mathbf{m} = IG\mathbf{k}$ とおくと、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$$

となる。 z 軸の周りの回転について対称、軸がどこを向いていても同じはずだから、これは一般の輪電流がつくる磁気モーメントについても成り立つ。



例 … 水素の原子模型による磁気双極子モーメント

電子と陽子の間にはクーロン力のみが作用する，電子の質量は陽子の約 1/2000 の質量。中心力だから平面運動であり，電子が陽子の周りに速さ v ，半径 r の円運動をしているとする。電子の質量を m_e ，電気素量を e とすると，

$$m_e \frac{v^2}{r} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2} \quad m_e = 9.1093897 \times 10^{-31} \text{kg} \quad e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{C}$$

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} = 8.9876 \times 10^9 \text{Nm}^2/\text{C}^2$$

となるが，この条件を満たせばどんな軌道をとっても良い，とはなっていない。離散的な状態しか存在しないことがわかっている。その中で，一番エネルギーレベルが低い状態を基底状態といい，そのときの半径をボーア半径という。

$$r = \frac{\epsilon_0 h^2}{\pi m_e e^2} = 0.528 \times 10^{-10} \text{m}$$

h はプランクの定数， $h = 6.626 \times 10^{-34} \text{Js}$ である。したがって，基底状態の時の速度は

$$v = \frac{e^2}{2\epsilon_0 h} = 2.3 \times 10^6 \text{m/s}$$

軌道の電流は， $I = \frac{ev}{2\pi r}$ である。したがって，この円運動による磁気双極子モーメントを \mathbf{m} とすると，

$$|\mathbf{m}| = IG = \frac{ev}{2\pi r} \times \pi r^2 = \frac{1}{2} evr = \frac{eh}{4\pi m_e} = 9.27 \times 10^{-24} \text{N}\cdot\text{m}/\text{T} \quad (\text{A}\cdot\text{m}^2)$$

となる。これはボーア磁子と呼ばれている。電子の角運動量を \mathbf{L} とすると， $\mathbf{L} = m_e \mathbf{r} \times \mathbf{v}$ であるから，次の関係が成り立つ。

$$\mathbf{m} = -\frac{e}{2m_e} \mathbf{L}$$

磁気双極子の位置を \mathbf{r}' にもどすと，

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\mathbf{m}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} = -\frac{\mu_0}{4\pi} \mathbf{m}(\mathbf{r}') \times \nabla \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) \quad (2.77)$$

となる。輪電流が作る磁場 (2.77) は磁気モーメントを $\mathbf{m} = IG\mathbf{k}$ とおくと単位磁気双極子の磁場 (2.56) と遠方で同じ形となる。したがって，これを同一視し，磁性体は単位磁気双極子の集合体とみなす。誘電体における分極の場合と同様に，磁性体の表面には電流が現れ，(2.56) と整合性があるように磁場を作る。磁石に関するクーロンの法則はここではあくまでも磁場 (2.56) を作る仮想的なものである。

単位体積当たりの磁気モーメント \mathbf{M} を磁化という。 \mathbf{M} は，該当する単位体積に含まれる各单位双極子の磁気モーメントを $\mathbf{m}_i = I_i \mathbf{G}_i$ とすると， $\mathbf{M} = \sum \mathbf{m}_i$ となる。したがって，(2.77) を磁化の分布に適用すると

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \mathbf{M}(\mathbf{r}') \times \nabla' \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \quad (2.78)$$

となる。(2.78) を部分積分すると，

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' - \frac{\mu_0}{4\pi} \int \nabla' \times \left(\frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \right) dv' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \left[\int \frac{\nabla' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \int \frac{-\mathbf{n}' \times \mathbf{M}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right] \end{aligned} \quad (2.79)$$

となる。ここで右辺第 2 項には Gauss の定理 (3.59) を用いた。右辺第 1 項は磁束密度のベクトルポテンシャルと電流の関係 (2.72) を考慮すると，磁性体の内部には磁化にともなう電流

$$\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M} \quad (2.80)$$

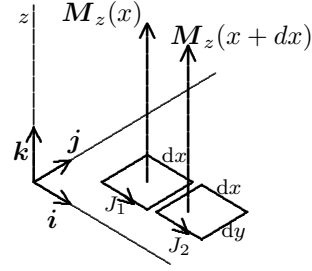
が流れていることになる。 \mathbf{j}_m を磁化電流といい，実電流 \mathbf{j} と区別される。また右辺第 2 項は十分広い領域での積分は 0 となり，また積分を磁化した物体の範囲にとると，境界面での面電流が $-\mathbf{n} \times \mathbf{M}$ であることを示している。

確かに， $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ は磁化の変化に伴う電流である。 xy 平面上での幅 dz の矩形閉回路の磁気モーメントの z 成分を考える。磁化が一様でないすると境界で完全には打ち消しあわず，正味の電流が生ずる。

それぞれの閉回路の磁気モーメントは $\mathbf{m} = \mathbf{M} dx dy dz$ である。矩形 1, 及び矩形 2 での電流は $m = IG$ の関係から

$$J_1 = \frac{M_z dx dy dz}{dx dy}, \quad J_2 = \frac{[M_z + (\frac{\partial M_z}{\partial x}) dx] dx dy dz}{dy dx}$$

となる。



境界での差が y 方向の正味の電流だから $J_y = -\frac{\partial M_z}{\partial x} dx dz$ となる。同様に yz 平面内で z 方向並んだ 2 つの矩形電

流を考えると $J_y = \frac{\partial M_x}{\partial z} dx dz$ となり、あわせると y 方向の電流密度は $j_{my} = \frac{\partial M_x}{\partial z} - \frac{\partial M_z}{\partial x}$ となる。したがってこれを一般化すると、磁化にともなう電流密度は $\mathbf{j}_m = \nabla \times \mathbf{M}$ となることがわかる。

磁化電流と磁気モーメントの関係 (2.80) を明確にするため、さらに、電流 \mathbf{j} の作る磁束密度に対するベクトルポテンシャル (2.72) を電流分布が場の点までの距離に比べて小さい範囲 $|\mathbf{r}'| \ll |\mathbf{r}| = r$ として $|\mathbf{r}'|$ の 1 次項まで級数展開してみる。

$$\frac{4\pi}{\mu_0} \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{r} \int \mathbf{j} dv' - \int (\nabla \cdot \frac{1}{r}) \cdot \mathbf{r}' \mathbf{j} dv' = \int \frac{(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}') \mathbf{j}}{r^3} dv'$$

ここで実電流ではないとして $\int \mathbf{j}(\mathbf{r}') dv' = 0$ を用いた。各成分では $\frac{4\pi}{\mu_0} A_\beta = \sum_\alpha \frac{r_\alpha}{r^3} \int r'_\alpha j_\beta dv'$ となる。 $\nabla(\phi \mathbf{j}) = \nabla \phi \cdot \mathbf{j} + \phi \nabla \mathbf{j}$ の左辺及び右辺の第 2 項の積分は 0 となるから、 $\int \nabla \phi \cdot \mathbf{j} dv' = 0$ 。これに $\phi = r'_\alpha r'_\beta$ ($\alpha \neq \beta$) を代入すると $\int (r'_\alpha j_\beta + r'_\beta j_\alpha) dv' = 0$ を得る。したがって各成分について

$$\frac{r_\alpha}{r^3} \int r'_\alpha j_\beta dv' = \frac{r_\alpha}{2r^3} \int \{(r'_\alpha j_\beta + r'_\beta j_\alpha) + (r'_\alpha j_\beta - r'_\beta j_\alpha)\} dv' = \int \frac{r_\alpha (r'_\alpha j_\beta - r'_\beta j_\alpha)}{2r^3} dv'$$

となる。したがって、

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{(\mathbf{r}' \times \mathbf{j}(\mathbf{r}')) \times \mathbf{r}}{2r^3} dv'$$

$\mathbf{j}(\mathbf{r}')$ を原点近くの輪電流、すなわち磁化電流 \mathbf{j}_m とすると、磁気モーメント \mathbf{m} は

$$\mathbf{m} = \frac{1}{2} \int \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}_m(\boldsymbol{\xi}) dv$$

となる。 $\boldsymbol{\xi}$ は分極電流を議論したときの分子・原子レベルまで表す座標系での位置ベクトルである。これは輪電流での磁気モーメントが $\mathbf{m} = I\mathbf{G}$ であることと合致している。単位体積当たりの磁気モーメント (磁化) \mathbf{M} は

$$\mathbf{M} = \frac{1}{2} \boldsymbol{\xi} \times \mathbf{j}_m(\boldsymbol{\xi})$$

となる。したがって、点 \mathbf{r}' の磁化の分布による磁場は次のようになる。

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv'$$

アンペールの法則に磁化電流を考慮すると

$$\oint_\Gamma \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_\Sigma (\mathbf{j} + \mathbf{j}_m) \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \mu_0 \int_\Sigma (\nabla \times \mathbf{M}) \cdot \mathbf{n} dS = \mu_0 \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \mu_0 \oint_\Gamma \mathbf{M} \cdot d\mathbf{s}$$

したがって

$$\oint_\Gamma \left(\frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \right) \cdot d\mathbf{s} = \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

磁界の強さ \mathbf{H} を改めて

$$\mathbf{H} = \frac{\mathbf{B}}{\mu_0} - \mathbf{M} \quad (2.81)$$

で定義すると「磁界の強さに関するアンペールの法則」

$$\oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \sum_{k=1}^n I_k, \quad \oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS, \quad \mathbf{j} : \text{電流密度} \quad (2.82)$$

$$(\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j})$$

がえられる。

ここで、仮想的に導入した磁石に関するクーロンの法則を確認しておこう。永久磁石では実電流 \mathbf{j} がなくても磁化 \mathbf{M} が存在する。したがって (2.82) より

$$\text{rot } \mathbf{H} = 0 \quad (2.83)$$

また (2.71), (2.81) から

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = -\operatorname{div} \mathbf{M} = \rho_m \quad (2.84)$$

ここで磁化密度 ρ_m は磁気の湧き出し密度を表し、静電場における電荷密度の役割を果たす。rot $\mathbf{H} = 0$ より、永久磁石による磁界の強さ \mathbf{H} は磁気スカラーポテンシャル、すなわち $\mathbf{H} = -\nabla\phi_m$ となる ϕ_m を持つ。 $\nabla^2\phi_m = -\rho_m$ の解は (2.28) との対応で

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \left[\int_V \frac{-\nabla' \mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \int_\Sigma \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right] \quad (2.85)$$

となる。 $\sigma_{mP} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{n}$ は面磁化密度を表す。また無限の遠方で 0 となる解は

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\rho_m(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.86)$$

これは磁石に関するクーロンの法則 (2.54) そのものである。

輪電流の実体、原子中の電子のスピンや電子の軌道運動、核スピンなど色々あり得るが、相当する輪電流が同じ方向を向いて、大きな磁気モーメントを持つ物質を強磁性体という。鉄、コバルト、ニッケル、ガドリニウムなどである。強磁性体では、外部から磁場を与えると、磁化の状態が変化し、その経過によって、磁化の量に影響が残る。これをヒステリシスという。強磁性体以外の磁性体では磁化はおおよそ磁界の強さに比例する。

$$\mathbf{M} = \chi_m \mathbf{H}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mu = \mu_0(1 + \chi_m) \quad (2.87)$$

$\chi_m > 0$: 常磁性体, $\chi_m < 0$: 反磁性体, $\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}$: 比透磁率

磁化率はいろいろな表現 (実用面から理由はある) があって、統一されていない。

いくつかの物質の磁化率 ($\chi_m : \times 10^{-6}$, 20°C)

(常磁性体)	χ_m	(反磁性体)	χ_m	(強磁性体)	χ_m
空気	0.36	水素	-0.002	コバルト	2.7×10^4
酸素	1.8	水	-9.05	鉄	5×10^5
アルミニウム	20.8	銅	-9.7	パーマロイ	$\sim 1 \times 10^8$

パーマロイは鉄、ニッケルの合金で透磁率を非常に大きくしたもので、色々ある。

(理科年表平成 22 年版, 単位は変換)

磁性体の境界条件は誘電体と同様に取り扱うことができる。場の方程式は (2.71), (2.82) から

$$\int_\Sigma \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad \oint_\Gamma \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_\Sigma \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS$$

である。電束密度、電界について行ったと同様の考察により磁性体 1 と 2 の境界で法線成分について

$$\mathbf{B}_1 \cdot \mathbf{n} = \mathbf{B}_2 \cdot \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0)$$

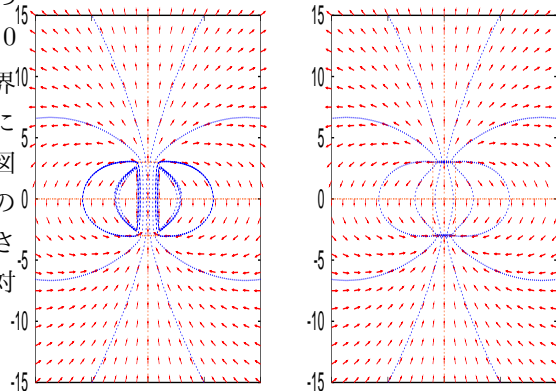
接線成分について表面実電流がないとすると

$$\mathbf{H}_1 \cdot \mathbf{t} = \mathbf{H}_2 \cdot \mathbf{t} \quad (\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0)$$

がなりたつ。

磁化が一定の円柱形の磁石のつくる磁場を検討する (付録参照)。磁束密度 \mathbf{B} はベクトルポテンシャル (2.79) の第 2 項から、磁界の強さ \mathbf{H} は磁位 (2.85) の第 2 項から直接積分によって求めることができる (JAVA アプレットを参照)。

真空中では磁束密度と磁界の強さは比例するが、磁性体の中では磁化があるため磁束密度と磁界の強さは違った形になる。磁束は $\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ が成立するため連続となるが、磁界の強さは表面磁荷によって逆向きになる。左側の図は磁束線、右側の図は磁力線を計算によって求めたものであるが、各線の密度や矢線の長さは強さに比例するという約束には対応させていない。



電束密度について既に確認した同じことを確認しておく。磁束管の一部を図に描いてみる。 $\text{div } \mathbf{B} = 0$ は、言い換えたら、 $\int_{\Sigma} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$

磁束管の両端の断面を Σ_1, Σ_2 とする。 $\int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0$ 。これは、 Σ_1 を入る (出る) 磁束線の数と Σ_2 面を出る (入る) 磁束線の数が等しいことを表している。どこで、どんな磁束管を考えても、この関係は成り立つから、磁束線は連続である。

2.9 ファラデーの電磁誘導の法則

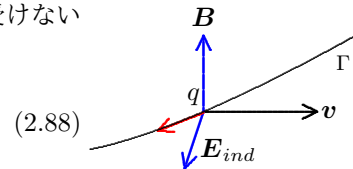
電流は磁場を生じ (ビオ・サバールの法則)、逆にまた電流は磁場から力 (アンペールの力) を受けた。それでは、電流を引き起こす電界は、電荷を源とする静電場だけなのだろうか。「磁界の変化は誘導電界を引き起こす」がこの疑問に対する解答であり、これを電磁誘導 (electromagnetic induction) といい、電磁誘導によって回路に流れる電流を誘導電流、電磁誘導による電圧を誘導起電力という。

はじめに、特殊な例で電磁誘導を調べておこう。

磁場の中を電荷 q が速度 \mathbf{v} で運動するとローレンツ力 (2.69) $\mathbf{F} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B})$ が働いた。いま、静電場を $\mathbf{E} = 0$ とし、導線が磁場 \mathbf{B} の中を速度 \mathbf{v} で運動したとする。導体内の電荷 q の荷電粒子は、 $q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ の力を受ける。

導体に固定した座標系から見ると、静止した荷電粒子は磁場から力を受けないから、荷電粒子は、相対運動によって発生した電場

$$\mathbf{E}_{ind} = \mathbf{v} \times \mathbf{B} \quad (2.88)$$



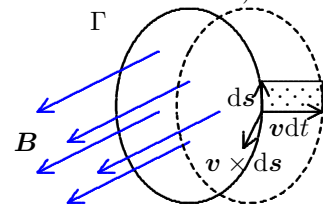
から作用を受けたと考えられる。

導線を閉回路 Γ として、この電場による回路での起電力 (electromotive force) は

$$\phi_{emf} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} \quad (2.89)$$

となる。(静電場 \mathbf{E} と静電ポテンシャル ϕ との関係 $d\phi = -\mathbf{E} \cdot d\mathbf{r}$ と符号が逆であることに注意)

閉回路 Γ に囲まれた磁束 Φ_M の変化を見よう。回路の要素 $d\mathbf{s}$ が速度 \mathbf{v} で動くとき、 $d\mathbf{s}$ が通った面積を貫く磁束の量は dt 時間の間には $\mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) dt$ となる。回路を貫く磁束の時間的变化はこれを回路の一周にわたって積分したものである。



$$\frac{d\Phi_M}{dt} = \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot (\mathbf{v} \times d\mathbf{s}) = - \oint_{\Gamma} (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{s} = - \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind} \cdot d\mathbf{s}$$

したがって

$$\phi_{emf} = - \frac{d\Phi_M}{dt} \quad (2.90)$$

となる。すなわち

「閉回路での起電力は閉回路を貫く磁束が減少する速さに等しい」

と言える。磁束の変化の原因をこのように閉回路の運動によるとして (2.90) を導いたが、荷電粒子に力を作用させる電界を引き起こす原因としての磁束の変化の原因は何であってかまわないだろう、と予測される。すなわち

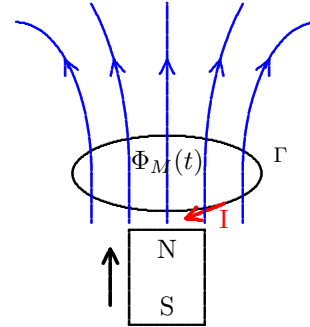
[ファラデーの電磁誘導の法則]

閉回路 Γ を貫く磁束を $\Phi_M(t)$ とすると、誘導起電力 ϕ_{emf} は

$$\phi_{emf} = -\frac{d\Phi_M(t)}{dt} \quad (2.91)$$

$$\phi_{emf} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s}, \quad \mathbf{E}_{ind} : \text{誘導電界}$$

である。誘導電界（誘導電流）の方向は磁束 $\Phi_M(t)$ の変化を妨げる方向に生ずる（レンツの法則 (Lenz's law)）。



(2.91) は極めて簡潔で、特に法則を $\phi_{emf} = -C \frac{d\Phi_M(t)}{dt}$ で表す、としたときの係数 ($C=1$) はすっかりしているが、これは、(2.88) あるいは (2.90) から予想したように電磁気学を体系的に整理するために工夫された単位系の恩恵でもあり、次のような簡単なエネルギー保存の考察からも納得できる。

電流 I が流れる回路には抵抗 R と起電力 E が作用しているとすると、 $E = RI$ が成り立つ。単位時間に電源がする仕事は $P = EI = RI^2$ でジュール熱になる。ここに磁石による磁場があったとすると (2.103) より $W = -I\Phi$ のポテンシャルエネルギーが発生する。磁石を動かすには単位時間当たり $P = -I \frac{d\Phi}{dt}$ の仕事を要する。このときのエネルギーの釣り合いは $RI^2 = EI - I \frac{d\Phi}{dt}$ となる。すなわち

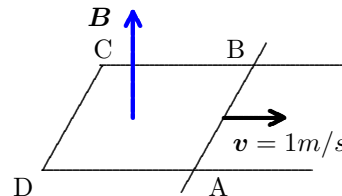
$$RI = E - \frac{d\Phi}{dt}$$

である。これは電流を流す総起電力は電源の起電力 E と磁束変化にもとづく電磁誘導の起電力 $-\frac{d\Phi}{dt}$ の和であることを示す。これは法則 (2.91) の係数が $C = 1$ であることを確認している。

ファラデーの電磁誘導の法則は、磁石を動かしたり、電流を変化させて磁場を変化させたとき、静止した回路の起電力や、回路を変形させて磁束を変化させるときの起電力を求めるのに適した形をしている。例で確認しておこう。

例 1

磁束密度 $|\mathbf{B}| = 0.1\text{T}$ の一様な磁場の中にニクロム線で作られた図のような装置がある。AB は速さ $|\mathbf{v}| = 1\text{m/s}$ で移動している。四角形 ABCD は $AB=1\text{m}$ の長方形で、 \mathbf{B} はこれに垂直である。



(1) AB の両端に生ずる起電力を求めよ。

$$BC = x = x_0 + vt, \quad AB = a \quad \text{とすると磁束 } \Phi_M \text{ は } \Phi_M = axB$$

したがって起電力は

$$\phi = -\frac{d\Phi_M}{dt} = aB \frac{dx}{dt} = 1\text{m} \times 0.1\text{T} \times 1\text{m/s} = 0.1\text{V}$$

(2) $BC=1\text{m}$ の時を $t=0$ として、1秒後に回路に流れる電流を求めよ。ただし、ニクロム線の直径は 1mm 、抵抗率は $\rho = 1.09 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m}$ とする。

時刻 t ではニクロム線の長さは $2a + 2x$ 、回路の抵抗は

$$R = \rho \times (2a + 2x) / (\pi r^2) = 1.09 \times 10^{-6} \Omega \cdot \text{m} \times (2 \times 1 + 2(1+1))\text{m} / (\pi \times (0.0005)^2 \text{m}^2) = 8.33 \Omega$$

$$I = \phi / R = 0.1\text{V} / 8.33 \Omega = 0.012\text{A}$$

(3) 10秒後までに回路に発生する熱量を求めよ。

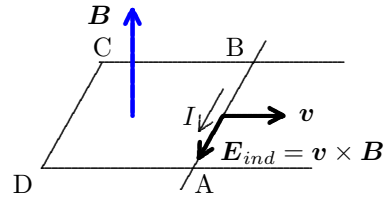
$$Q = \int_0^t I^2 R dt = \int_0^t \frac{\phi^2}{R} dt = \phi^2 \int_0^t \frac{\pi r^2 dt}{\rho(2a + 2x_0 + 2vt)} = \phi^2 \cdot \frac{\pi r^2}{\rho} \cdot \frac{1}{2v} \log \frac{t + \frac{a + x_0}{v}}{\frac{a + x_0}{v}}$$

$$= (0.1)^2 \frac{\pi \times (0.0005)^2}{1.09 \times 10^{-6}} \frac{1}{2 \times 1} \log \frac{10 + 2}{2} = 0.0065\text{J}$$

この例は、ファラデーの電磁誘導の法則の適用だと言われているが、先に述べたとおり、電荷の運動に

よるローレンツ力によって説明できる例である。

導線 AB の部分では、電界 $E_{ind} = v \times B$ が発生し、AB で、起電力 $aBv = 0.1V$ を引き起こす。電流 I は、B から A に流れる。その電流に対するアンペールの力 ($dF = Ids \times B$) は v と反対の向きに作用し、運動を阻止する方向に作用している。



最もよく取り上げられる交流発電機もその例である。

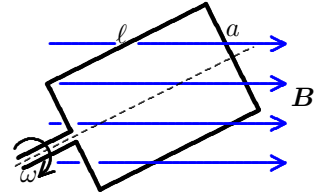
一様な磁場 B に垂直な軸の周りに、直径 $2a$ 、長さ l の長方形が角速度 ω で回転しているとする。

長方形を通過する磁束は

$$\Phi(t) = 2alB \sin \omega t$$

となる。従って、

$$\phi = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -2al\omega B \cos \omega t$$



ファラデーの電磁誘導の法則はこれらを包含した法則になっている。いずれも導線の移動にともなって、荷電粒子が移動する、という形を取っているが、電磁誘導には移動する導線は不要である。

例 2

水平面内に面積 $1m^2$ の輪型の導線が置いてある。鉛直上方に向いた一様な磁界を毎秒磁束密度 $|B| = 0.01T$ の割合で強めていった。導線での起電力は何 V か。

ファラデーの電磁誘導の法則より、誘導起電力 ϕ は

$$\phi = -\frac{d\Phi_M(t)}{dt}$$

である。 $\Phi_M(t) = \int_S \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{ndS}$ より

$$\phi = -\frac{d\Phi_M(t)}{dt} = -\frac{d}{dt} \int_S \mathbf{B}(t) \cdot \mathbf{ndS} = -\int_S \frac{d\mathbf{B}(t)}{dt} \cdot \mathbf{ndS} = -0.01T/s \cdot m^2 = -0.01V$$

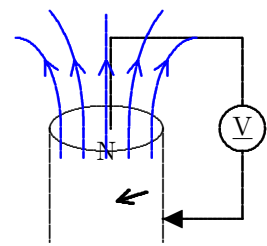
となる。

この例では、導線の運動はなく、磁力線を切るということはどこにも起こらないで、輪の中の磁力線の数が増加する従って、ローレンツ力では説明できないことである。しかし、磁場が強くなるということを利用して、平行な磁力線を領域に引き寄せると解釈すれば、たまたまそこにあった導線が磁力線を切っていることになり、この割合は $\frac{d\Phi_M(t)}{dt}$ であったと言える。その導線に荷電粒子があったとして、磁力線に固定した座標系から見ると、荷電粒子は運動しており、ローレンツ力による解釈が可能はずである。

しかし、次の単極誘導では、適用法を慎重にしなければならない。

例 3

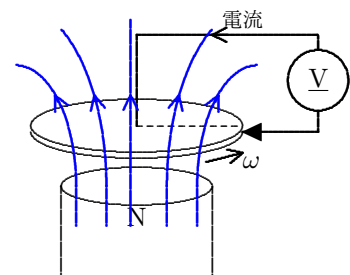
回転する円柱状の棒磁石のN極と棒磁石の側面を結んだ回路をつくる。棒磁石は閉回路の一部を形成し、導線は棒磁石の側面での接点で摺動する。導線は磁石の回転にともなって、磁力線を切ってそれぞれの部分で起電力を生ずる。各部分では $E_{ind} = v \times B$ に対応した起電力が発生し、回路全体の起電力となる。実験結果はこの解釈の正当性を示している。しかし、磁石が回転しても磁場は変化せず、 $\frac{d\Phi_M}{dt} = 0$ となる。したがって、公式 (2.91) をそのまま適用するのは間違った結果を導く。これは、導線と磁石の接触部分が整流子の役割をして、常に回路が変わっているからだ、と解釈されている。



このままでは、考えにくいので、次のような単極誘導発電器を考える。半径 a の棒状の永久磁石のN極の上に少し離れて金属の回転円板を取り付け、その円盤の中心と円周を接触させる接点を結んだ閉回路をつくる。

中心軸の周りに円盤を角速度 ω で回転すると、図の点線上では中心から r 離れたところでは $v = r\omega$ の速度で点電荷が運動し、 $v \times B$ の起電力が生じる。回路全体では、円盤上以外では回路は運動していないので起電力は生じず、結局、電流の方向は図に示したように左回りである。

一方、回転板を固定し、磁石を逆向きに回転すれば、同じことが発生するか、同価の実験が行われ、これには全く電流が流れないことがわかっている。



これは、磁石から出る磁力線が磁石に固定したものではなく、ソレノイドで発生する磁力線のように考えるとうまく説明できる。すなわち、磁場はその空間自身を特徴づける物理的な存在であって、磁石に結びついているものではない。多くの混乱は、磁力線を磁石に固定した実体として解釈することから起こっている。電磁気学を作り上げる段階では、こうしたパズルのような問題も、「近接作用」の考え方の確立のためには、一つひとつクリアして進めなければならない。

電磁誘導の法則は他の法則と深く結びついているが、他とは独立した法則であり、他から導くことはできず、電磁誘導の法則独自の法則を含んでいる。その意味で、「飛躍」があることを認識しておかねばならない。しかし、重要なことは、電磁誘導の法則なしには「相対性の原理」を電磁気学に持ち込むことはできない、という事実である。

「全ての自然法則は、我々の物理的常識から考えて同等とみなされるあらゆる観測者(座標系)にたいして、同じ形でいいあらわされねばならない」

(同等とは、ここでは「ガリレイ変換」によって結ばれた「慣性系」のことである。)

静電界を $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ とすると、誘導電界も考慮した電界 $\mathbf{E}(\mathbf{r}, t)$ では、例えば (2.49) は

$$\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}(\mathbf{r}, t), \quad \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) + \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \quad (2.92)$$

となる。ここで、静電場 $\mathbf{E}_s(\mathbf{r})$ は、電荷による電場という意味で、電荷の移動による時間依存性があるが、表記の都合により t を省略している。(2.91), (2.92) および静電場の性質 $\oint_{\Gamma} \mathbf{E}_s \cdot d\mathbf{s} = 0$ より

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_s(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} + \oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\frac{d\Phi_M(t)}{dt} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

$\text{div} \mathbf{B} = 0$ だから、閉曲線 Γ によって囲まれた2つの曲面 Σ_1, Σ_2 にはさまれた空間を V とすると、

$$\int_V \text{div} \mathbf{B} dv = \int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (\mathbf{n} \text{ は領域 } V \text{ から面 } \Sigma \text{ に対して外向きの法線ベクトル})$$

である。面の法線ベクトル \mathbf{n} を、向きをもった閉曲線 Γ の右ねじの方向の面の法線ベクトルと再定義すると、 Σ_1, Σ_2

における法線ベクトルはどちらかが $-\mathbf{n}$ となる。従って、 $\int_{\Sigma_1} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma_2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS$ 。すなわち、閉曲線 Γ によって

囲まれた曲面は任意にとれる。よって、上式の右辺の積分は、導体による閉回路 Γ が確定する限り、閉回路 Γ によって

囲まれたどの曲面 Σ に対しても同じとなる。ファラデーの電磁誘導の法則 $\phi_{emf} = -\frac{d\Phi_M(t)}{dt}$ の実験的根拠は導体による閉回路 Γ の存在を前提としている。ファラデーは、電磁誘導の法則をこの具体的な閉回路の存在から解放したと言われている。閉回路がなくても、磁場の変化によって、誘導電界が発生し、もしそこに回路 Γ があれば、それによって、誘導起電力が起こると考えたのである。上の両辺からストークスの定理を適用して、

$$\oint_{\Sigma} \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS$$

を導き、任意の閉回路 Γ 、従って、任意の Σ について、上の積分が等しいことから、電磁誘導の微分形を求めると、
いう手続きには、近接作用説という物理的観念の飛躍を契機にしている。

したがってファラデーの電磁誘導の法則は

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.93)$$

$$\text{微分形では} \quad \text{rot} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.94)$$

とも表せる。また、 \mathbf{B} をベクトルポテンシャルで表せば(真磁荷が存在しない $\rightarrow \text{div} \mathbf{B} = 0 \rightarrow \mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$)

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = -\int_{\Sigma} \frac{\partial(\text{rot} \mathbf{A})}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} (\text{rot} \mathbf{A}) \cdot \mathbf{n} dS = -\oint_{\Gamma} \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \cdot d\mathbf{s}$$

すなわち、 $\mathbf{E}_{ind}(\mathbf{r}, t) = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$ だから、回路の誘導起電力は各局所的な起電力の和となる。したがって、一般に静電場と電磁誘導を考慮した電界 \mathbf{E} は (2.92) に対応して

$$\mathbf{E} = -\text{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.95)$$

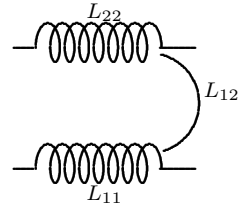
となる。

2.10 磁気エネルギー

回路 k による磁束密度 \mathbf{B}_k の磁束線が回路 i を貫く磁束 Φ_{ik} は、 $\mathbf{B}_k = \text{rot } \mathbf{A}_k$ より、

$$\Phi_{ik} = \int_{\Sigma_i} \mathbf{B}_k \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma_i} \text{rot } \mathbf{A}_k \cdot \mathbf{n} dS = \oint_{\Gamma_i} \mathbf{A}_k \cdot d\mathbf{s} \quad (2.96)$$

$$\mathbf{A}_k(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_k} \frac{I_k d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.97)$$



となる。これらを重ね合わせると、回路 i がつくる磁束も含めて、回路 i を貫く全ての磁束は次のようになる。

$$\Phi_i = \sum_k \Phi_{ik} = \sum_k L_{ik} I_k \quad (2.98)$$

$$L_{ik} = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint_{\Gamma_i} \oint_{\Gamma_k} \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_k|} \quad (\text{ノイマンの公式}) \quad (2.99)$$

となる。 L_{ik} を、 $i = k$ のとき自己インダクタンス、 $i \neq k$ のとき相互インダクタンスという。

$-q_m(\mathbf{r} - \mathbf{d}/2), +q_m(\mathbf{r} + \mathbf{d}/2)$ の磁気双極子の磁束密度 \mathbf{B} での位置エネルギーは

$$\begin{aligned} & - \int_{\infty}^{\mathbf{r}-\mathbf{d}/2} \mathbf{B}(\mathbf{r}') (-q_m) d\mathbf{r}' - \int_{\infty}^{\mathbf{r}+\mathbf{d}/2} \mathbf{B}(\mathbf{r}') (+q_m) d\mathbf{r}' \\ & = -q_m \int_{\mathbf{r}-\mathbf{d}/2}^{\mathbf{r}+\mathbf{d}/2} \mathbf{B}(\mathbf{r}') d\mathbf{r}' = -q_m \mathbf{B}(\mathbf{r}) \mathbf{d} = -\mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{m} \end{aligned}$$

だから、輪電流 I が作る磁束密度 \mathbf{B} での磁化 \mathbf{M} の位置エネルギーは

$$\begin{aligned} W & = - \int_V \mathbf{B}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) dv \\ & = - \int_V \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \mathbf{M}(\mathbf{r}) dv = -I \oint \left\{ \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{M}(\mathbf{r}) \times (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} dv \right\} \cdot d\mathbf{s}' \end{aligned}$$

したがって、磁気双極子のベクトルポテンシャル (2.78) を用いると

$$W = -I \oint \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s} \quad (2.100)$$

となる。磁場の中を電流が流れているときのポテンシャルエネルギーは、磁場を発生する原因によらず同じだと考えられるから、磁場を一般化して考えると、ベクトルポテンシャル \mathbf{A} の中で電流のポテンシャルエネルギーは (2.100) であると言える。したがって閉回路を流れる電流 I_1 が作る磁場の中を閉回路を流れる電流 I_2 のポテンシャルエネルギーは (2.73) より

$$W_{12} = -I_2 \oint \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I_1 d\mathbf{s}_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} \cdot d\mathbf{s}_2$$

となる。 n 個の電流回路がある場合

$$W = - \sum_{(i,k)} \frac{\mu_0}{4\pi} I_i I_k \oint \oint \frac{d\mathbf{s}_i \cdot d\mathbf{s}_k}{|\mathbf{r}_k - \mathbf{r}_i|} \quad (2.101)$$

となる。したがって

$$W = \sum_{(i,k)} W_{ik} = - \sum_{(i,k)} L_{ik} I_i I_k = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} L_{ik} I_i I_k \quad (2.102)$$

$$W_i = -I_i \Phi_i, \quad \Phi_i = \sum_{k \neq i} \Phi_{ik} = \sum_{k \neq i} L_{ik} I_k \quad (2.103)$$

Φ_i は該当する回路以外の回路による回路を貫く磁束である。これらはいずれも、系の全エネルギーを表現したものではない。なぜなら、これは回路の電流を一定に保ちながら現在の配置に移動させるのに必要なエネルギーを表しているのであって、回路の電流を一定に保つためには電気的な仕事を外部から与えなければならないからである。

回路 i を移動させると、回路系のエネルギー変化 dU'_m はそれを動かすのに要する力学的な仕事 dW と、磁束の変化によるエネルギー変化 $I_i d\Phi_i$ の和である。

$$dU'_m = dW + \sum I_i d\Phi_i = -\frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} dL_{ik} I_i I_k + \sum_i I_i \sum_{k \neq i} dL_{ik} I_k = -dW$$

したがって

$$U'_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_{k \neq i} L_{ik} I_i I_k \quad (2.104)$$

となる。回路は他の回路から力を受けるだけでなく、自己の電流からも力 $d\mathbf{F} = I d\mathbf{s} \times \mathbf{B}$ を受ける。したがって、(2.102) と同様に

$$W = -\frac{1}{2} LI^2 \quad (2.105)$$

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint \frac{d\mathbf{s} \cdot d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \quad (2.106)$$

となる。 L は自己インダクタンスである。回路の自己エネルギーは回路の各部分について回路系と同様の考察をすると

$$U_m = \frac{1}{2} LI^2 \quad (2.107)$$

となる。よって自己エネルギーを含めた回路系の全体のエネルギーは

$$U_m = \frac{1}{2} \sum_i \sum_k L_{ik} I_i I_k \quad (2.108)$$

となる。

U_m が確かに磁場のエネルギーであることを自己エネルギーの場合について確かめておこう。

$$\begin{aligned} U_m &= \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \oint I d\mathbf{s} \cdot \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= \frac{1}{2} \oint I d\mathbf{s} \cdot \frac{\mu_0}{4\pi} \oint \frac{I d\mathbf{s}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = \frac{1}{2} \oint I d\mathbf{s} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int \mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv \\ &= \frac{1}{2} \int \text{rot } \mathbf{H} \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) dv = \frac{1}{2} \int \{ \mathbf{H} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) \} dv = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \end{aligned}$$

(公式 $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$ を適用、またガウスの定理を用いて $\int \text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{H}) dv = 0$)
すなわち、静磁場のエネルギーは

$$U_m = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv \quad (2.109)$$

$$w_m = \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} \quad w_m : \text{静磁場のエネルギー密度} \quad (2.110)$$

と表される。これは、電場のエネルギー (2.16) の導出に対応している。一般的には、Maxwell 方程式を用いて、後で証明する。

自己インダクタンスの計算には (2.99) のままでは困難を伴う場合がある。積分が $r = 0$ で発散するからである。計算には、導線に太さと、そこでの電流分布を考慮する必要がある。

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi I^2} \oint \oint \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{j}'(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv dv' \quad (2.111)$$

しかし、いずれにしても、電流回路の立場から見ると、これらは小さくなり、実用性には問題が起らない。

電磁気学の最も権威がある教科書、高橋秀俊著「電磁気学」には、半径 a 、長さ l の円筒状導線を電流 I が一様に流れるとすると、

$$L = \frac{\mu l}{2\pi} \left(\log \frac{2l}{a} - \frac{3}{4} \right) \quad (2.112)$$

一方、アンペールの法則を用いて、中心から r での磁束密度 B は、

$$2\pi r B = \mu \frac{r^2}{a^2} I, \quad B = \frac{\mu r I}{2\pi a^2}$$

となり、磁気エネルギー (2.109) を導線内部だけのエネルギーに限定して、自己エネルギー の式 (2.107) より、

$$L = \frac{\mu l}{8\pi} \quad (2.113)$$

が得られる。また高橋氏の本には、半径 a の導線で半径 R の円形回路を作ったときの自己インダクタンスは

$$L = \mu R \left(\log \frac{8R}{a} - \frac{7}{4} \right) \quad (2.114)$$

などとなっている。

相互インダクタンスの例を示しておこう。

同一平面内で、無限に長い導線から中心が距離 d だけ離れた半径 a ($a < d$) のコイルを考える。導線に電流 I が流れていると円周上の点 $P(r, \theta)$ における磁界の強さ H は $2\pi(d + r \cos \theta)H = I$ より

$$H = \frac{I}{2\pi(d + r \cos \theta)}$$

したがって、円の r から $r + dr$, ($< d$) を通る磁束 $d\Phi$ は

$$d\Phi = \int \mu_0 H r dr d\theta = \frac{\mu_0 I r dr}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{d + r \cos \theta} = \frac{\mu_0 I r dr}{\sqrt{d^2 - r^2}}$$

したがって

$$\Phi = \int_0^a d\Phi = \mu_0 I \int_0^a \frac{r dr}{\sqrt{d^2 - r^2}} = \mu_0 I (d - \sqrt{d^2 - a^2})$$

$\Phi = LI$ より

$$L = \mu_0 (d - \sqrt{d^2 - a^2}) \quad (2.115)$$

となる。

同様に距離 d 離れた長さ l の 2 直線の相互インダクタンスを求めてみよう。公式 (2.99) は回路の部分 i, k はどちらも閉回路を想定している。これを各部分に分割して $L_{i,k} = L_{i,k}^{(1)} + L_{i,k}^{(2)} + \dots$ と分割して考えてもよい。したがって相互インダクタンス L は

$$L = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_0^l \int_0^l \frac{dx_1 dx_2}{r_{12}}$$

となる。 $r_{12} = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + d^2}$ だから、積分公式

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)^2 + b^2}} = \log(x-a + \sqrt{(x-a)^2 + b^2}) + c$$

$$\int \log(\sqrt{x^2 + a^2} \pm x) dx = x \log(\sqrt{x^2 + a^2} \pm x) \mp \sqrt{x^2 + a^2} + c$$

などを用いて積分すると

$$L = \frac{\mu_0 l}{2\pi} \left\{ \log(\sqrt{1 + (l/d)^2} + l/d) - \sqrt{1 + (d/l)^2} + d/l \right\}$$

となる。 $l \gg d$ のとき、

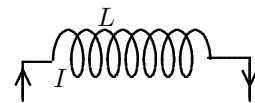
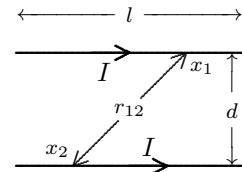
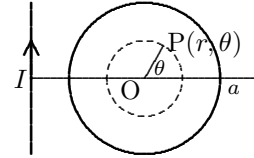
$$L \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} (\log \frac{2l}{d} - 1) \approx \frac{\mu_0 l}{2\pi} \log \frac{2l}{d} \quad (2.116)$$

となる。

導線を同一軸の周りに一様な巻き線密度で巻いた円筒状のコイルをソレノイド (solenoid) といった。

その磁束密度は

$$B = \mu H = \mu_0 n I \quad (2.117)$$



単位長さ当たりの巻き数 n , 長さ l , 断面積 S (半径 a) のソレノイドに電流 I が流れているとすると, ソレノイドを貫く磁束 Φ は

$$\Phi = nlBS = \mu_0 n^2 lSI \quad (2.118)$$

となるから ($l \gg a$), 自己インダクタンスは

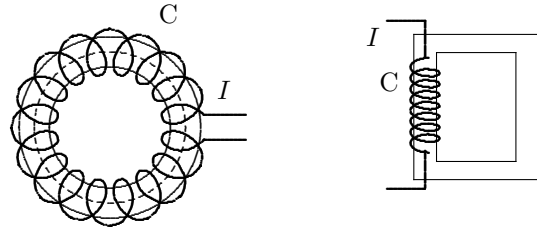
$$L = \mu_0 n^2 lS \quad (2.119)$$

となる。これは簡単にエネルギーの2つの表現

$$\frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2} \int \mathbf{H} \cdot \mathbf{B} dv = \frac{1}{2} \int nI \cdot \mu_0 nI dv = \frac{1}{2} \mu_0 (nI)^2 lS = \frac{1}{2} \mu_0 n^2 lSI^2$$

より求めることもできる。

図のような環状鉄心をもったソレノイドを考える。環状鉄心の中心線の長さを l , コイル C の巻き数 N , 電流 I とする。コイル C の磁束線は鉄心によって一切外部に漏れないとする (これにはいくつかの議論が必要である)。



このとき直線状のソレノイドの単位長さ当たりの巻き数 n を N/l で置き換えることができる。したがってコイルを貫く磁束は

$$\Phi = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} I \quad (2.120)$$

となり, 自己インダクタンスは

$$L = \frac{\mu_0 N^2 S}{l} \quad (2.121)$$

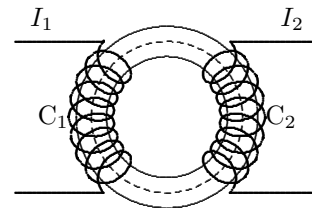
となる。

中心線の長さが l の1つの環状鉄心に, 巻き数 N_1 のコイル C_1 (1次側) に電流 I_1 が流れ, 巻き数 N_2 のコイル C_2 (2次側) に電流 I_2 が流れているとする。コイル C_1 がつくる磁束がコイル C_2 を貫く磁束は

$$\Phi_{21} = \frac{\mu_0 N_1^2 S}{l} I_1 \times \frac{N_2}{N_1} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} I_1 \quad (2.122)$$

となり, 相互インダクタンスは $L_{12} = L_{21}$ は

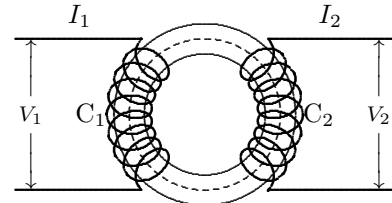
$$L_{12} = L_{21} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S}{l} \quad (2.123)$$



となる。

鉄心内に生じる磁束を Φ とし, 鉄心の外部に一切漏れないとして, 電磁誘導の法則を適用する。

各コイルを貫く磁束は, $\Phi_1 = N_1 \Phi$, $\Phi_2 = N_2 \Phi$ である。1次側ではコイル C_1 の抵抗を無視すると, $V_1 - N_1 \frac{d\Phi}{dt} = 0$, 2次側での誘導起電力 V_2 は $V_2 = -N_2 \frac{d\Phi}{dt}$ となる。したがって, 1次側と2次側の電圧の比は



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (2.124)$$

となる。

2.11 準静的取り扱いと電流回路

以上の取り扱いを「準静的」という。次節以下では磁界に関するアンペールの法則に変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を考慮に入れる。準静的取り扱いとはこの変位電流を考慮しない取り扱いである。しかし、電磁気学の体系としては大きな問題点を持っている(論理的矛盾ではない)。簡単のために、真空を考えると、基本方程式は

$$\begin{aligned} \text{rot } \mathbf{H} &= \mathbf{j}, & \text{div } \mathbf{E} &= \frac{\rho}{\epsilon_0} \\ \text{rot } \mathbf{E} &= -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, & \text{div } \mathbf{H} &= 0 \end{aligned}$$

となるが、これより、 $\text{div rot } \mathbf{H} = 0$ を用いると、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ となる。これは電荷の保存則(連続の式) $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ と相容れない。電荷の保存則は物理学の最も基本的な原理である。なぜこんなことになってしまったのか。静電場、静磁場の取り扱いから、ファラデーの電磁誘導の法則を経て非定常状態を初めて取り扱うようになった。非定常状態に移行するとき、電磁誘導の法則だけでなく、他の法則、アンペールの法則も非定常に対応するような修正が予想される。準静的扱いはこれを放置したままの取り扱いであり、適用が限定されるのは当然のことである。

既に、エネルギー、電流の保存則の考えから、電束電流を電流の一種と見なす方が合理的であることを見てきた。

平行板コンデンサーに非定常電圧をかけ、電流 $I(t)$ が回路に流れていたとする。導線にはアンペールの法則に従う磁界が発生する。導線を一周する閉曲線 Γ について、アンペールの法則を適用すると

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_1 dS = I(t) \quad (2.125)$$

となるが、図のように、 Γ を端とする極板の間を通る曲面 S_2 をとると、 $\mathbf{j} = 0$ だから

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_2 dS = 0 \quad (2.126)$$

となり、統一した議論ができなくなる(これを通常、矛盾といっているが、論理的「矛盾」ではなく、法則の適用範囲の問題であり、物理学の問題である。「パラドックス」に近い)。極板間の変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を電流と見なすと

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2 dS = I(t) \quad (2.127)$$

となり、一致する。

式(2.127)の最後の等式は既に(2.46)で導いているが、もっと一般的に成り立つことは次のようにしてわかる。

$\int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_1 dS = 0$ である。閉局面 $S_1 + S_2$ について、外向きの法線ベクトル \mathbf{n} は、 $\mathbf{n} = -\mathbf{n}_1$, $\mathbf{n} = \mathbf{n}_2$ となり、

$\text{div } \mathbf{D} = \rho$, $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$, およびガウスの定理を用いると

$$\begin{aligned} \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n}_2 dS &= \int_{S_1} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S_1+S_2} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{d}{dt} \int_{S_1+S_2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \frac{d}{dt} \int_V \rho dv = - \int_V \text{div } \mathbf{j} dv = - \int_{S_1+S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = - \int_{S_1} \mathbf{j} \cdot (-\mathbf{n}_1) dS - \int_{S_2} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n}_2 dS = I(t) \end{aligned}$$

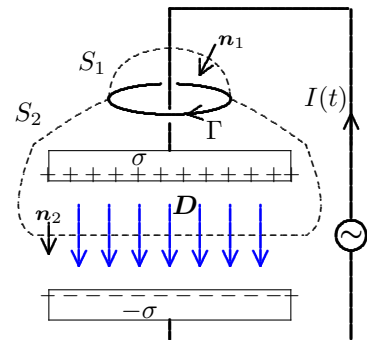
したがって、

アンペールの法則は、電流に変位電流 $\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ を含めたとき、初めて一般性が得られる

ことがわかった。

学生諸君は既に、フィンマン 岩波現代文庫「物理法則はいかに発見されたか」江沢洋訳 を読んでのことだと思えます。そのなかで、ニュートンが彼の法則を如何に探り当てたかの説明の後、

「偉大な仕事をした次の人はマクスウェルで、電気と磁気の法則を発見しました。彼のやり方は、次のようなものでした。彼より先にファラデーやその他の人々が発見していた電磁気学の諸法則をまずならべてみた。よくよく見る



と数学的につつまが合わない。それを直すのに彼はある方程式に一つ余分の項を加えたのです。渦柱や遊び車が空間をうめているという模型を自分で考え出し、それをいじっているうちにこの余分の項を思いついた。つまり彼は新しい法則を見いだしたわけですが、誰も注意を払いませんでした。渦柱、遊び車なんて信じる人はいなかったからです。私たちも今日それを信じません。しかし彼の見いだした方程式は正しかった。論理は誤りでも答えは正しいと言うことがあるわけです。」

と言っています。このメモでは無視した電磁気学成立の科学的側面も、科学の本質の理解を助けてくれるはずですよ。

次節で明らかになるとおり、準静的取り扱い、場は変化するが、考えている物体の最大の長さに相当する距離を光が通過するのに要する時間内では、場はほとんど変化しない、すなわち場が伝播する有限の速度は考えない取り扱いである、と言える。もっと簡単にいえば、準静的取り扱いとは電磁波に関わる議論を無視する取り扱い、といえる。

準静的取り扱いが行える一つの条件を考えておこう。

導体内の電界を

$$\mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_0 \sin \omega t$$

とする。電流密度は

$$\mathbf{j}(t) = \sigma \mathbf{E}(t) = \sigma \mathbf{E}_0 \sin \omega t, \quad \sigma: \text{電気伝導率}$$

一方、変位電流密度 $\mathbf{j}_D(t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}$ は

$$\mathbf{j}_D(t) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \epsilon \omega \mathbf{E}_0 \cos \omega t$$

である。2乗平均の比は

$$\frac{|\mathbf{j}_D|}{|\mathbf{j}|} = \frac{\epsilon \omega}{\sigma}$$

準定常として扱うためには、

$$\omega \ll \frac{\sigma}{\epsilon}$$

金属は $\sigma \sim 10^8 / \Omega \text{m}$ 。 $\epsilon \sim 10 \epsilon_0 \sim 10^{-10} \text{F/m}$ だから、 $\omega \ll 10^{18} \text{s}^{-1}$ となる。 $\omega \sim 10^3 \text{s}^{-1}$ 程度の普通の交流では、変位電流を考慮しなくて良い。(砂川重信著「電磁気学」)

準静的取り扱いでは、電荷の保存則 $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0$ が $\text{div } \mathbf{j} = 0$ となった。したがって、また、 $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$ の取り扱いといえる。

さらに、導体をオームの法則 (2.49) ($\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$) で扱うとすると、 $\text{div } \mathbf{j} = 0$ は $\text{div } \mathbf{E} = 0$ を意味し、結局、電荷について、導体内では $\rho = 0$ となる。すなわち、何らの起電力もない導体の領域では、電荷は全く存在しない、あるいは、導線では電荷は存在しない、のである。

$\text{div } \mathbf{j} = 0$ は導線での電流 I がどこで計っても同じであることを意味する。コンデンサーでは電束電流を考慮して電流の保存を考えると、回路全体でキルヒホッフの法則が成り立つ。こうした扱いを電流回路の準静的取り扱いとする。式に基づいて議論できるが、ここではこうした直感的な扱いに止める。

以下、この節では、少しだけ、準静的取り扱いで電流回路を調べる。巻き数 N 、半径 a の円形回路の抵抗は R 、自己誘導係数を L とする。これが一様な磁場 \mathbf{B} の中で、磁場に直角な直径を軸として角速度 ω で回転しているとする。

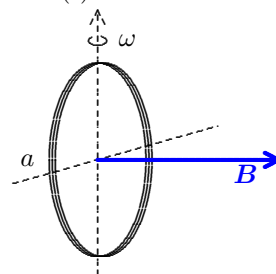
電流を $I(t)$ とすると、回路を貫く磁束 $\Phi_M(t)$ は自己誘導による $LI(t)$ と一様な磁場による磁束の和で

$$\begin{aligned} \Phi_M(t) &= LI(t) + N\pi a^2 \mu_0 H \cos \omega t \\ -\frac{d\Phi_M(t)}{dt} - RI(t) &= 0 \end{aligned}$$

より

$$L \frac{dI(t)}{dt} + RI(t) = N\mu_0 \pi a^2 H \omega \sin \omega t$$

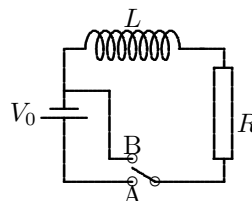
となる。



定常解は $I(t) = \frac{\mu_0 \pi a^2 \omega N H}{\sqrt{R^2 + \omega^2 L^2}} \sin(\omega t - \phi)$, $\phi = \frac{\omega L}{R}$ である。

電流は磁場をつくり、電流の変化は電磁誘導を引き起こすが、電流の変化が余り速くないときは直線的な導線がつくる磁場は余り強くなく、電磁誘導も大きくない。これに対し、導線を何重にも巻いたコイル、特に「強磁性体の磁心」をもったコイルは電磁誘導の効果が大きくなる。こうしたコイルとコンデンサー、抵抗を持った回路を考える。導線における電磁誘導、抵抗を無視し、コイル、コンデンサー、抵抗を「回路素子」とし、これらの導線で連結されたものを回路と考える。C-R 回路を使うと、静電エネルギーはコンデンサーの電場のエネルギーとして蓄えられていたことが良く理解できた。磁場のエネルギーの導出は分かりにくかったが、コイルの自己エネルギーはつぎの例を用いると良く理解できる。

図において、はじめ $t=0$ で A 側にスイッチをつないで、抵抗 R は内部抵抗を含むとして、電流 $I(t)$ を求めよ。次に十分時間がたつてから、スイッチを B 側に倒したときの様子を調べよ。またそのとき抵抗で発生する熱エネルギーを求めよ。



電池から流れ出る電流を I とすると $V_0 - L \frac{dI}{dt} = IR$ 。

$$\frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}(I - \frac{V_0}{R}) \quad \text{解くと} \quad \log|I - \frac{V_0}{R}| = -\frac{R}{L}t + c, \quad t=0 \text{ で } I=0 \text{ より} \quad I(t) = \frac{V_0}{R}(1 - e^{-Rt/L})$$

十分時間がたつと、 $I = \frac{V_0}{R}$

スイッチを B に倒す ($t=0$) と $-L \frac{dI}{dt} = IR$ が成り立つ。

$$\log I(t) = -\frac{R}{L}t + c, \quad t=0 \text{ で } I = \frac{V_0}{R} \text{ より} \quad I(t) = \frac{V_0}{R}e^{-Rt/L}$$

$$\text{Joule 熱は} \quad \int_0^\infty RI^2 dt = \frac{V_0^2}{R} \int_0^\infty e^{-2Rt/L} dt = \frac{1}{2}L(\frac{V_0}{R})^2$$

これは、コンデンサーの電場のエネルギーが $\frac{1}{2}LI^2$ であることを示している。

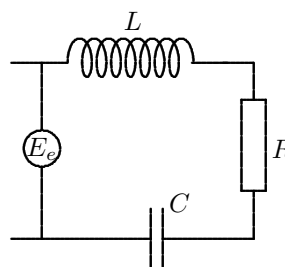
一つの回路にコイル、抵抗、コンデンサー、および起電力 $E_e(t) = E_0 \cos \omega_0 t$ の電源が一つだけの回路を考える。

$$E_e(t) - L \frac{dI}{dt} - RI - \frac{Q}{C} = 0 \quad (2.128)$$

$Q = \int^t I dt$ だから

$$L \frac{dI}{dt} + RI + \frac{\int^t I dt}{C} = E_e(t)$$

$$L \frac{d^2 I}{dt^2} + R \frac{dI}{dt} + \frac{I}{C} = -E_0 \omega_0 \sin \omega_0 t \quad (2.129)$$



その他、2階の微分方程式が関与する電流回路の学習は、どこにでも掲載されているから、必要に応じて学習しておいて欲しい。

また、工学的に重要な交流回路については、必要に応じて、きっちり学習してほしい。

2.12 マックスウェル・アンペールの法則と Maxwell の方程式

これまでの議論から、電流やエネルギーの保存から電流に変位電流を含める方が自然に思える。磁界の強さに関するアンペールの法則の電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ に $\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$: 変位電流密度を考慮すると、

マックスウェル・アンペールの法則

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.130)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

となる。この拡張が正当であったかどうかは、後で電磁波の発生で確認される。ここで、これまでの法則をまとめておこう。

Maxwell の方程式

1 電場に関するガウスの法則

$$\int_{\Sigma} \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = \int_V \rho(\mathbf{r}, t) dv \quad (2.131)$$

$$\text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t) = \rho(\mathbf{r}, t) \quad (2.132)$$

2 磁場に関するガウスの法則

$$\int_{\Sigma} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) \cdot \mathbf{n} dS = 0 \quad (2.133)$$

$$\text{div } \mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = 0 \quad (2.134)$$

3 マックスウェル・アンペールの法則

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = \int_{\Sigma} \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \right\} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.135)$$

$$\text{rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.136)$$

4 ファラデーの電磁誘導の法則

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.137)$$

$$\text{rot } \mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = - \frac{\partial \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} \quad (2.138)$$

さらに 電荷の保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \mathbf{j} = 0 \quad (2.139)$$

が成り立つ。しかし、電荷の保存則 (2.139) は Maxwell の方程式に含まれる。マックスウェル・アンペールの法則 (2.136) の発散をとると

$$\text{div rot } \mathbf{H}(\mathbf{r}, t) = \text{div } \mathbf{j}(\mathbf{r}, t) + \frac{\partial \text{div } \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$$

左辺は 0 であり、右辺に電場に関するガウスの法則 (2.132) を適用すると電荷の保存則 (2.139) が得られるからである。マックスウェル・アンペールの法則はアンペールの法則 $\text{rot } \mathbf{H} = \mathbf{j}$ の電流 \mathbf{j} に変位電流

$\frac{\partial \mathbf{D}(\mathbf{r}, t)}{\partial t}$ を考慮したものであり、これは電流の保存則を常に成り立たす為に要請された修正だったから当然の帰結といえる。

Maxwell の方程式は複数個の方程式が入り交じって見通しが持ちにくい。そこで一つの見方を知っておこう。

$$\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}, \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho \quad (2.140)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E}, \quad \text{div } \mathbf{B} = 0 \quad (2.141)$$

と並べてみると、力学の運動方程式と類似の構造をしていることがわかる。後半の方程式はそれぞれの空間的な条件を与える式と考えられる。(2.140) の前半の式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{D} = \text{div } \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \text{div} (\text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{j}) = -\text{div } \mathbf{j} = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

また (2.141) の前半の式を用いると

$$\frac{\partial}{\partial t} \text{div } \mathbf{B} = \text{div } \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\text{div } \text{rot } \mathbf{E} = 0$$

となる。すなわち、それぞれの後半の方程式を微分した方程式は前半の方程式によって自動的に満たされる。したがって、初期に後半の方程式が満たされていると、それ以後2つの後半の式は自動的に満たされることになる。その意味で後半の2つの式は前半の方程式の「補足的な条件」を与える式と見なすことができる。またこうした見方は、以下のポテンシャルを用いた方程式の表現からもよくわかる。

Maxwell の方程式をポテンシャルで表してみる。ただし、その際いくつかの条件を伴うが、real な存在は \mathbf{E}, \mathbf{B} などの場の量であるということを基礎にする。

(2.134) の $\text{div } \mathbf{B} = 0$ より $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ となるベクトルポテンシャル \mathbf{A} が存在し、これを (2.138) に代入して $\text{rot} (\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}) = 0$ となるから

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \quad (2.142)$$

を満たす ϕ が存在する。これが (2.95) である。

\mathbf{A}, ϕ は一義的には決まらず、任意の関数 χ に対して

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \text{grad } \chi, \quad \phi' = \phi + \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.143)$$

は同じ \mathbf{E}, \mathbf{B} を与える。(2.143) を変換と見なしたとき、これをゲージ変換という。そこで、媒質の ϵ, μ が一定の一様な等方性媒質 $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を仮定して、 $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$, および (2.142) を (2.136), (2.132) に代入して

$$\text{rot } \text{rot } \mathbf{A} + \epsilon \mu \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} + \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = \mu \mathbf{j} \quad (2.144)$$

$$\nabla^2 \phi + \text{div } \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.145)$$

(2.144), (2.145) の特解の一つを \mathbf{A}', ϕ' に選び、

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = \text{div } \mathbf{A}' + \epsilon \mu \frac{\partial \phi'}{\partial t} + \nabla^2 \chi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \chi}{\partial t^2} = 0$$

となるように χ を選ぶと

$$\text{div } \mathbf{A} + \epsilon \mu \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0 \quad (2.146)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j} \quad (2.147)$$

$$\nabla^2 \phi - \epsilon \mu \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.148)$$

となる。(2.146)は Lorentz の条件といい、(2.147), (2.148)で決まるポテンシャルを Lorentz ゲージのポテンシャルという。

一般に非斉次な波動方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + g(\mathbf{r}, t), \quad u(\mathbf{r}, t)|_{t=-\infty} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=-\infty} = 0 \quad (2.149)$$

の解は一意的であり、(3.106)より

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{g(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.150)$$

である(ただし一般の初期値問題に対する解は(3.105)を参照)。したがって(2.147),(2.148)の解は $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ とおくと

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.151)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.152)$$

となる。(2.151), (2.152)は遅延ポテンシャルと言われる。(2.151), (2.152)は定常状態での(2.72), (2.10)の自然な拡張になっている。式(2.151), (2.152)は場の量 \mathbf{A} , ϕ が源の量 \mathbf{j} , ρ の現在の時刻 t の値ではなく、時刻 $t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c$ の値によって決まり、それは点 \mathbf{r}' から \mathbf{r} に速度 a で到達する時刻だけ先行した時刻の源の量で決まることを示している。

確かに、(2.151), (2.152)は Lorentz の条件(2.146)を満たしている。
(2.151), (2.152)を対称性の良い形に変形して、

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int dv' \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int dv' \rho(\mathbf{r}', t') \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ \text{div } \mathbf{A} + \epsilon\mu \frac{\partial \phi}{\partial t} &= -\frac{\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int dv' \left\{ \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') \cdot \nabla' + \rho(\mathbf{r}', t') \frac{\partial}{\partial t'} \right\} \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &\quad t' \text{は部分積分, } \mathbf{r}' \text{はガウスの定理, } \mathbf{j}, \rho \text{どちらも無限の遠方で0を用いて} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \int_{-\infty}^{\infty} dt' \int dv' \left\{ \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t') + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t')}{\partial t'} \right\} \frac{\delta(t - t' - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \\ &= 0 \quad \text{電荷の保存則で0} \end{aligned}$$

また、方程式(2.147), (2.148)には

$$\begin{aligned} \mathbf{A}(\mathbf{r}, t) &= \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}', t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \\ \phi(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t + |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \end{aligned}$$

なる解も存在することがわかる。これを先進ポテンシャルという。私には確信がありませんが、ファインマンによると、量子電磁力学形成時の電子の自己作用の議論以前には「使われたことがない」そうです。

ベクトルポテンシャルの任意性を $\text{div } \mathbf{A} = 0$ という条件で固定する方法もある。

Helmholz の定理(3.69)より、任意のベクトル \mathbf{A} は $\mathbf{A} = \mathbf{A}_{//} + \mathbf{A}_{\perp}$, $\text{rot } \mathbf{A}_{//} = 0$, $\text{div } \mathbf{A}_{\perp} = 0$ と分解できる。 $\mathbf{A}_{//} = \text{grad } \chi$ とおいて

$$\mathbf{A} = \text{grad } \chi + \mathbf{A}_{\perp}, \quad \phi = \phi_c - \frac{\partial \chi}{\partial t} \quad (2.153)$$

とすると、 \mathbf{A}_{\perp} , ϕ_c は

$$\mathbf{E} = -\text{grad } \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\text{grad } \phi_c - \frac{\partial \mathbf{A}_{\perp}}{\partial t}, \quad \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A} = \text{rot } \mathbf{A}_{\perp} \quad (2.154)$$

によって \mathbf{A} , ϕ と同じ \mathbf{E} , \mathbf{B} を与える。(2.154)を(2.132), (2.136)に代入して

$$\nabla^2 \phi_c = -\frac{\rho}{\epsilon}, \quad \nabla^2 \mathbf{A}_{\perp} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}_{\perp}}{\partial t^2} = -\mu(\mathbf{j} - \epsilon \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi_c}{\partial t})$$

が得られる。条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ によるポテンシャルの決め方を Coulomb ゲージという。したがって Coulomb ゲージのポテンシャルは

$$\text{div } \mathbf{A} = 0 \quad (2.155)$$

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \epsilon\mu \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mu \mathbf{j}_\perp \quad (2.156)$$

$$\nabla^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon} \quad (2.157)$$

を満たす。ここで (2.156) の右辺の \mathbf{j}_\perp は

$$\mathbf{j}_\perp \equiv \mathbf{j} - \epsilon \cdot \text{grad } \frac{\partial \phi}{\partial t} = \mathbf{j} - \epsilon \cdot \text{grad } \frac{1}{4\pi\epsilon} \int_V \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} \frac{1}{r} dv' = \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \text{grad } \int_V \nabla' \cdot \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \frac{1}{r} dv'$$

右辺を部分積分し、面積積分の項を $\mathbf{j}(\mathbf{r}', t)$ が $|\mathbf{r}'|$ が十分大きいところで 0 として (3.71) を考慮すると

$$\mathbf{j}_\perp = \mathbf{j} - \frac{1}{4\pi} \text{grad } \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \nabla' \frac{1}{r} dv' = \mathbf{j} + \frac{1}{4\pi} \text{grad } (\nabla \cdot \int_V \frac{\mathbf{j}'}{r} dv') = \mathbf{j} - \mathbf{j}_{//} \quad (2.158)$$

となる。

(2.156), (2.157) に (2.150), (3.79) を適用して

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \int \frac{\mathbf{j}_\perp(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.159)$$

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \int \frac{\rho(\mathbf{r}', t)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (2.160)$$

となる。Coulomb ゲージのベクトルポテンシャルは \mathbf{j}_\perp のみから引き起こされる。またスカラーポテンシャルは静電場のクーロンの法則であり、無限の速さで電荷による影響が伝わる表現をしている。したがって、電磁波はベクトルポテンシャル $\mathbf{A}(\mathbf{r}, t)$ を通してのみ伝達されるが、Coulomb ゲージの条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ より、電磁波は常に横波であることを意味している (平面波では $\mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$, $\mathbf{k} \cdot \mathbf{B} = 0$ となる)。しかし、電界 \mathbf{E} は (2.142) で表され、結果として電界の振動も有限の速度で伝播する。

境界条件について整理しておこう。簡単のため、物体は静止しているとし、物体 1 と 2 が接しているとする。電荷の保存則 (2.139), Maxwell の方程式 (2.132)~(2.138) を境界面をはさむ底面積 ΔS , 十分厚さ Δd が薄い微小体積 $\Delta V = \Delta S \Delta d$ にわたって積分すると、ガウスの定理 (3.58), (3.59) を適用して

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) \Delta S = -\frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \frac{\Delta d}{2} + \rho_2 \frac{\Delta d}{2}) \Delta S$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) \Delta S + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \Delta d \Delta S = 0$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) \Delta S = (\rho_1 \frac{\Delta d}{2} + \rho_2 \frac{\Delta d}{2}) \Delta S$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) \Delta S - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \Delta d \Delta S = (\mathbf{j}_1 \frac{\Delta d}{2} + \mathbf{j}_2 \frac{\Delta d}{2}) \Delta S$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) \Delta S = 0$$

となる。

さらに、 $\Delta d \rightarrow 0$ の極限をとる。境界面での真電荷密度を σ_t , 面伝導電流密度を \mathbf{J}_c とすると

$$\lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\rho_1 \frac{\Delta d}{2} + \rho_2 \frac{\Delta d}{2}) = \sigma_t, \quad \lim_{\Delta d \rightarrow 0} (\mathbf{j}_1 \frac{\Delta d}{2} + \mathbf{j}_2 \frac{\Delta d}{2}) = \mathbf{J}_c \quad (2.161)$$

したがって境界では

$$\begin{aligned} \mathbf{n} \cdot (\mathbf{j}_2 - \mathbf{j}_1) &= -\frac{\partial \sigma_t}{\partial t} \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) &= 0, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) &= \sigma_t \\ \mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) &= \mathbf{J}_c, & \mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) &= 0 \end{aligned} \quad (2.162)$$

が成り立つ。また場を決定するためには等方性の条件 ($\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu \mathbf{E}$, $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$, σ ; 電気伝導率) などの条件が必要となる。

(2.136) と \mathbf{E} の積から, (2.138) と \mathbf{H} の積を引いて

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} + \mathbf{E} \cdot \text{rot} \mathbf{H} - \mathbf{H} \cdot \text{rot} \mathbf{E}$$

公式 $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot} \mathbf{B}$ を適用して

$$\mathbf{E} \cdot \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \cdot \mathbf{H} = -\mathbf{E} \cdot \mathbf{j} - \text{div}(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}$ を仮定し, 両辺の体積積分を行うと

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} (\mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv = - \int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv - \int (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。 $\int \mathbf{E} \cdot \mathbf{j} dv$ はジュール熱の発生による電磁的エネルギーの損失を表している。一方 $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は単位面積当たりの単位時間に通過するエネルギー割合を表している。したがってエネルギー保存の式は

$$\frac{dU_{em}}{dt} = - \int \sigma \mathbf{E}^2 dv - \int \mathbf{S} \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.163)$$

$$U_{em} = \int u_{em} dv, \quad u_{em} = \frac{1}{2} \mathbf{E} \cdot \mathbf{D} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} : \text{電磁場のエネルギー密度} \quad (2.164)$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} : \text{Pointing のベクトル} \quad (2.165)$$

となる。

荷電粒子の運動について一言触れておこう。

電荷 q の荷電粒子が電磁場の中を速度 \mathbf{v} で運動するとローレンツ力 (2.69) が作用する。電場, 磁場はスカラーポテンシャル ϕ , およびベクトルポテンシャル \mathbf{A} から式 (2.142) および $\mathbf{B} = \text{rot} \mathbf{A}$ によって得られるから

$$\mathbf{F} = q(-\text{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{v} \times \text{rot} \mathbf{A}) \quad (2.166)$$

となる。この力はいわゆる保存力 (ポテンシャルの傾きから得られる) ではないが, U を

$$U = q\phi - q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (2.167)$$

とおくと, 各力の成分に対して

$$\mathbf{F}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i} + \frac{d}{dt} \frac{\partial U}{\partial v_i} \quad (2.168)$$

が成り立つ。したがって, 荷電粒子の運動エネルギーを K とすると, ラグランジアン L は

$$L = K - U = K - q\phi + q\mathbf{A} \cdot \mathbf{v} \quad (2.169)$$

となり, 保存場と同じ取り扱いができる (詳細は解析力学で学習して下さい)。

2.13 平面電磁波

$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ を仮定し, さらに ϵ, μ, σ は一定とする。(2.136) を t で微分すると

$$\nabla \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

これを (2.138) の回転に代入して

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2}$$

$\nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{D}/\epsilon = \rho/\epsilon$ および $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{E}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{E}) - \nabla^2 \mathbf{E} = \nabla\rho/\epsilon - \nabla^2 \mathbf{E}$ を用いると

$$\mu\epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \nabla^2 \mathbf{E} = -\mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \nabla\rho/\epsilon \quad (2.170)$$

同様のことを \mathbf{H} について行くと

$$\mu\epsilon\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} - \nabla^2\mathbf{H} = -\mu\sigma\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \quad (2.171)$$

(2.170), (2.171) は波動方程式である。さらに $\rho = 0$, $\sigma = 0$ のとき, \mathbf{E} と \mathbf{H} は同じ方程式に従う。

$$\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\mathbf{E} \quad (2.172)$$

$$\frac{\partial^2\mathbf{H}}{\partial t^2} = c^2\nabla^2\mathbf{H} \quad (2.173)$$

誘電率 ϵ , 透磁率 μ の物質中の波の伝播速度は

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.174)$$

となる。真空での電波の伝播速度は $c_0 = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$ であり, 一般に $\epsilon > \epsilon_0$, $\mu \geq \mu_0$ であるから, 物質中では真空中に比べ波の伝播速度は遅くなる。今後, 混乱が予想されない限り, c_0 も c と記す。

一番簡単な平面波の議論をおこなう。

真電荷がなく $\rho = 0$, また $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu\mathbf{H}$, ϵ, μ は一定, さらに, $\sigma = 0$ とする。Maxwell の方程式は

$$\epsilon\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot}\mathbf{H}, \quad \mu\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot}\mathbf{E} \quad (2.175)$$

$$\text{div}\mathbf{E} = 0, \quad \text{div}\mathbf{H} = 0 \quad (2.176)$$

となる。 \mathbf{E}, \mathbf{H} が空間変数 x, y によらず, ただ z だけの関数とする。(2.175) は

$$\epsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad \epsilon\frac{\partial E_z}{\partial t} = 0 \quad (2.177)$$

$$\mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z}, \quad \mu\frac{\partial H_z}{\partial t} = 0 \quad (2.178)$$

となる。また (2.176) は

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial H_z}{\partial z} = 0 \quad (2.179)$$

となる。これらより, E_z, H_z は z, t によらず一定となり, 波動を考えるために 0 と置いておく。したがって (2.177), (2.178) は二組の方程式

$$\epsilon\frac{\partial E_x}{\partial t} = -\frac{\partial H_y}{\partial z}, \quad \mu\frac{\partial H_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} \quad (2.180)$$

$$\epsilon\frac{\partial E_y}{\partial t} = \frac{\partial H_x}{\partial z}, \quad \mu\frac{\partial H_x}{\partial t} = \frac{\partial E_y}{\partial z} \quad (2.181)$$

になる。 E_x, H_y と E_y, H_x はたがいに他と関係なく解が決まる。そこで,

$$E_y = 0, \quad H_x = 0 \quad (2.182)$$

として, (2.180) を満たす解が存在する。これを x 方向の偏波という。また

$$E_x = 0, \quad H_y = 0 \quad (2.183)$$

として, (2.181) を満たす波を y 方向の偏波という。

x 方向の偏波 $\mathbf{E}^{(x)} = (E_x^{(x)}, 0, 0)$, $\mathbf{H}^{(x)} = (0, H_y^{(x)}, 0)$ は (2.180) より

$$\epsilon\mu\frac{\partial^2 E_x^{(x)}}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 E_x^{(x)}}{\partial z^2} \quad (2.184)$$

によって決まる。 $H_y^{(x)}$ も同様である。これは空間 1 次元の波動方程式であり, 一般解は

$$u(z, t) = \phi(z - ct) + \psi(z + ct), \quad \phi, \psi \text{ は任意関数} \quad (2.185)$$

となる (3.83)。ここで $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ である。これは速さ c で進む進行波で $\phi(z - at)$ は前進波を、 $\psi(z + at)$ は後退波を表す。いま、前進波のみが存在する場合を考えると $E_x^{(x)} = \phi(z - at)$ だから

$$\frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial t} = -c \frac{\partial \phi}{\partial z} = -c \frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial z}, \quad \text{また} \quad \frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial t} = -\frac{1}{\epsilon} \frac{\partial H_y^{(x)}}{\partial z} \quad \text{よって} \quad c\epsilon \frac{\partial E_x^{(x)}}{\partial z} = \frac{\partial H_y^{(x)}}{\partial z}$$

したがって、定数分を取り除くと

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x^{(x)} = H_y^{(x)} \quad (2.186)$$

となる。 $E_x^{(x)}$ と $H_y^{(x)}$ は必ず伴って存在する。従ってこのような電場と磁場を電磁波と呼んでいる。 $E_x^{(x)}$ と $H_y^{(x)}$ は同符号であり、 $\mathbf{E}^{(x)}$ が x 方向を向いていれば、 $\mathbf{H}^{(x)}$ は y 方向を向いており、その大きさの比は $\sqrt{\mu/\epsilon}$ である。 x 方向の偏波の進行方向 (z 軸の正の方向) は $\mathbf{E}^{(x)}$ から $\mathbf{H}^{(x)}$ に右ねじの進む方向である。

y 方向の偏波 $\mathbf{E}^{(y)} = (0, E_y^{(y)}, 0)$, $\mathbf{H}^{(y)} = (H_x^{(y)}, 0, 0)$ について同様に前進波を考えると

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y^{(y)} = -H_x^{(y)} \quad (2.187)$$

となり、波の進行方向は $\mathbf{E}^{(y)}$ から $\mathbf{H}^{(y)}$ に右ねじを回すときのねじの進む方向である。

一般には方程式の線形性から、 z 軸方向に前進している波で、 x 方向と y 方向の偏波が任意の比で重なった波 $\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(x)} + \mathbf{E}^{(y)}$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}^{(x)} + \mathbf{H}^{(y)}$ が存在する。このときも

$$\mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = E_x^{(x)} H_x^{(y)} + E_y^{(y)} H_y^{(x)} = 0 \quad (2.188)$$

となり、 \mathbf{E} と \mathbf{H} は進行方向に垂直だけでなく、互いに垂直であることがわかる。また電場のエネルギー密度と磁場のエネルギー密度は等しい。

$$\frac{1}{2}\epsilon\mathbf{E}^2 = \frac{1}{2}\mu\mathbf{H}^2 \quad (2.189)$$

同様に後退波を考えると

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_x^{(x)} = -H_y^{(x)}, \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_y^{(y)} = H_x^{(y)} \quad (2.190)$$

となる。いずれにしても \mathbf{E} から \mathbf{H} に右ねじの進む方向が進行方向となっており、(2.188), (2.189) も成立する。

1888 年、ドイツの物理学者ハインリヒ・ルドルフ・ヘルツ (Heinrich Rudolf Hertz) 電磁波を初めて観測した。ここに、アンペールの法則に電束電流を考慮することの正当性が確認され、Maxwell 方程式が物理学の基礎方程式であることが確立した。

しかし、式 (2.172) などから、この基礎方程式には真空中での光速 $c_0 = 1/\sqrt{\epsilon_0\mu_0}$ を含んでいる。「基礎方程式に速度を含む」、ことは力学における慣性系の再検討を要求する。実験 (マイケルソン-モーレイの実験など) は「真空中の光速は不変である」ことを示している。「相対性原理」(物理法則は等価な慣性系では同じ方程式に従う) を適用すると、慣性系ではガリレイ変換ではなく、ローレンツ変換に従うことが明らかになった。これが特殊相対性理論である。

前進波 $\phi(z - ct)$ の関数形は任意で、特別な正弦関数形を仮定する。変数を $z - ct = -\frac{c}{\omega}(wt - \frac{\omega}{c}z) = -\frac{a}{\omega}(wt - kz)$, $k = \frac{\omega}{c}$ において $wt - kz$ に変換すると、 x 方向の偏波、 y 方向の偏波は

$$E_x^{(x)}(z, t) = E_{x0} \sin(\omega t - kz + \alpha), \quad H_y^{(x)}(z, t) = H_{y0} \sin(\omega t - kz + \alpha), \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{x0} = H_{y0} \quad (2.191)$$

$$E_y^{(y)}(z, t) = E_{y0} \sin(\omega t - kz + \beta), \quad H_x^{(y)}(z, t) = H_{x0} \sin(\omega t - kz + \beta), \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{y0} = -H_{x0} \quad (2.192)$$

となる。ここに ω は角振動数、 $k = \frac{\omega}{c}$ は波数で、周期と $T = \frac{2\pi}{\omega}$ 、波長と $\lambda = \frac{2\pi}{k}$ の関係にある。

大学1年生の学生にとっては、一般的な前進波 $\phi(z - ct)$ を正弦関数に限定して取り扱うことの「飛躍」に戸惑うこともあるだろう。これには本質的な根拠がある。

電磁場を支配する方程式は全て線形であった。それにしたがって、電磁場は「線形空間」となる。その要素は全て有限の大きさを持っている。そうした空間の要素は、その空間に含まれる互いに直交する基底ベクトル (基本となる関数) の一次結合で一意的に展開することができる。これを三角関数に選ぶ方法をフーリエ解析という。一般の前進波 $\phi(\xi)$ を $\sin \xi$ で表したのはその代表として、一つを選んで議論しようとしたものであり、他の基底ベクトルは、異なる波数

k の正弦関数となる。重ね合わせは、関数を周期関数 (あるいは有限の区間に限定する) とするか、無限に広がった座標での波 (波束などという) を考えるかによって、足し算になるか、積分になるかの違いはあるが、それぞれの要素の関数はそれぞれ他とは独立に振る舞いが決まる。前進波を正弦関数に選んだが、それは、前進波の多くの性質をこの特定の関数によって表現することができるからである。

$\alpha - \beta = n\pi$ の時、 $\frac{E_y^{(y)}}{E_{y0}} = (-1)^n \frac{E_x^{(x)}}{E_{x0}}$ となり、 \mathbf{E} は xy 平面から進行方向の z 軸方向を見ると直線上を振動する。これを直線 (平面) 偏波といい、光の時、電界ベクトルと進行方向を含む面を偏光面という。 $\alpha - \beta \neq n\pi$ の時、電界ベクトルは xy 面に投影すると楕円を描く。これを楕円偏波という。

ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$ は z 軸方向を向き

$$S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = |E_x^{(x)} H_y^{(y)} - E_y^{(y)} H_x^{(x)}| = E_{x0}^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin^2(\omega t - kz + \alpha) + E_{y0}^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \sin^2(\omega t - kz + \beta)$$

となり、時間平均は

$$\langle S \rangle = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_{x0}^2 + E_{y0}^2) \quad (2.193)$$

となる。

波動を複素数で表現すると便利ことが多い。たとえば

$$E_{x0} \sin(\omega t - kz + \alpha) \rightarrow E_{x0} e^{i(\omega t - kz + \alpha)}$$

の対応をおこなう。したがって

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^{(x)} + \mathbf{E}^{(y)} = E_{x0} e^{i(\omega t - kz + \alpha)} \mathbf{i} + E_{y0} e^{i(\omega t - kz + \beta)} \mathbf{j} = (E_{x0} e^{i\alpha} \mathbf{i} + E_{y0} e^{i\beta} \mathbf{j}) e^{i(\omega t - kz)}$$

などを考慮すると (2.191), (2.192) は

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.194)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - kz)} \quad (2.195)$$

となる。実際は、これらの重ね合わせである。フーリエ解析の学習が待たれる。

以上の議論を、任意の方向の平面電磁波に拡張しておこう。まず、電場を仮定する。

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} \quad (2.196)$$

波の位相速度は $c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ 、波の角振動数は ω のとき、波数 \mathbf{k} は $k = \frac{\omega}{c}$ 、波の進行方向は $\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}$ である。

$$(2.196) \text{ を } \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} \text{ に代入して, } \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = i\mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}$$

$$\text{時間で積分して, 定数部分を 0 とすると, } \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\omega\mu} \mathbf{k} \times \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}$$

$$\text{div } \mathbf{E} = 0 \text{ に代入して, } \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{E} = 0$$

従って、 \mathbf{E} , \mathbf{H} は互いに直交する。それらは伝播方向 $\hat{\mathbf{k}}$ に垂直だから横波である。さらに、 \mathbf{E} , \mathbf{H} , $\hat{\mathbf{k}}$ の順に右手系をなしている。

ポインティングベクトルは、 $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C}$ を用いると、

$$\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \mathbf{E} \times \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E} \right) = E^2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} = c\epsilon E^2 \hat{\mathbf{k}}$$

場のエネルギー密度は

$$u_{em} = \frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \cdot \mathbf{H} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu \frac{\epsilon}{\mu} (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) \cdot (\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}) = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \epsilon E^2$$

よって、 $\mathbf{S} = cu_{em} \hat{\mathbf{k}}$

結局、一般の平面電磁波は

(単色の) 平面電磁波

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/c)}, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad (\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}) \quad (2.197)$$

$$\hat{\mathbf{k}} = \frac{\mathbf{k}}{k}, \quad k = \frac{\omega}{c}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$$

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \quad (\mathbf{H} \cdot \mathbf{k} = 0, \quad \mathbf{E} \cdot \mathbf{H} = 0) \quad (2.198)$$

$$\mathbf{S} = cu_{em} \hat{\mathbf{k}}, \quad u_{em} = \frac{1}{2} \epsilon E^2 + \frac{1}{2} \mu H^2, \quad \frac{1}{2} \epsilon E^2 = \frac{1}{2} \mu H^2 \quad (2.199)$$

となる。これが平面電磁波の一般的な表現である。電磁波は発信源から十分距離が離れたところでは、局所的には平面波と見なせる。

次に導体中の電磁波の伝播を考える。

ここまでは、真電荷も真電流もない $\rho = 0$, $\mathbf{j} = 0$ 場合を考えた。以下では導電率 σ の導体とする。 $\mathbf{j} = \sigma \mathbf{E}$ だから (2.175) は

$$\epsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{H} - \sigma \mathbf{E}, \quad \mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = -\text{rot } \mathbf{E} \quad (2.200)$$

となる。電界 \mathbf{E} , 磁界の強さ \mathbf{H} が周期的に

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega t}, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i\omega t} \quad (2.201)$$

と変化するとする。(2.200) に代入すると

$$\text{rot } \mathbf{H} = (i\omega\epsilon + \sigma)\mathbf{E}, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -i\mu\omega\mathbf{H} \quad (2.202)$$

となり,

$$\epsilon^* = \epsilon + \frac{\sigma}{i\omega} \quad (2.203)$$

とおくと

$$\text{rot } \mathbf{H} = i\omega\epsilon^*\mathbf{E} \quad (2.204)$$

となり, $\mathbf{j} = 0$ の場合の $\text{rot } \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E}$ での ϵ が ϵ^* と変わっただけである。 z 軸方向に進む平面波は (2.194), (2.195) より

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i(\omega t - k^* z)} = \mathbf{E}_0 e^{-k'' z} e^{i(\omega t - k' z)} \quad (2.205)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_0 e^{i(\omega t - k^* z)} = \mathbf{H}_0 e^{-k'' z} e^{i(\omega t - k' z)} \quad (2.206)$$

$$k^* = \frac{\omega}{c^*} = \omega\sqrt{\epsilon^*\mu} = k' - ik'' \quad (2.207)$$

となる。(2.207) で平方根を求めるとき, k', k'' が正となるように選ぶ。

$$k' = \omega \left[\frac{\epsilon\mu}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} + 1 \right\} \right]^{1/2} \quad (2.208)$$

$$k'' = \omega \left[\frac{\epsilon\mu}{2} \left\{ \sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon}\right)^2} - 1 \right\} \right]^{1/2} \quad (2.209)$$

$k' > 0, k'' > 0$ で $k' > k''$ である。 z の増加とともに, 電磁波のエネルギーは Joule 熱に変化して波は指数関数的に減衰する。

2.14 電磁波の反射, 屈折

平面電磁波 (光) の反射, 屈折を考える。無限に広がった媒質 1 ($z < 0$, ϵ, μ) と媒質 2 ($z > 0$, ϵ', μ') が $z = 0$ で接しているとする。

入射電磁波を

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/c)}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{\epsilon\mu} \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{E}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}} \quad (2.210)$$

とする。

一部は媒質 2 に透過し,

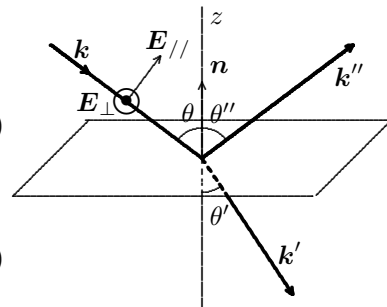
$$\mathbf{E}' = \mathbf{E}'_0 e^{i\omega'(t - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{r}/c')}, \quad \mathbf{B}' = \sqrt{\epsilon'\mu'} \hat{\mathbf{k}}' \times \mathbf{E}' \quad (2.211)$$

一部は媒質 1 に反射する。

$$\mathbf{E}'' = \mathbf{E}''_0 e^{i\omega''(t - \hat{\mathbf{k}}'' \cdot \mathbf{r}/c)}, \quad \mathbf{B}'' = \sqrt{\epsilon\mu} \hat{\mathbf{k}}'' \times \mathbf{E}'' \quad (2.212)$$

これらの指数関数部分が境界面 $z = 0$ 上の点 \mathbf{r} で同じである場合にだけ, 接線成分の連続性が成立する。

$$e^{i\omega(t - \hat{\mathbf{k}} \cdot \mathbf{r}/c)} = e^{i\omega'(t - \hat{\mathbf{k}}' \cdot \mathbf{r}/c')} = e^{i\omega''(t - \hat{\mathbf{k}}'' \cdot \mathbf{r}/c)}$$



従って,

$$\omega = \omega' = \omega'', \quad \hat{k}_x = \frac{\hat{k}'_x}{c'} = \frac{\hat{k}''_x}{c}, \quad \hat{k}_y = \frac{\hat{k}'_y}{c'} = \frac{\hat{k}''_y}{c} \quad (2.213)$$

振動数は変わらず, $\hat{k}, \hat{k}', \hat{k}''$ は同一平面内にある。また入射角を θ , 屈折角を θ' , 反射角を θ'' とすると,

$$\frac{\sin \theta}{c} = \frac{\sin \theta'}{c'} = \frac{\sin \theta''}{c}$$

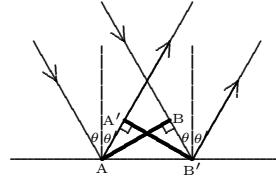
従って,

$$\theta = \theta'' \quad (\text{反射の法則}) \quad (2.214)$$

$$\frac{\sin \theta}{\sin \theta'} = \frac{c}{c'} = \frac{\sqrt{\epsilon' \mu'}}{\sqrt{\epsilon \mu}} = \frac{n'}{n} \quad n, n' \text{ は屈折率} \quad (\text{Snell の屈折の法則}) \quad (2.215)$$

補足 … 中学理科の復習

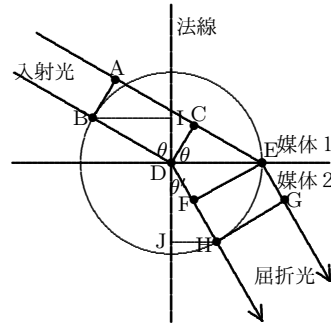
反射の法則は,
波面が AB に達した後, 点 B から発した素元波が B' に達する間に点 A で反射した素元波が A' に達したとすると $BB' = A'A$ となり, $\triangle ABB' \equiv \triangle B'A'A$ 。したがって, $\angle AB'B = \angle B'AA'$ より, $\theta = 90^\circ - \angle AB'B = 90^\circ - \angle B'AA' = \theta'$ 。



屈折の法則は,
入射面内で, 進行方向に垂直な波の面 AB は媒体 1 の中で直進し境界面に達し CD になる。光 AC は更に直進し CE と進んで境界面に達するが, その間 BD を進んだ光は媒体 2 の中で DF だけ進む。その後波は媒体 2 の中で波面 EF に垂直な方向に進み GH となる。境界面に垂直な直線 (法線) と入射光のなす角 (図では θ) を入射角, 法線と屈折光とのなす角 (図では θ') を屈折角と言う。屈折光は入射光と法線のなす面内を進む。点 B, 点 H から法線への垂線と法線との交点を I, J とすると $\triangle DEC \equiv \triangle DBI, \triangle EDF \equiv \triangle DHJ$ より $CE = BI, DF = HJ$ となる。
光は媒体 1 を CE 進む間に媒体 2 を DF 進むのであるから各々の媒体を進む光の速さを a, a' とすると

$$n = \frac{BI}{HJ} = \frac{CE}{DF} = \frac{c}{c'}$$

したがって $n = \frac{BI}{HJ}$ (通常, 円の半径を 1 にしておく) は入射角によらず一定となることがわかる (スネルの法則)。この比の値 n を媒体 1 に対する媒体 2 の相対屈折率と言う。屈折率は媒体 1, 2 によるが, 通常は, 媒体 1 を真空にして, 媒体 2 の屈折率 (絶対屈折率) をいう。ところが空気の (絶対) 屈折率は 1.00028 とほとんど 1 なので区別なく用いることができる。屈折率は物質によって変わるだけでなく, 用いる光の色 (波長), 温度などによっても変化する。水は 1.3330, 光学ガラスは 1.46~2.0, ゲルマニウムは 4.09, また結晶などには等方的でないものもある。



つぎに, 透過と反射の大きさを求める。 \mathbf{E}, \mathbf{H} を入射面 ($\hat{\mathbf{k}}$ と境界面の法線 z 軸のなす面) に平行な成分 $\mathbf{E}_{//}, \mathbf{H}_{//}$ と垂直な成分 $\mathbf{E}_{\perp}, \mathbf{H}_{\perp}$ に分解する (\mathbf{E}_{\perp} の方向を, $\mathbf{E}_{//}, \mathbf{E}_{\perp}, \hat{\mathbf{k}}$ が右手系となるようにとる)。 $\mathbf{E}_{//}$ を平行偏波, \mathbf{E}_{\perp} を垂直偏波と呼ぶ。

$$\mathbf{H} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \hat{\mathbf{k}} \times (\mathbf{E}_{//} + \mathbf{E}_{\perp}) = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} (E_{//} \frac{\mathbf{E}_{\perp}}{E_{\perp}} - E_{\perp} \frac{\mathbf{E}_{//}}{E_{//}}), \quad H_{//} = -\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\perp}, \quad H_{\perp} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{//}$$

面 $z = 0$ において, 境界条件 (2.162) を適用する ($\sigma_t = 0, \mathbf{J}_c = 0$)。Snell の屈折の法則を考慮して,

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = 0 \quad \text{より} \quad \epsilon E_{//} \sin \theta + \epsilon E''_{//} \sin \theta = \epsilon' E'_{//} \sin \theta', \quad \epsilon E_{//} + \epsilon E''_{//} = \epsilon' E'_{//} \frac{\sin \theta'}{\sin \theta} = \epsilon' E'_{//} \sqrt{\frac{\epsilon \mu}{\epsilon' \mu'}}$$

$$\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{//} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E''_{//} = \sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_{//} \quad \cdots (a)$$

$$\mathbf{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0 \quad \text{より} \quad -\sqrt{\epsilon \mu} E_{\perp} \sin \theta - \sqrt{\epsilon \mu} E''_{\perp} \sin \theta = \sqrt{\epsilon' \mu'} E'_{\perp} \sin \theta'$$

$$E_{\perp} + E''_{\perp} = E'_{\perp} \quad \cdots (b)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \quad \text{より} \quad E_{\perp} + E''_{\perp} = E'_{\perp} \quad \text{これは (b) と同じ。さらに}$$

$$E_{//} \cos \theta - E''_{//} \cos \theta = E'_{//} \cos \theta' \quad \cdots (c)$$

$$\mathbf{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \quad \text{より} \quad \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{//} + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E''_{//} = -\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_{//} \quad \text{これは (a) と同じ。さらに}$$

$$-\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_{\perp} \cos \theta + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E''_{\perp} \cos \theta = -\sqrt{\frac{\epsilon'}{\mu'}} E'_{\perp} \cos \theta' \quad \cdots (d)$$

(a)~(d) にたいして、 $\mu = \mu'$ と近似すると、Fresnel の公式が得られる。

$$E'_{//} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta') \cos(\theta - \theta')} E_{//}, \quad E'_{\perp} = \frac{2 \cos \theta \sin \theta'}{\sin(\theta + \theta')} E_{\perp} \quad (2.216)$$

$$E''_{//} = \frac{\tan(\theta - \theta')}{\tan(\theta + \theta')} E_{//}, \quad E''_{\perp} = -\frac{\sin(\theta - \theta')}{\sin(\theta + \theta')} E_{\perp} \quad (2.217)$$

Snell の屈折の法則を用いて、屈折角を入射角で表すと、これらは入射角だけで表すことができる。平行偏波の

$$\text{振幅反射率は } r_{//} = \frac{E''_{//}}{E_{//}} = \frac{(n'/n)^2 \cos \theta - \sqrt{(n'/n)^2 - \sin^2 \theta}}{(n'/n)^2 \cos \theta + \sqrt{(n'/n)^2 - \sin^2 \theta}}$$

$$\text{振幅透過率は } t_{//} = \frac{E'_{//}}{E_{//}} = \frac{2(n'/n) \cos \theta}{(n'/n)^2 \cos \theta + \sqrt{(n'/n)^2 - \sin^2 \theta}}$$

垂直偏波の

$$\text{振幅反射率は } r_{\perp} = \frac{E''_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{\cos \theta - \sqrt{(n'/n)^2 - \sin^2 \theta}}{\cos \theta + \sqrt{(n'/n)^2 - \sin^2 \theta}}$$

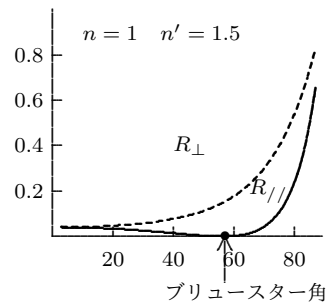
$$\text{振幅透過率は } t_{\perp} = \frac{E'_{\perp}}{E_{\perp}} = \frac{2 \cos \theta}{\cos \theta + \sqrt{(n'/n)^2 - \sin^2 \theta}}$$

となる。

単位面積あたり境界面に角度 θ で入射、反射、透過するエネルギーの割合は $|\mathbf{E} \times \mathbf{H}| \cos \theta$ である。入射エネルギーに対する反射エネルギーの割合を反射率という。平行偏波と垂直偏波の反射率は $\theta = \theta''$ だから、それぞれ $R_{//} = r_{//}^2$ 、 $R_{\perp} = r_{\perp}^2$ である。

$\theta + \theta' = \pi/2$ のとき、反射の平行偏波が全くなくなる ($E''_{//} = 0$ すなわち $r_{//} = 0$)。そのときの入射角は $\theta = \tan^{-1} \frac{n'}{n}$ となる。この入射角をブリュースター角という。

また、 $n > n'$ では、 $\theta < \theta'$ となり、屈折角 θ' が 90° となる入射角 θ が存在し、これを臨界角という。



これらを用いて、全反射や偏光の議論ができる。水面などでの反射光は偏光する。これを偏光フィルターを通すことによって、反射光を減少させ、水中からの屈折光 (魚影) を見やすくする。偏光グラスは釣キチにとって必須アイテムである。

岩波現代文庫「ご冗談でしょう、ファインマンさん 下」R.P. ファインマン著 大貫昌子訳

には、偏光板について面白い話題が載っています。また、この本の中には、科学の学習・教育について、多くの示唆が与えられています。

2.15 平板、および電気双極子からの電磁波の放射

xy 平面に無限に広がった導体板に x 軸方向に y 軸方向の単位幅あたり J_x の電流が流れているとする。

定常で電流 $J_x = J_0$ が平板上を一様に流れているとすると、 z だけ離れた点での磁場はアンペールの法則より

$$B_y = -\mu_0 J_0 / 2 \quad (2.218)$$

となる。いま電流が角振動数 ω で周期的に変化しているとする。

$$J_x = J_0 \cos \omega t \quad (2.219)$$

平板の近傍での磁場は

$$B_y = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \cos \omega t \quad (2.220)$$

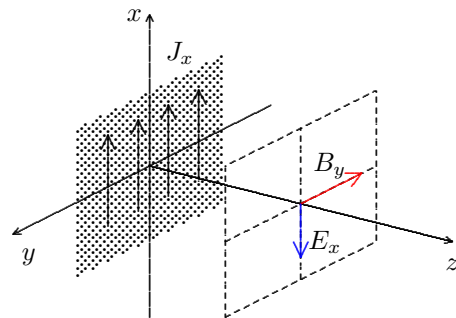
から、 z だけ離れた解は

$$B_y = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \cos(kz - \omega t) \quad (2.221)$$

となるはずである。これは x 方向の偏波であり、電場は (2.186) より

$$E_x = -\frac{\mu_0 J_0 c}{2} \cos(kz - \omega t) \quad (2.222)$$

となる。



遅延ポテンシャル (2.151), (2.152) を用いて, 直接求めてみよう。 $j_x(x, y, z, t) = J_0 \delta(z) \cos \omega t$, $\rho(x, y, z, t) = 0$, $k = \frac{\omega}{c}$ である。従って, $\phi = 0$ である。また, (2.151) より, $A_y = A_z = 0$,

$$\begin{aligned} A_x(z, t) &= A_x(0, 0, z, t) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_0 \delta(z') \cos(k\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z-z')^2} - \omega t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + (z-z')^2}} dx' dy' dz' \\ &= \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_0 \cos(k\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2} - \omega t)}{\sqrt{x'^2 + y'^2 + z^2}} dx' dy' = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{J_0 \cos(k\sqrt{r'^2 + z^2} - \omega t)}{\sqrt{r'^2 + z^2}} r' dr' d\theta' \\ &= \frac{\mu_0}{2} J_0 \int \frac{\cos(k\sqrt{r'^2 + z^2} - \omega t)}{\sqrt{r'^2 + z^2}} r' dr' = \frac{\mu_0 J_0}{2k} \left[\sin(k\sqrt{r'^2 + z^2} - \omega t) \right]_0^\infty = -\frac{\mu_0 J_0}{2k} \sin(kz - \omega t) \end{aligned}$$

最後の等式では $\lim_{r' \rightarrow \infty} \sin(k\sqrt{r'^2 + z^2} - \omega t)$ は収束しないが簡便のため 0 とおいている。 r' を有限にしておいて, 次の $B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}$ を計算してから, $\lim_{r' \rightarrow \infty}$ を実行すれば, この項の寄与は 0 となる。また, E_x は (2.186) から求めればこの計算が正当であることがわかる。ポテンシャルを用いた議論では, こうした困難はよく現れる。しかし, 多くの場合, 理論が問題ではなく, 仮定 (問題設定) が現実的でない場合が多い。

$$B_x = 0, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} = -\frac{\mu_0 J_0}{2} \cos(kz - \omega t), \quad B_z = 0, \quad E_x = -\frac{\partial A_x}{\partial t} = -\frac{\mu_0 J_0 c}{2} \cos(kz - \omega t), \quad E_y = E_z = 0$$

ポインティングベクトルは

$$S = |\mathbf{E} \times \mathbf{H}| = \frac{\mu_0 J_0^2 c}{4} \cos^2(kz - \omega t) \quad (2.223)$$

その平均値は

$$\langle S \rangle = \frac{\mu_0 J_0^2 c}{8} \quad (2.224)$$

両サイドから放射される単位面積あたりの放射のエネルギーは

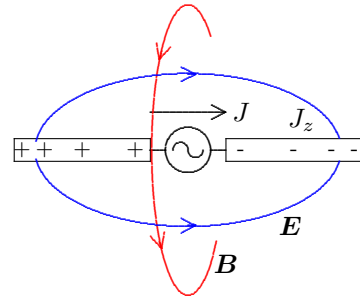
$$2 \langle S \rangle = \frac{\mu_0 J_0^2 c}{4}$$

となる。

以上の, 無限の平板からの電磁波の放射は現実からかけ離れている。電磁波の放射はアンテナが用いられる。線形アンテナはおおよそ次の原理である。

2つの導体棒を一つの直線上に左右に近接して並べ, その近い端に電圧あるいは電流を制御して, 棒全体の電荷分布 (同じことであるが電流) を振動させる。

はじめ, 棒は全体として帯電していないとする。いま ($z < 0$) に正の, 右部 ($z > 0$) に負の電荷があり, 左部から右部に電圧がかかっている。正の電荷は左部から右部に移動し電流は右に流れる。これによって棒の周りには左部から右部を向いて右回りの磁場が発生する。また電荷分布に応じた電場が棒の周りに発生する。これらが光速で棒から離れる方向に進行する。



これが, 放射源から離れた点でどのように観測されるかを見てみよう。電荷分布 $\rho(\mathbf{r}, t)$, 電流密度 $\mathbf{j}(\mathbf{r}, t)$ が原点付近の限られた領域 V にのみ存在するとする。領域 V は原点を中心とした半径 r_0 の球に含まれるとする。議論は, Fourier の方法 (パノフスキー・ヒリップス「電磁気学下」吉岡書店 参照) を用いた方が一般的でわかりやすいが, 1年次ではこれになれていないことを考慮して, 一般の遅延ポテンシャル式 (2.151), (2.152) を直接, $r_0/r \ll 1$ の条件で展開する方法を採用する。(砂川重信著「電磁気学」岩波書店を参照しました。そこには, 物理的な意味が丁寧に書かれています。)

時刻 t_0 に原点 O で発信した電磁波を観測点 \mathbf{r} で時刻 t に観測したとすると,

$$t_0 = t - \frac{r}{c} \quad (2.225)$$

である。

このとき, 式 (2.151), (2.152) は

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^3} + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{cr^2} \quad (2.226)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r} \quad (2.227)$$

ここで, Q , $\mathbf{p}(t)$ は, 全電荷量, 電気双極子モーメントで, V はその境界の閉局面上で $\rho(\mathbf{r}, t_0)$ が 0 となる十分大きな領域とする。

$$Q = \int_V \rho(\mathbf{r}', t_0) dv', \quad \mathbf{p}(t) = \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) dv' \quad (2.228)$$

$$|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| = \sqrt{r^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}' + (\mathbf{r}')^2} \sim r(1 - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}), \quad \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \sim \frac{1}{r}(1 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r^2}) \text{ を用いると}$$

$$\rho(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/c) \sim \rho(\mathbf{r}', t - \frac{1}{c}(r - \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{r})) \sim \rho(\mathbf{r}', t_0 + \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr}) \sim \rho(\mathbf{r}', t_0) + \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t_0} \cdot \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}'}{cr} + \dots$$

このとき, (2.152) は

$$\phi(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{1}{r} \int_V \rho(\mathbf{r}', t_0) dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{r^3} \cdot \int_V \mathbf{r}' \rho(\mathbf{r}', t_0) dv' + \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{\mathbf{r}}{cr^2} \cdot \int_V \mathbf{r}' \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t_0)}{\partial t_0} dv'$$

右辺第 1 項は全電荷量 Q で一定であるから, 以下の議論ではこれを 0 としておく。第二項は電気双極子モーメント $\mathbf{p}(t)$

の寄与である。右辺第 3 項は $\dot{\mathbf{p}}(t) = \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt}$ の項である。

同様に, ベクトルポテンシャル (2.151) は $|\mathbf{r} - \mathbf{r}'| \sim r$ として,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}, t) = \frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r} \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t_0) dv'$$

となるが, 電荷の保存則より

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= \frac{d\mathbf{p}(t)}{dt} = \int_V \mathbf{r}' \frac{\partial \rho(\mathbf{r}', t)}{\partial t} dv' = - \int_V \mathbf{r}' \operatorname{div} \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dv' \quad (\text{次へは電流の保存則の節を参照して}) \\ &= - \int_V \operatorname{div} (\mathbf{j}(\mathbf{r}', t) \cdot \mathbf{n}) \mathbf{r}' dS' + \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dv' = \int_V \mathbf{j}(\mathbf{r}', t) dv' \end{aligned}$$

を考慮する。

これらを, $\mathbf{E} = -\operatorname{grad} \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}$, $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ に代入し, 電場, 磁場を \mathbf{p} , $\dot{\mathbf{p}}$ および $\ddot{\mathbf{p}}$ に比例する部分に分離し, それぞれを $\mathbf{E}^{(0)}$ と $\mathbf{B}^{(0)}$, $\mathbf{E}^{(1)}$ と $\mathbf{B}^{(1)}$, および $\mathbf{E}^{(2)}$ と $\mathbf{B}^{(2)}$ と表す。

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}^{(0)} + \mathbf{E}^{(1)} + \mathbf{E}^{(2)} \quad (2.229)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^{(0)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ -\frac{\mathbf{p}(t_0)}{r^3} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t_0))}{r^5} \right\}, \quad \mathbf{E}^{(1)} = \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ -\frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{cr^2} + \frac{3\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0))}{cr^4} \right\} \\ \mathbf{E}^{(2)} &= \frac{1}{4\pi\epsilon} \left\{ -\frac{\ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{c^2 r} + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t_0))}{c^2 r^3} \right\} \end{aligned}$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{B}^{(0)} + \mathbf{B}^{(1)} + \mathbf{B}^{(2)} \quad (2.230)$$

$$\mathbf{B}^{(0)} = 0, \quad \mathbf{B}^{(1)} = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ -\frac{\mathbf{r} \times \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r^3} \right\}, \quad \mathbf{B}^{(2)} = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ -\frac{\mathbf{r} \times \ddot{\mathbf{p}}(t_0)}{cr^2} \right\}$$

となる。

$$\frac{\partial \mathbf{p}(t_0)}{\partial x} = -\frac{1}{c} \frac{\partial r}{\partial x} \frac{d\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{dt_0} = -\frac{x}{cr} \dot{\mathbf{p}}(t_0) \text{ などに気をつけて微分する。}$$

$$-\frac{\partial \mathbf{A}(\mathbf{r}, t)}{\partial t} = -\frac{\mu}{4\pi} \frac{1}{r} \ddot{\mathbf{p}}(t_0) \quad -\operatorname{grad} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t_0)}{r^3} = -\frac{\mathbf{p}(t_0)}{r^3} + 3 \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \mathbf{p}(t_0))}{r^5} + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0))}{cr^4}$$

$$-\operatorname{grad} \frac{\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0)}{cr^2} = -\frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{cr^2} + 2 \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \dot{\mathbf{p}}(t_0))}{cr^4} + \frac{\mathbf{r}(\mathbf{r} \cdot \ddot{\mathbf{p}}(t_0))}{c^2 r^3}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}, t)_x &= \frac{\mu}{4\pi} \left(\operatorname{rot} \frac{\dot{\mathbf{p}}(t_0)}{r} \right)_x = \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\dot{p}_z(t_0)}{r} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\dot{p}_y(t_0)}{r} \right) \right\} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \left\{ \dot{p}_z(t_0) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{r} \right) - \dot{p}_y(t_0) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \left(\frac{\partial \dot{p}_z(t_0)}{\partial y} - \frac{\partial \dot{p}_y(t_0)}{\partial z} \right) \right\} \\ &= \frac{\mu}{4\pi} \left\{ -\frac{1}{r^3} (y\dot{p}_z(t_0) - z\dot{p}_y(t_0)) - \frac{1}{cr^2} (y\ddot{p}_z(t_0) - z\ddot{p}_y(t_0)) \right\} \end{aligned}$$

電気双極子 $\mathbf{p}(t)$ が周期 T で振動しているとすると, それによる電磁波の波長は cT となる。各項は

$$E^{(0)} \sim \frac{1}{r^3} p, \quad E^{(1)} \sim cB^{(1)} \sim \frac{1}{r^2} \frac{p}{cT}, \quad E^{(2)} \sim cB^{(2)} \sim \frac{1}{r} \frac{p}{(cT)^2}$$

で, $r \gg cT$ では, $\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$, $\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ だけが残る。

$\mathbf{E}^{(0)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{E}^{(1)}(\mathbf{r})$, $\mathbf{B}^{(1)}(\mathbf{r})$ は明確な意味があるが, 当面不要となるから議論を省略する。

$$\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{c} \frac{\mathbf{r}}{r} \times \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$$

$$\mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = c \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \times \frac{\mathbf{r}}{r}$$

ポインティングベクトル $\mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \mu^{-1} \mathbf{E}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \times \mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t)$ は \mathbf{r} の方向を向いている。すなわち、横波となっている。大きさも $E^{(2)} = cB^{(2)}$ である。

$$\mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \frac{c}{\mu_0} [\mathbf{B}^{(2)}(\mathbf{r}, t)]^2 \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mu}{(4\pi)^2 c r^2} (\frac{\mathbf{r}}{r} \times \dot{\mathbf{p}}(t_0))^2 \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (2.231)$$

$$S^{(2)}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{S}^{(2)}(\mathbf{r}, t) \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} = \frac{\mu}{(4\pi)^2 c r^2} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 \sin^2 \theta$$

原点を中心とする各 θ の単位立体角、単位時間に放射されるエネルギーは

$$\frac{dP(t)}{d\Omega} = S(\mathbf{r}, t) r^2 = \frac{\mu}{(4\pi)^2 c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 \sin^2 \theta \quad (2.232)$$

単位時間に放射される全エネルギーは

$$P(t) = \int S(\mathbf{r}, t) r^2 d\Omega = \frac{\mu}{6\pi c} [\ddot{\mathbf{p}}(t_0)]^2 \quad (2.233)$$

となる。

長さ d の線形アンテナを流れる電流を

$$I(z, t) = I_0 \left(1 - \frac{2|z|}{d}\right) \sin \omega t \quad (2.234)$$

とする。線電荷密度を $\lambda(z, t)$ とすると、電荷保存則によって

$$\frac{\partial \lambda(z, t)}{\partial t} = -\frac{\partial I(z, t)}{\partial z} = \pm I_0 \frac{2 \sin \omega t}{d} \quad (\text{複合は } z > 0 \text{ で } +, z < 0 \text{ で } -)$$

これより

$$\lambda(z, t) = \mp \frac{2I_0}{\omega d} \cos \omega t \quad (2.235)$$

アンテナの電気双極子モーメント $p(t)$ は

$$p(t) = \int_{-d/2}^{d/2} z \lambda(z, t) dz = -\frac{I_0 d}{2\omega} \cos \omega t \quad (2.236)$$

これより、

$$\ddot{p}(t) = \frac{I_0 d}{2} \omega \cos \omega t \quad (2.237)$$

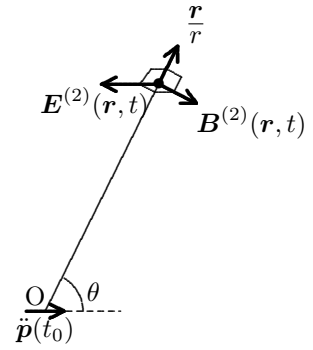
これを (2.233) に代入して

$$P(t) = \frac{\mu}{6\pi c} \left(\frac{I_0 d}{2}\right)^2 \omega^2 \cos^2 \omega t_0 \quad (2.238)$$

一周期 $2\pi/\omega$ で平均すると

$$\bar{P} = \frac{\mu}{12\pi c} \left(\frac{I_0 \omega d}{2}\right)^2 \quad (2.239)$$

となる。放射されるエネルギーは電流の周波数の 2 乗に比例する。



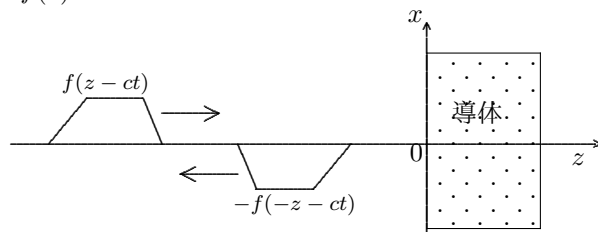
2.16 導体面による電磁波の反射と運動量

平面波の完全導体 ($\sigma = \infty$) との境界での反射を考える。 ϵ, μ は一定とする。境界を $z = 0$ とし、 x 軸方向の偏波を $E_x = f(z - ct) + g(z + ct)$ ((2.185) 参照) とする。 $t = 0$ では z 軸の負の方から前進波だとすると $z < 0$ に対して $g(z) = 0$, $z > 0$ に対して $f(z) = 0$ となる。

境界 $z = 0$ での導体面上では電界の接線方向成分は 0 だから

$$E_x(z = 0) = f(-ct) + g(+ct) = 0 \quad (2.240)$$

となる。よって $g(\xi) = -f(-\xi)$, $\xi > 0$ 。



したがって

$$E_x = f(z - ct) - f(-z - ct) \quad (2.241)$$

同様に磁界の強さは

$$H_y = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(z - ct) + \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(-z - ct) \quad (2.242)$$

となり、 $z = 0$ 導体表面では

$$H_y(z = 0) = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(-ct) \quad (2.243)$$

となる。導体内部では $\mathbf{H} = 0$ だから、 $z = 0$ で (2.243) だけの \mathbf{H} の不連続が存在する。したがって (2.162) より、導体表面に x 軸方向の面密度 J_x の電流

$$J_x = 2\sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} f(-ct) \quad (2.244)$$

が生じていることになる。この面電流は磁束密度 B_z から力を受ける。磁束密度は導体の外部と内部の平均と考えて良いから、導体面はローレンツ力による圧力

$$p = (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_z = J_x B_y = 2\epsilon \{f(-ct)\}^2 = 2\epsilon \mathbf{E}^2 \quad (2.245)$$

を受ける。したがって逆に単位時間に c だけ進む電磁波 $\mathbf{E} = (E_x, 0, 0)$, $\mathbf{H} = (0, H_y, 0, 0)$ は反射によって単位体積あたり運動量の変化

$$|\Delta \mathbf{P}| = \frac{2\epsilon \mathbf{E}^2}{c}$$

を受けたと考えられる (\mathbf{E} は入射電磁波の電場)。これは反射波と入射波の差であるから、入射電磁波の運動量はこの半分となる。すなわち $\epsilon E_x^2/c = E_x H_y/c^2$ となる。これが z 軸方向へ進行していることを考慮すると、一般に電磁波の運動量密度は

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2} \mathbf{E} \times \mathbf{H} = \frac{\mathbf{S}}{c^2} \quad (2.246)$$

と表されることが予想できる。電磁波はエネルギーだけでなく、運動量を持っていることがわかる。また、面に垂直に入射する電磁波から面が受ける圧力は

$$\frac{S}{c} (\text{完全吸収}) \leq p \leq \frac{2S}{c} (\text{完全反射}) \quad (2.247)$$

となるはずである。

一般に面を通して伝えられる力は応力テンソル T を用いて表せる。面素 $d\mathbf{S} = n dS$ の j 方向成分 $dS_j = n_j dS$ を通して伝えられる力 $d\mathbf{F}$ の i 成分 dF_i は

$$dF_i = \sum_{j=1}^3 T_{ij} dS_j \quad (2.248)$$

となる。表現を簡潔にするため座標 (x, y, z) を $(x_i, i = 1, 2, 3)$ と表し、また式の中に同じ指標が現れたときには $\sum_{j=1}^3$ などの総和記号は省略することもある。したがってある領域に働く全体の力の i 成分は

$$F_i = \int f_i dv = \int T_{ij} dS_j \quad (2.249)$$

となる。一方単位体積あたりの力を \mathbf{f} とすると

$$F_i = \int f_i dv \quad (2.250)$$

となる。(2.249), (2.250) が等しいはずだから

$$\int f_i dv = \int T_{ij} dS_j$$

ガウスの発散定理を用いると

$$f_i = \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} \quad (2.251)$$

となる。電磁気的な応力は

$$T_{ij} = \epsilon E_i E_j - \frac{\epsilon}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ij} + \mu H_i H_j - \frac{\mu}{2} \mathbf{H}^2 \delta_{ij} \quad (2.252)$$

と表せる(次小節で導く)。これを Maxwell の応力という。これが正当かどうかはこれから (2.251) と Maxwell の方程式を用いて体積力 \mathbf{f} が得られることを証明すればよい。(2.251) より

$$f_i = E_i \frac{\partial(\epsilon E_j)}{\partial x_j} + \epsilon E_j \frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon \mathbf{E}^2 + H_i \frac{\partial(\mu H_j)}{\partial x_j} + \mu H_j \frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} \mu \mathbf{H}^2$$

$$\frac{\partial(\epsilon E_j)}{\partial x_j} = \text{div } \mathbf{D} = \rho, \quad \frac{\partial(\mu H_j)}{\partial x_j} = \text{div } \mathbf{B} = 0$$

を代入して

$$f_i = E_i \rho + \epsilon E_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i} + \epsilon E_j \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\epsilon \mathbf{E}^2) + \mu H_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i} + \mu H_j \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \right) - \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \mathbf{H}^2)$$

となる。

$$\epsilon E_j \left(\frac{\partial E_i}{\partial x_j} - \frac{\partial E_j}{\partial x_i} \right) = \epsilon (\mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E})_i, \quad \text{rot } \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \quad \mu H_j \left(\frac{\partial H_i}{\partial x_j} - \frac{\partial H_j}{\partial x_i} \right) = \mu (\mathbf{H} \times \text{rot } \mathbf{H})_i$$

$$\text{rot } \mathbf{H} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} + \mathbf{j}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} \epsilon \mathbf{E}^2 = 2\epsilon E_j \frac{\partial E_j}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial}{\partial x_i} (\mu \mathbf{H}^2) = 2\mu H_j \frac{\partial H_j}{\partial x_i}$$

などを用いると

$$f_i = \rho E_i + \epsilon \mu (\mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t})_i + \epsilon \mu \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{H} \right)_i + (\mathbf{j} \times \mathbf{B})_i$$

となる。さらに $\frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} = \mathbf{E} \times \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \times \mathbf{H}$ だから

$$\mathbf{f} = \rho \mathbf{E} + \mathbf{j} \times \mathbf{B} + \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \quad (2.253)$$

第1項は静電力, 第2項は電磁力である。最後の項は

$$\frac{d\mathbf{g}}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{1}{c^2} \mathbf{S} \right) = \epsilon \mu \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t}$$

となり, (2.246) で予想した電磁波の運動量の変化を表している。したがって Maxwell の応力テンソルを仮定すると, (2.246) は自然な解釈となる。

Maxwell 応力テンソルによって, 静電場の応力分布を考えてみよう。図のように電気力管を管に垂直な面で切断したとする。

始めに, 電気力管の微小側面 ΔS , ΔS に垂直な単位ベクトル (ΔS の管の内から外向きの法線ベクトル) を \mathbf{n} とする。

電気力管の定義より, $\mathbf{E} \cdot \mathbf{n} = 0$, すなわち $E_i n_i = 0$ である。 ΔS に対する応力は

$$F_i = (\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \delta_{ij}) n_j \Delta S = -\frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 n_i \Delta S \quad \text{よって} \quad \mathbf{F} = -\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \Delta S \mathbf{n}$$

となる。従って, 電気力管の側面では面に垂直で単位面積あたり $\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$ の内側に向かう力, すなわち, 圧力が加わっており, 電気力管を細くするように作用している。

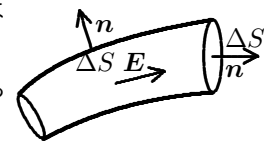
電気力管の切断面について, 同じように微小面積 ΔS , ΔS に垂直な単位ベクトルを \mathbf{n} とする。切断面では $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$ となっているから,

$$F_i = (\epsilon_0 E_i E_j - \frac{1}{2} \epsilon_0 \mathbf{E}^2 \delta_{ij}) n_j \Delta S = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \Delta S n_i \quad \text{よって} \quad \mathbf{F} = \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \Delta S \mathbf{n}$$

電気力管の垂直断面では, 面に垂直な単位面積あたり $\frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2$ の張力が作用している。

電気力管はゴムひものようなふるまいをする。2つの異符号の点電荷では, 電気力線は負の電荷から正の電荷に向かう。いずれの電気力管をとっても, 電気力管のいずれの点でも張力が作用し, 結果として, 2つの電荷は引き合うことになる。同符号の場合は反発し合うことになる。

静磁場も静電場と全く同様の応力テンソルだから, こうした解釈は磁場の中での電流が受ける力, フレミングの左手の法則をうまく説明することになる。中学・高校では, 「磁場の中で, 電流がつくる磁場がその磁場を強め合う方から弱め合う方へ力が働く」と説明されている。



2.17 エネルギー保存則と運動量保存則

すでにエネルギー保存則については(2.163)で議論した。しかし、ここでは、電磁場のみのエネルギーが議論され、ジュール熱 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ は系の外へ流れる。真電流は荷電粒子の運動によって発生し、エネルギー保存則は荷電粒子の運動も含めた系で成り立つはずである。また、運動量の保存則は力の基本的な性質である作用・反作用の法則と深く結びついている。我々は電流の相互作用から、これが各電流素片 $I d\mathbf{s}$ 間の相互作用について成り立つとして、ピオサールの法則とアンペールの力を出発点に選んだ。しかし、電流の相互間の各電流素片での力には作用・反作用の法則は成り立たないという深刻な問題があった。勿論2つの電流全体としては作用・反作用の法則は成り立つ。従って、遠隔作用説を押し通すのは困難で、これは近接作用説に基づいて、しかも真電流の実体を系に入れた議論を通じて解決できると予想される。この節では、簡単な系におけるエネルギー保存則と運動量保存則を通して、近接作用説の統一した解釈を確立する。

N 個の荷電粒子 (電荷 q_k , 質量 m_k , 位置 $\mathbf{r}_k(t)$, 速度 $\mathbf{v}_k(t)$, $k = 1, 2, \dots, N$) からなる系を考える。

$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$ である。場の方程式は

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = \sum_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \quad (2.254)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0 \quad (2.255)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \sum_k \mathbf{v}_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \quad (2.256)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0 \quad (2.257)$$

各質点の運動方程式は

$$\frac{d(m_k \mathbf{v}_k)}{dt} = \int_V \{ \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \mathbf{E} + \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) q_k \mathbf{v}_k \times \mathbf{B} \} dv, \quad (k = 1, 2, \dots, N) \quad (2.258)$$

である。

始めにエネルギー保存則を考える。

(2.258) に \mathbf{v}_k をかけて、全ての粒子にわたって、和をとる。

$$\sum m_k \mathbf{v}_k \cdot \frac{d\mathbf{v}_k}{dt} = \int_V \left\{ \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{v}_k \cdot \mathbf{E} + \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{v}_k \cdot (\mathbf{v}_k \times \mathbf{B}) \right\} dv$$

右辺第2項は恒等的に0である。右辺第1項はジュール熱 $\mathbf{j} \cdot \mathbf{E}$ の項である。これに(2.256)を代入して、

$$\frac{d}{dt} \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 = \int_V (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \cdot \mathbf{E} dv$$

公式 $\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{B}$, $\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E}$, $\mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{H}$, (2.257) を考慮すると

$$\mathbf{E} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{H} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{E} - \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\mathbf{H} \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} - \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) - \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$$

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 + \int_V (\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \right\} = - \int_V \operatorname{div} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) dv$$

右辺にガウスの定理を適用して、

$$\frac{d}{dt} \left\{ \sum_k \frac{1}{2} m_k \mathbf{v}_k^2 + \int_V (\frac{1}{2} \mathbf{D} \cdot \mathbf{E} + \frac{1}{2} \mathbf{H} \cdot \mathbf{B}) dv \right\} = - \int_{\Sigma} (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} dS \quad (2.259)$$

これは、力学的エネルギーと電磁場のエネルギーの和の減少は、右辺の表面から出ていく放射のエネルギーに等しい、ことを意味している。

次に運動量の保存則を考える。(2.258)の全ての粒子の和をとると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_k \mathbf{v}_k &= \int_V \left\{ \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{E} + \sum q_k \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_k) \mathbf{v}_k \times \mathbf{B} \right\} dv \\ &= \int_V \left\{ \mathbf{E} \operatorname{div} \mathbf{D} + (\operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}) \times \mathbf{B} \right\} dv \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} + \mathbf{D} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} \times \mathbf{B} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E}$$

だから

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \sum m_k \mathbf{v}_k &= \int_V \left\{ \mathbf{E} \text{div } \mathbf{D} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \text{rot } \mathbf{E} - \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{D} \times \mathbf{B}) \right\} dv \\ &= \int_V \left\{ \epsilon_0(\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E}) - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} - \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \right\} dv \end{aligned}$$

ここで

$$\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) \quad (2.260)$$

$$\mathbf{G}_M = \sum m_k \mathbf{v}_k, \quad \mathbf{G}_{em} = \int_V \mathbf{g} dv \quad (2.261)$$

とおき, $\text{div } \mathbf{B} = 0$ を考慮すると

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em}) = \int_V \epsilon_0 \{ \mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E} \} dv + \int_V \frac{1}{\mu_0} \{ \mathbf{B} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{B} \} dv$$

右辺の \mathbf{E} の項の各 x 成分, y 成分, z 成分を調べると

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E})_x &= E_x \text{div } \mathbf{E} - \{ E_y \times (\text{rot } \mathbf{E})_z - E_z \text{rot } \mathbf{E}_y \} \\ &= E_x \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) - E_y \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) + E_z \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{2} E_x^2 - \frac{1}{2} E_y^2 - \frac{1}{2} E_z^2 \right) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \\ &= \frac{\partial}{\partial x} (E_x^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2) + \frac{\partial}{\partial y} (E_x E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_x E_z) \end{aligned}$$

同様に

$$\begin{aligned} (\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E})_y &= \frac{\partial}{\partial x} (E_y E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_y^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2) + \frac{\partial}{\partial z} (E_y E_z) \\ (\mathbf{E} \text{div } \mathbf{E} - \mathbf{E} \times \text{rot } \mathbf{E})_z &= \frac{\partial}{\partial x} (E_z E_x) + \frac{\partial}{\partial y} (E_z E_y) + \frac{\partial}{\partial z} (E_z^2 - \frac{1}{2} \mathbf{E}^2) \end{aligned}$$

である。右辺の \mathbf{B} の項も全く同様だから, x, y, z を x_1, x_2, x_3 として

$$T_{ij} = \epsilon_0 E_i E_j - \frac{\epsilon_0}{2} \mathbf{E}^2 \delta_{ij} + \frac{1}{\mu_0} B_i B_j - \frac{1}{2\mu_0} \mathbf{B}^2 \delta_{ij}$$

とおくと

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em}) = \int_V \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dv \quad (2.262)$$

となる。右辺の i 成分は, $A_j = T_{ij}$ とおくと, ガウスの定理を用いて,

$$\int_V \sum_j \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_j} dv = \int_V \sum_j \frac{\partial A_j}{\partial x_j} dv = \int_V \text{div } \mathbf{A} dv = \int_{\Sigma} \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Sigma} \sum_j T_{ij} n_j dS$$

となる。したがって,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em})_i &= \int_{\Sigma} \sum_j T_{ij} n_j dS \\ F_i &= \int_{\Sigma} \sum_j T_{ij} n_j dS, \quad i = 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.263)$$

とおくと,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{G}_M + \mathbf{G}_{em}) = \mathbf{F} \quad (2.264)$$

となる。これより, \mathbf{g} は電磁場の運動量密度を表しており, またこの運動量保存則の導出から, Maxwell 応力テンソルは単に体積力を導くテンソルというだけでなく, 電磁場の応力分布の正しい表現となっていることがわかる。単色の平面電磁波では $\mathbf{S} = c u_{em} \hat{\mathbf{k}}$ だったから, $u_{em} = cg$ である。

2010年3月13日, 新聞各紙は,

光の圧力で星空を舞うー世界初の宇宙帆船「イカロス」
などの見出しで太陽の光を帆に受けて, 光の圧力でヨットのように航行する世界初の小型ソーラ電力セイル実証機「IKAROS (イカロス)」の機体が完成したことを報じました。宇宙航空研究開発機構が5月18日に打ち上げるH2Aロケットで, 金星探査機「あかつき」とともに金星の方向へ向かうというものです。(気象などによって実際の打ち上げは5月21に行われた。)

世間では, 小惑星「イトカワ」から帰還した「はやぶさ」に注目が集まっていますが, この「イカロス」の成果にも注目したい。3月の新聞報道を要約すると, 「イカロス」は, 太陽光を帆に受けて航行する宇宙ヨット(帆船)。直径1.6m, 高さ80cmの円筒形で, 胴体部分に一辺約14mの薄い帆が巻き付けられている。金星への航行時は帆を大きく開く。太陽光を受けると, 0.5gほどの重りをぶら下げたのと同じ圧力を得られる, とのことです。

ちょっと, 計算してみよう。ポインティングベクトル $\mathbf{S} = \mathbf{E} \times \mathbf{H}$, (\mathbf{E} は電場, \mathbf{H} は磁場) は単位面積当たりの単位時間に通過するエネルギー割合を表している。太陽光の地球表面での単位時間, 単位面積あたり垂直方向の放射エネルギー(太陽定数)は, 1.37kW/m^2 であることがわかっている。すなわち, $S = 1.37\text{kW/m}^2$ である。従って, 太陽からの距離が地球と同じ点での, 太陽光の圧力 p は, c を光速とすると

$$p \approx \frac{S}{c} = \frac{1.37 \times 10^3 \text{ J}/(\text{s} \cdot \text{m}^2)}{3.0 \times 10^8 \text{ m/s}} = 0.46 \times 10^{-5} \text{ Pa}$$

となる。帆の面積は $(14\text{m})^2 \approx 200\text{m}^2$ だから, 太陽光が帆に垂直に入射するとして, 帆が受ける力は完全吸収から完全反射の間で

$$0.92 \times 10^{-3} \text{ N} < f < 1.84 \times 10^{-3} \text{ N}$$

となるだろう。 $1.84 \times 10^{-3} \text{ N} \approx 0.2\text{g}$ 重。イカロスは「ソーラー電力セイル」推進で, 帆の約10%が薄膜太陽電池で, この電力によるイオンエンジンの推力も併用されている。

宇宙航空研究開発機構は2010年7月9日, 光を帆に1カ月間浴び続け, 秒速約10メートルの速度変化を観測し, 1.12mN (0.114g 重) に相当する力を受けていた, と発表しました (IKAROSの質量は約310kg)。これによりIKAROSは, 惑星間航行において, 光子による史上最大の加速度を発揮した実証機となりました。この力は極めて小さいのですが, 継続的に長期間作用させることが出来, 大きな効果を発揮できるのです。宇宙の飛行物体の加速はこうしたエンジンの推力だけでなく, 太陽や惑星, 衛星などの引力を組み合わせる効果的に軌道や速度を制御します (スイングバイなど)。太陽光の反射だけでは太陽に近づく方向に力を働かすことはできません。この点について, ネットに間違った記述がありますので注意下さい。

夏目漱石の「三四郎」には, 光の圧力の実験がでできます。現在にいたって, やっとその実用化に目処がついた, ということです。1950年代の少年雑誌にはイオンロケット, 光子ロケットの構想が何度も載っていました。「イカロス」は自ら光を発して推進するロケットではなく, したがって, 「帆船」という巧みな命名がされていますが, 光の圧力(光は運動量を持っていること)を用いるという意味で光子ロケットと同じ原理です。少し注意して欲しいことは, 光の圧力は, 量子論的な議論に依存する考え方ではなく, 古典物理学(電磁気学, $p = \frac{S}{c}$ の解釈に, その特徴が現れている)の中で理解できるものです。その意味で, ここで「光子」という表現を用いることは必ずしも適切ではない, と感じています。

「光より速いニュートリノ 国際研究で観測 相対論と矛盾」というニュースが世界を駆けめぐりました。2011年9月23日, 名古屋大, 宇都宮大, 神戸大, 東邦大などが参加する国際共同研究グループは素粒子の一種ニュートリノが光よりも速い, との実験結果を得たと発表しました。これが真実なのかどうかは, 多くの検証実験を待たねばなりません。「相対性原理」を「光速不変の原理」とする系に適用したのがアインシュタインの特殊相対性理論です。一方, われわれが学習してきた Maxwell 方程式は「特殊相対性理論」の枠組みの中で完全に理解でき, それは「電気力学」という形でまとめられて, さらに, 光子や物質の生成消滅を含む相互作用は相対論的な場の理論「量子電磁力学」に発展してきました。もし「光より速いニュートリノ」が真実であるとするのならば, 科学の最前線分野だけでなく, 初等電磁気学や特殊相対性理論さえも修正せざるを得なくなるのかもしれない。しかし, 如何なる修正があったとしても, まだよく分からないが適用限度内においては, アインシュタインの時空の解釈の正当性は引き続き継続すると予想できます。実験結果の真偽だけでなく, 知りたいことがいっぱい出てきました。

第3章 電磁気学のためのベクトル解析

3.1 ベクトルの基本性質

1 ベクトル空間の公理

任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in X$, 任意のスカラー α, β に対して

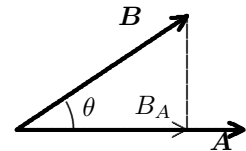
- (a) $\mathbf{x} + \mathbf{y} = \mathbf{y} + \mathbf{x}$,
- (b) $\mathbf{x} + (\mathbf{y} + \mathbf{z}) = (\mathbf{x} + \mathbf{y}) + \mathbf{z}$,
- (c) 1つの元 0 が存在して, 任意の元 \mathbf{x} に対して, $\mathbf{x} + 0 = \mathbf{x}$,
- (d) $\alpha(\mathbf{x} + \mathbf{y}) = \alpha\mathbf{x} + \alpha\mathbf{y}$,
- (e) $(\alpha + \beta)\mathbf{x} = \alpha\mathbf{x} + \beta\mathbf{x}$,
- (f) $\alpha(\beta\mathbf{x}) = (\alpha\beta)\mathbf{x}$,
- (g) $1 \cdot \mathbf{x} = \mathbf{x}$,
- (h) $0 \cdot \mathbf{x} = 0$.

ベクトル \mathbf{A} を, このように肉太文字で表記することが多いが, 本来, 矢線を用いた \vec{A} であっても, 単に A で表しても構わない。しかし, A は $|\mathbf{A}|$ との混乱の元であるから避けた方がよい。単位ベクトル \mathbf{i} を i や \hat{i} と表記してもほとんど混乱は起らないが, 物理学では, 統一した表記法を用いることが重要である。それでは電流密度 \mathbf{i} はどう表すのか, 虚数単位 i はどうするのか, j とするのか, その他多くの問題と関連してくる。手書きの時は面倒でも矢線 \vec{A} , 印刷では \mathbf{A} を標準としておこう。

2 ベクトルの内積 (スカラー積) とベクトルの大きさ (ノルム)

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = AB \cos \theta = AB_A = A_B B \quad (3.1)$$

内積が定義されると, ベクトルの大きさ $|\mathbf{A}|$ は $|\mathbf{A}| = \sqrt{\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}}$ と定義される。



スカラー積には, 交換法則 $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$ およびスカラー倍について

$(\alpha\mathbf{A}) \cdot \mathbf{B} = \alpha(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \mathbf{A} \cdot (\alpha\mathbf{B})$ が成立する。

また, スカラー積には, 分配法則 $\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C}$ が成立する。

3 3次元ベクトルの表現

3次元として, 基本単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ を

$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1, \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は右手系によって定義する。

$$\vec{PQ} = \mathbf{A} = (A_x, A_y, A_z) = A_x \mathbf{i} + A_y \mathbf{j} + A_z \mathbf{k} \quad (3.2)$$

A_x, A_y, A_z : x, y, z 成分

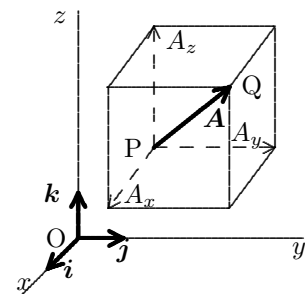
このとき内積は

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = A_x B_x + A_y B_y + A_z C_z \quad (3.3)$$

またベクトル \mathbf{A} の大きさ (ノルム) $A = |\mathbf{A}|$ は

$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_x^2 + A_y^2 + A_z^2} \quad (3.4)$$

となる。



練習

[1] ベクトル $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ の大きさ, 方向余弦を求めよ。

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{14}, \quad (l, m, n) = \left(\frac{1}{\sqrt{14}}, \frac{-2}{\sqrt{14}}, \frac{3}{\sqrt{14}}\right)$$

[2] 2点の位置ベクトルが $\vec{OA} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}, \vec{OB} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ の時, ベクトル \vec{AB} をもとめよ。

$$\vec{AB} = 3\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

[3] ベクトル $\mathbf{A} = 4\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{B} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ の内積を求め, 2つのベクトルのなす角を求めよ。

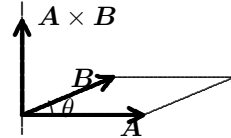
$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = 0, \quad 90^\circ \left(\frac{\pi}{2}\right)$$

[4] ベクトル $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ の $\mathbf{B} = 3\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$ 方向の成分を求めよ。

$$A_B = -\frac{13}{5}$$

4 ベクトルの外積 (ベクトル積)

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \begin{cases} \text{大きさ} & : AB \sin \theta \text{ (}\mathbf{A}, \mathbf{B}\text{ を 2 辺とする平行四辺形の面積)} \\ \text{向き} & : \mathbf{A}, \mathbf{B}\text{ に垂直で } \mathbf{A}\text{ から } \mathbf{B}\text{ へ右ねじの進む方向} \end{cases}$$



ベクトルの外積は3次元ベクトル空間に対してのみ定義される。基本性質

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = -\mathbf{B} \times \mathbf{A}, \quad m\mathbf{A} \times \mathbf{B} = m(\mathbf{A} \times \mathbf{B}), \quad \mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C} \quad (3.5)$$

が成り立つ。1番目, 2番目の性質は定義から容易にわかるから, 3番目の性質(分配法則)だけ検討しておく。はじめに,

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{n} = \mathbf{A} \times \mathbf{n} + \mathbf{B} \times \mathbf{n} \quad (\mathbf{n} : \text{単位ベクトル})$$

を証明する。 \mathbf{n} に垂直な平面を P として, \mathbf{A} の平面 P への射影を \mathbf{A}_\perp とする。

$$\mathbf{A} \times \mathbf{n} = \mathbf{A}_\perp \times \mathbf{n}$$

は P 内のベクトル \mathbf{A}_\perp を P 内で 90 度回転したベクトルである。同様に $\mathbf{A}_\perp \times \mathbf{n}, (\mathbf{A} + \mathbf{B})_\perp \times \mathbf{n}$ は $\mathbf{B}_\perp, (\mathbf{A} + \mathbf{B})_\perp$ を 90 度回転したベクトルである。

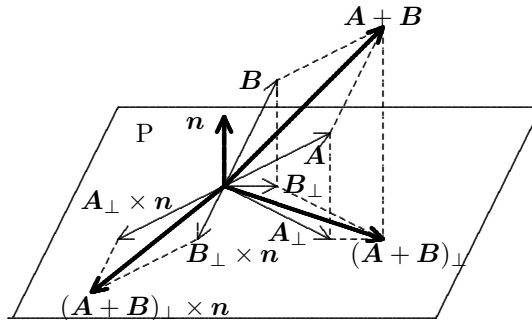
$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_\perp = \mathbf{A}_\perp + \mathbf{B}_\perp$$

が成り立つから, 両辺を P 内で 90 度回転して

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B})_\perp \times \mathbf{n} = \mathbf{A}_\perp \times \mathbf{n} + \mathbf{B}_\perp \times \mathbf{n}$$

よって

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{n} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})_\perp \times \mathbf{n} \\ &= \mathbf{A}_\perp \times \mathbf{n} + \mathbf{B}_\perp \times \mathbf{n} \end{aligned}$$



$\mathbf{C} = C\mathbf{n}$ とすると, $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{C} = C\{(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \times \mathbf{n}\} = C\{\mathbf{A}_\perp \times \mathbf{n} + \mathbf{B}_\perp \times \mathbf{n}\} = \mathbf{A} \times \mathbf{C} + \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ となる。

基本単位ベクトル $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ は

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

だから外積の基本的性質を使うと, 外積の成分表示が得られる。

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= (A_y B_z - A_z B_y, A_z B_x - A_x B_z, A_x B_y - A_y B_x) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.6)$$

練習

- [1] ベクトル $\mathbf{A} = (2, 3, 4)$, $\mathbf{B} = (-1, 2, 3)$ のとき, $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ および $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$ を計算せよ。
 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (3 \times 3 - 4 \times 2, 4 \times (-1) - 2 \times 3, 2 \times 2 - 3 \times (-1)) = (+1, -10, 7)$
 $\mathbf{B} \times \mathbf{A} = (2 \times 4 - 3 \times 3, 3 \times (-1) \times 4, -1 \times 3 - 2 \times 2) = (-1, +10, -7)$
- [2] 2つのベクトル $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$ に垂直な単位ベクトルを求めよ。
 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (-1 \times (-5) - 1 \times 4, 1 \times 3 - 2 \times (-5), 2 \times 4 - (-1) \times 3) = (1, 13, 11)$
 $\mathbf{n} = \frac{\mathbf{A} \times \mathbf{B}}{|\mathbf{A} \times \mathbf{B}|} = \frac{1}{\sqrt{1^2 + 13^2 + 11^2}}(1, 13, 11) = \frac{1}{\sqrt{291}}(1, 13, 11)$
- [3] ベクトル $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ の外積を求め, 2つのベクトルのなす平行四辺形の面積を求めよ。
 $\mathbf{A} \times \mathbf{B} = (2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) \times (-\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = (-3 \times 2 - 5 \times 2, 5 \times (-1) - 2 \times 2, 2 \times 4 + 3 \times (-1)) = (-26, -9, 5)$, $S = |\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = \sqrt{782}$
- [4] 三角形の3つの頂点の位置ベクトルを $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ とすると, その三角形の面積ベクトルは $\frac{1}{2}(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})$ であることを証明せよ。(面積ベクトルとは, 大きさがその面積に等しく, その面に垂直なベクトルである。ベクトルの向きはその都度約束する)

5 スカラー三重積

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= A_x(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_x + A_y(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_y + A_z(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_z \\ &= A_x(B_y C_z - B_z C_y) + A_y(B_z C_x - B_x C_z) + A_z(B_x C_y - B_y C_x) \\ &= \begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix} \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \mathbf{B} \cdot (\mathbf{C} \times \mathbf{A}) = \mathbf{C} \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \quad (3.8)$$

$\mathbf{A} = l_1 \mathbf{a} + m_1 \mathbf{b} + n_1 \mathbf{c}$, $\mathbf{B} = l_2 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{b} + n_2 \mathbf{c}$, $\mathbf{C} = l_3 \mathbf{a} + m_3 \mathbf{b} + n_3 \mathbf{c}$ のとき

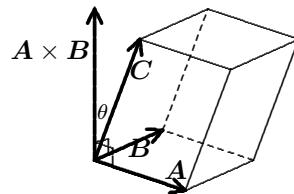
$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (3.9)$$

である。なぜなら

$$\begin{aligned} &\mathbf{B} \times \mathbf{C} \\ &= (l_2 \mathbf{a} + m_2 \mathbf{b} + n_2 \mathbf{c}) \times (l_3 \mathbf{a} + m_3 \mathbf{b} + n_3 \mathbf{c}) \\ &= (l_2 m_3 - l_3 m_2) \mathbf{a} \times \mathbf{b} + (m_2 n_3 - m_3 n_2) \mathbf{b} \times \mathbf{c} + (n_2 l_3 - n_3 l_2) \mathbf{c} \times \mathbf{a} \\ &\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) \\ &= (l_2 m_3 - l_3 m_2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (m_2 n_3 - m_3 n_2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + (n_2 l_3 - n_3 l_2) \mathbf{A} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) \\ &= \{n_1(l_2 m_3 - l_3 m_2) + l_1(m_2 n_3 - m_3 n_2) + m_1(n_2 l_3 - n_3 l_2)\} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \end{aligned}$$

練習

$|\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C})|$ はベクトル $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ のなす平行6面体の体積であることを説明せよ。



6 ベクトル三重積

x 成分について

$$\begin{aligned} A_y(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_z - A_z(\mathbf{B} \times \mathbf{C})_y &= A_y(B_x C_y - B_y C_x) - A_z(B_z C_x - B_x C_z) \\ &= (A_x C_x + A_y C_y + A_z C_z) B_x - (A_x B_x + A_y B_y + A_z B_z) C_x \\ &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) B_x - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) C_x \end{aligned}$$

同様に y, z について成り立つから、まとめると

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C})\mathbf{B} - (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})\mathbf{C} \quad (3.10)$$

となる。

3.2 2変数, 3変数の関数の微分

1 関数 $z = f(x, y)$ について, 極限

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x, y) - f(x, y)}{\Delta x} \\ \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{f(x, y + \Delta y) - f(x, y)}{\Delta y} \end{aligned} \quad (3.11)$$

が存在するとき, $z = f(x, y)$ は (x, y) で偏微分可能という。ある領域で偏微分可能で $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ を x, y の関数と見たとき, これらを偏導関数という。 $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ はまた $f_x(x, y), f_y(x, y)$ とも表せられ, $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y, \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x$ での極限操作で変化させない方の変数 y, x が明白であるときは, それぞれ $\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}$ あるいは z_x, z_y と表すこともある。また, $\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} = z_{xy}$ などと書く。

2 全微分

[1] $z = f(x, y)$ 関数について,
 (x, y) における増分 $\Delta x, \Delta y$ に無関係に
 $X(x, y), Y(x, y)$ が決まり

$$\begin{aligned} \Delta z &\equiv f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x, y) \\ &= X(x, y)\Delta x + Y(x, y)\Delta y + o(\Delta \rho) \quad (3.12) \\ \Delta \rho &= \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned}$$

と表せるとき, $z = f(x, y)$ は (x, y) で全微分可能という。

$z = f(x, y)$ が (x, y) で全微分可能のとき, $z = f(x, y)$ は (x, y) で連続で, 偏微分可能で (3.12) の

$X(x, y), Y(x, y)$ は

$$X(x, y) = f_x(x, y), \quad Y(x, y) = f_y(x, y)$$

となる。逆に $z = f(x, y)$ が (x, y) の近傍で連続な偏導関数を持てば, (x, y) で全微分可能である (証明略)。

[2] (x, y) の近傍で偏導関数 $f_{xy}(x, y), f_{yx}(x, y)$ が連続ならば,

$$f_{xy}(x, y) = f_{yx}(x, y) \quad (3.13)$$

である (証明略)。

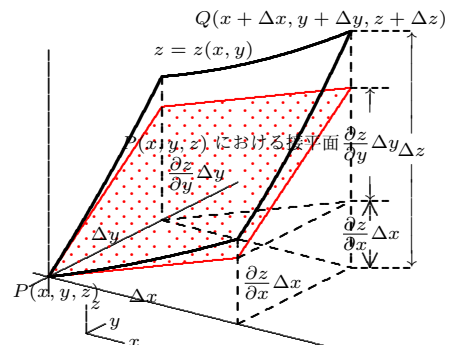
[3] 全微分可能な関数 $z = f(x, y)$ について, (3.12) の主要部分を全微分 dz と定義する。すなわち

$$dz \equiv f_x(x, y)\Delta x + f_y(x, y)\Delta y = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y \Delta x + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \Delta y \quad (3.14)$$

特に, $f(x, y) = x$ とすると, $dx = \Delta x$, $f(x, y) = y$ とすると, $dy = \Delta y$ より

$$dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy \quad (3.15)$$

となる。



3 完全微分形

[1] 逆に単連結領域で連続な偏導関数をもつ関数 $X(x, y), Y(x, y)$ について, 微分形

$$X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad (3.16)$$

が, ある関数 z が存在して

$$dz = X(x, y)dx + Y(x, y)dy \quad (3.17)$$

となるとき, (3.16) は完全微分形という。このとき

$$X(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)_y, \quad Y(x, y) = \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)_x$$

だから, $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$ より

$$\frac{\partial X}{\partial y} = \frac{\partial Y}{\partial x} \quad (3.18)$$

となる。これは (3.16) が完全微分形である必要条件である。一方 (3.18) が成り立てば, $z(x, y)$ を

$$z(x, y) = \int_a^x X(x, b)dx + \int_b^y Y(x, y)dy \quad (3.19)$$

で定義すると

$$\frac{\partial z}{\partial x} = X(x, y), \quad \frac{\partial z}{\partial y} = Y(x, y)$$

となり, $z(x, y)$ は (3.17) を満たす, すなわち (3.16) は完全微分形である。よって (3.18) は (3.16) が完全微分形である必要十分条件である。

[2] 同様に 3 変数について, 微分形

$$X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \quad (3.20)$$

が, ある関数 $u(x, y, z)$ が存在して, その全微分が

$$du = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz \quad (3.21)$$

で表せる, すなわち

$$X(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial y}, \quad Z(x, y, z) = \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.22)$$

となるとき, (3.20) は完全微分形という。

(3.20) が完全微分形である必要十分条件は

$$\frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} = 0 \quad (3.23)$$

である。必要なことは $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x}, \dots$ より得られる。また一方 (3.23) が成り立てば, (3.20) の (a, b, c) から (x, y, z) への線積分を x 軸方向に (a, b, c) から (x, b, c) , y 軸方向に (x, b, c) から (x, y, c) , z 軸方向に (x, y, c) から (x, y, z) の線積分に分割して, $u(x, y, z)$ を

$$u(x, y, z) = \int_a^x X(x, b, c)dx + \int_b^y Y(x, y, c)dy + \int_c^z Z(x, y, z)dz \quad (3.24)$$

で定義すると $u(x, y, z)$ は (3.22) が成り立ち (3.21) を満たす, すなわち (3.20) は完全微分形となる。

4 変数変換

$u = f(x, y)$ が全微分可能で, $x = x(\xi, \eta), y = y(\xi, \eta)$ が偏微分可能ならば, $u = f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))$ も偏微分可能で

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{cases} \quad (3.25) \quad \begin{array}{c} u = f(x, y) \\ \swarrow \quad \searrow \\ x = x(\xi, \eta) \quad y = y(\xi, \eta) \\ \uparrow \quad \downarrow \\ \xi \quad \eta \end{array}$$

ここで Jacobi 行列式 (Jacobian)

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \quad (3.26)$$

を定義すると, (3.25) を解いて

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\frac{\partial(u, y)}{\partial(\xi, \eta)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\frac{\partial(x, u)}{\partial(\xi, \eta)}}{\frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)}}, \quad \text{ただし } \frac{\partial(x, y)}{\partial(\xi, \eta)} \neq 0 \quad (3.27)$$

となる。とくに

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial(u, y)}{\partial(x, y)}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial(x, u)}{\partial(x, y)} \quad (3.28)$$

一般の変数変換を考える。変数の組 $(x) = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ を変数の組 $(y) = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ へ変換し, 続いてもう一つの組 $(z) = (z_1, z_2, \dots, z_n)$ へ変換するとする。Jacobi 行列式 (Jacobian) を

$$\frac{\partial(x)}{\partial(y)} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial y_1} & \frac{\partial x_1}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial y_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial y_1} & \frac{\partial x_2}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial y_n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial x_n}{\partial y_1} & \frac{\partial x_n}{\partial y_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial y_n} \end{vmatrix} \quad (3.29)$$

で定義する。

$$\left(\frac{\partial(x)}{\partial(z)} \right)_{ik} = \frac{\partial x_i}{\partial z_k} = \sum_j \left(\frac{\partial(x)}{\partial(y)} \right)_{ij} \left(\frac{\partial(y)}{\partial(z)} \right)_{jk}$$

だから

$$\frac{\partial(x)}{\partial(z)} = \frac{\partial(x)}{\partial(y)} \frac{\partial(y)}{\partial(z)} \quad (3.30)$$

となる。これを繰り返して

$$\frac{\partial(x)}{\partial(w)} = \frac{\partial(x)}{\partial(y)} \frac{\partial(y)}{\partial(z)} \frac{\partial(z)}{\partial(\cdot)} \dots \frac{\partial(\cdot)}{\partial(w)} \quad (3.31)$$

となる。また (3.30) で $(z) = (x)$ とすると

$$\frac{\partial(x)}{\partial(y)} = \left(\frac{\partial(y)}{\partial(x)} \right)^{-1} \quad (3.32)$$

となる。

$u = u(x, y, z)$ にたいして

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_{y,z} = \frac{\partial(u, y, z)}{\partial(x, y, z)}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{x,z} = \frac{\partial(x, u, z)}{\partial(x, y, z)}, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)_{x,y} = \frac{\partial(x, y, u)}{\partial(x, y, z)} \quad (3.33)$$

とくに, $f(x, y, z) = 0$ の関係があると

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y} \right)_z = \frac{1}{\left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)_z}, \quad \dots \quad (3.34)$$

となる。さらに

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = \frac{\partial(x, z)}{\partial(y, z)} = -\frac{\partial(x, z)}{\partial(z, y)} = -\frac{\partial(x, z)}{\partial(x, y)} \frac{\partial(x, y)}{\partial(z, y)} = -\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x \left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y$$

より

$$\left(\frac{\partial x}{\partial y}\right)_z = -\frac{\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x}{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y} = -\frac{\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right)_y}{\left(\frac{\partial y}{\partial z}\right)_x} \quad (3.35)$$

となる。これは $z = z(x, y)$ として、 $dz = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_y dx + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_x dy$ で $dz = 0$ から直ちに求められる。

- 5 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = (X(x, y, z), Y(x, y, z), Z(x, y, z))$ が単連結領域で連続とすると、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz$ が完全微分形である条件は、 $A(a, b, c)$ から $P(x, y, z)$ へ至る任意の積分路 Γ について線積分が途中の道筋 Γ によらず一意的に決まる、すなわち

$$\int_{\Gamma} (X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz) = \int_{\Gamma} \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} = u(x, y, z) - u(a, b, c) \quad (3.36)$$

であることである。これは Stokes の定理 (後で説明) から確認できる。

$\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ が完全微分形とする。(3.24) での積分路による $du = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ を満たす積分 u は存在する。したがって一般の積分路についても

$$\begin{aligned} \int_A^P \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x} &= \int_A^P (X(x, y, z)dx + Y(x, y, z)dy + Z(x, y, z)dz) \\ &= \int_A^P \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx} + \frac{\partial u}{\partial z} \frac{dz}{dx}\right) dx \\ &= \int_a^x \frac{du}{dx} dx = u(x, y, z) - u(a, b, c) \end{aligned}$$

となり、積分は途中の経路によらない。逆に、積分 u が積分路によらないならば

$$\Delta u = u(x + \Delta x, y, z) - u(x, y, z) = \int_{(x, y, z)}^{(x + \Delta x, y, z)} X(x, y, z) dx = X(x + \theta \Delta x, y, z) \Delta x, \quad (0 < \theta < 1)$$

より

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta u}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} X(x + \theta \Delta x, y, z) = X(x, y, z)$$

などとなり、 $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot d\mathbf{x}$ は完全微分形となる。

- 6 ベクトル \mathbf{A} の微分は

$$\frac{d\mathbf{A}}{dt} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbf{A}(t+h) - \mathbf{A}(t)}{h} \quad (3.37)$$

で定義する。つぎのベクトルの微分公式が成立する。

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} + \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (3.38)$$

$$\frac{d}{dt}(m\mathbf{A}) = \frac{dm}{dt}\mathbf{A} + m\frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (3.39)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (3.40)$$

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \frac{d\mathbf{A}}{dt} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \frac{d\mathbf{B}}{dt} \quad (3.41)$$

練習

- [1] 質量 m の質点の点 O に対する位置ベクトルを \mathbf{r} とすると点 O の周りの角運動量は

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad \text{である。ただし } \mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \text{ である。}$$

運動方程式 $m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{F}$ を用いて、

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} \cdots (\text{角運動量の時間的変化の割合は力のモーメントに等しい})$$

を証明せよ。

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = m\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{v} \times \mathbf{v} + m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$$

- [2] 点Oの周りの面積速度 \mathbf{A} は $\mathbf{A} = \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ で定義される。中心力場では \mathbf{F} は \mathbf{r} の方向を向いている。すなわち、 $\mathbf{F} = k\mathbf{r}$ である。中心力場では面積速度が一定であることを証明せよ。その結果、角運動量 $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = 2m\mathbf{A}$ も一定となる。

$$\begin{aligned}\frac{d\mathbf{A}}{dt} &= \frac{1}{2}\frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{1}{2}\mathbf{v} \times \mathbf{v} + \frac{1}{2}\mathbf{r} \times \mathbf{F}/m = \frac{k}{2m}\mathbf{r} \times \mathbf{r} = 0 \\ \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= 2m\frac{d\mathbf{A}}{dt} = 0\end{aligned}$$

7 ハミルトンの演算子を

$$\nabla = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z} \quad : \text{ナブラとよむ} \quad (3.42)$$

で定義する。肉太の ∇ ，矢線の $\vec{\nabla}$ ，単に ∇ を用いたりする。

- [1] スカラーの勾配 (grad ... グラディエントとよむ)

$$\text{grad } f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = \nabla f(x, y, z) \quad (3.43)$$

- [2] ベクトルの発散 (div ... ダイバージェントとよむ)

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{A} \quad (3.44)$$

$\text{div } \mathbf{A}$ は湧点の密度といわれる

- [3] ベクトルの回転 (rot ... ローテーションとよむ)

$$\text{rot } \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) = \nabla \times \mathbf{A} \quad (3.45)$$

$|\text{rot } \mathbf{A}|$ は渦度といわれる。

8 よく使う微分公式

- [1] $\text{grad}(\phi\psi) = \nabla(\phi\psi) = \psi\nabla\phi + \phi\nabla\psi$

$\nabla(\phi\psi)$ の x, y, z 成分は

$$x \text{ 成分: } \frac{\partial}{\partial x}(\phi\psi) = \psi\frac{\partial\phi}{\partial x} + \phi\frac{\partial\psi}{\partial x}, \quad y \text{ 成分: } \frac{\partial}{\partial y}(\phi\psi) = \psi\frac{\partial\phi}{\partial y} + \phi\frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad z \text{ 成分: } \frac{\partial}{\partial z}(\phi\psi) = \psi\frac{\partial\phi}{\partial z} + \phi\frac{\partial\psi}{\partial z}$$

- [2] $\text{div}(\phi\mathbf{A}) = \nabla \cdot (\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi \cdot \mathbf{A} + \phi\nabla \cdot \mathbf{A} = \nabla\phi \cdot \mathbf{A} + \phi\text{div } \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\text{div}(\phi\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_z) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial x}A_x + \phi\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_y + \phi\frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_z + \phi\frac{\partial A_z}{\partial z} \\ &= \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_x + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_y + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_z \right) + \phi \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right) \\ &= \nabla\phi \cdot \mathbf{A} + \phi\text{div } \mathbf{A}\end{aligned}$$

- [3] $\nabla \times (\phi\mathbf{A}) = \nabla\phi \times \mathbf{A} + \phi\nabla \times \mathbf{A} = \nabla\phi \times \mathbf{A} + \phi\text{rot } \mathbf{A}$

$$\begin{aligned}\text{rot}_x(\phi\mathbf{A}) &= \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_z) - \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_y) \\ &= \frac{\partial\phi}{\partial y}A_z + \phi\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_y - \phi\frac{\partial A_y}{\partial z} = \frac{\partial\phi}{\partial y}A_z - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_y + \phi \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \\ &= (\nabla\phi \times \mathbf{A})_x + \phi\text{rot}_x \mathbf{A}\end{aligned}$$

同様に $\text{rot}_y(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi \times \mathbf{A})_y + \phi\text{rot}_y \mathbf{A}$, $\text{rot}_z(\phi\mathbf{A}) = (\nabla\phi \times \mathbf{A})_z + \phi\text{rot}_z \mathbf{A}$

- [4] $\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \nabla \cdot (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) - \mathbf{A} \cdot (\nabla \times \mathbf{B}) = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}$

$$\begin{aligned}\text{div}(\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \frac{\partial}{\partial x}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_x + \frac{\partial}{\partial y}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_y + \frac{\partial}{\partial z}(\mathbf{A} \times \mathbf{B})_z \\ &= \frac{\partial}{\partial x}(A_y B_z - A_z B_y) + \frac{\partial}{\partial y}(A_z B_x - A_x B_z) + \frac{\partial}{\partial z}(A_x B_y - A_y B_x) \\ &= B_x \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) + B_y \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) + B_z \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -A_x\left(\frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}\right) - A_y\left(\frac{\partial B_x}{\partial z} - \frac{\partial B_z}{\partial x}\right) - A_z\left(\frac{\partial B_y}{\partial x} - \frac{\partial B_x}{\partial y}\right) \\
& = \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{B}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
[5] \text{ rot } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= \nabla \times (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) = (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A} \\
\text{rot } \mathbf{A} &= \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) \times \mathbf{A} = i \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + j \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + k \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \text{ だから} \\
\text{rot } (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) &= i \times \frac{\partial}{\partial x} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + j \times \frac{\partial}{\partial y} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) + k \times \frac{\partial}{\partial z} (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) \\
&= i \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \times \mathbf{B}\right) + i \times \left(\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}\right) + j \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \times \mathbf{B}\right) + j \times \left(\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}\right) + k \times \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \times \mathbf{B}\right) + k \times \left(\mathbf{A} \times \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}\right) \\
&= (i \cdot \mathbf{B}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} - (i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x}) \mathbf{B} + (i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x}) \mathbf{A} - (i \cdot \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + (j \cdot \mathbf{B}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} - (j \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y}) \mathbf{B} + (j \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y}) \mathbf{A} \\
&\quad - (j \cdot \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + (k \cdot \mathbf{B}) \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} - (k \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}) \mathbf{B} + (k \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}) \mathbf{A} - (k \cdot \mathbf{A}) \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z} \\
&= (B_x \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + B_y \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + B_z \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}) - (i \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z}) \mathbf{B} + (i \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + j \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + k \cdot \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}) \mathbf{A} \\
&\quad - (A_x \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial x} + A_y \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial y} + A_z \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial z}) \\
&= (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} - (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + \mathbf{A} \text{div } \mathbf{B} - \mathbf{B} \text{div } \mathbf{A}
\end{aligned}$$

$$[6] \text{ grad } (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = (\mathbf{A} \cdot \nabla)\mathbf{B} + (\mathbf{B} \cdot \nabla)\mathbf{A} + \mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} + \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}$$

各成分について、両辺を展開して比較すればよい。

$$[7] \text{ rot grad } \phi = \nabla \times \nabla \phi = 0$$

$$[8] \text{ div rot } \mathbf{A} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{A}) = 0$$

$$[9] \text{ rot rot } \mathbf{A} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

9 練習

$$\mathbf{r} = (x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \text{ とする。}$$

$$[1] \text{ grad } r = \nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z}\right) = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r}\right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \quad (\text{原点は除く})$$

$$[2] \text{ div } \mathbf{r} = \nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$$

$$[3] \text{ grad } \frac{1}{r} = \nabla \frac{1}{r} = \left(\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial y} \frac{1}{r}, \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}\right) = \left(-\frac{x}{r^3}, -\frac{y}{r^3}, -\frac{z}{r^3}\right) = -\frac{\mathbf{r}}{r^3} \quad (\text{原点は除く})$$

$$[4] \nabla^2 \frac{1}{r} = \text{div } \nabla \frac{1}{r} = -\text{div } \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\nabla \cdot \frac{\mathbf{r}}{r^3} = -\frac{1}{r^3} \cdot \nabla \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \cdot \nabla \mathbf{r} = 3 \frac{\mathbf{r}}{r^5} \cdot \mathbf{r} - \frac{1}{r^3} \times 3 = 0 \quad (\text{原点は除く})$$

$$[5] \text{ rot } \mathbf{r} = 0$$

$$[6] \text{ rot } \left(\frac{1}{2} \mathbf{a} \times \mathbf{r}\right) = \mathbf{a} \quad (\mathbf{a} \text{ は一定})$$

$$[7] \text{ rot } (by\mathbf{i}) = -b\mathbf{k} \quad (b \text{ は一定})$$

$$[8] \text{ rot } \frac{1}{2}(-\omega y\mathbf{i} + \omega x\mathbf{j}) = \omega\mathbf{k} \quad (\omega \text{ は一定})$$

3.3 多重積分，面積分と線積分

- 1 2次元の領域 S を微小領域 S_i に分割し， S_i に属する任意の点を (x_i, y_i) ， S_i に属する2点の最大距離を δ_i とし， $\delta = \max_i \delta_i$ とするとする。このとき領域 S で連続な関数 $f(x, y)$ について

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i f(x_i, y_i) \Delta S_i = \iint_S f(x, y) dS \quad (3.46)$$

で2重積分が定義できる。被積分関数 $f(x, y)$ と積分領域 S は必要に応じて拡張される。同様に，3次元領域 V について，3重積分

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i f(x_i, y_i, z_i) \Delta V_i = \iiint_V f(x, y, z) dv \quad (3.47)$$

が定義される。

- 2 $f(x, y)$ が閉領域 $S : a \leq x \leq b, \phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ で連続ならば

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x, y) dy \quad (3.48)$$

となる。

- 3 すでに定義したように、独立変数を (x_1, x_2, \dots) から (y_1, y_2, \dots) に変換したときの Jacobi 行列式 (Jacobian) を

$$\frac{\partial(x)}{\partial(y)} = \frac{\partial(x_1, x_2, \dots, x_n)}{\partial(y_1, y_2, \dots, y_n)} \quad (3.49)$$

とする。積分変数を (x, y) から (u, v) に変換したとき、

$$\iint_S f(x, y) dx dy = \iint_{S'} f(u, v) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv \quad (3.50)$$

ここで S' は S に対応する (u, v) での領域である。

同様に 3 重積分について、積分変数を (x, y, z) から (u, v, w) に変換すると

$$\iiint_V f(x, y, z) dx dy dz = \iiint_{V'} f(u, v, w) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \quad (3.51)$$

ここで V' は V に対応する (u, v, w) での領域である。

一般に、独立変数を (x_1, x_2, \dots) から (y_1, y_2, \dots) に変換したとき、多重積分では

$$\iint \cdot \int_X f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \cdots dx_n = \iint \cdot \int_Y f(y_1, y_2, \dots, y_n) \left| \frac{\partial(x)}{\partial(y)} \right| dy_1 dy_2 \cdots dy_n \quad (3.52)$$

となる。

- 4 3 次元関数 $f(x, y, z)$ の曲面 S 上で面積分は、曲面を微小面 ΔS_i に分割し、 ΔS_i 上の点を (x_i, y_i, z_i) とし、微小面 ΔS_i の径 (ΔS_i 内の 2 点の距離の上限) の最大値 δ を 0 にした極限

$$\int_S f(x, y, z) dS = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i \quad (3.53)$$

で定義する。

練習

次の各面積分をもとめよ。ただし、 \mathbf{n} は曲面 S によって囲まれた領域から、外向きの法線ベクトルである。

- (1) $\int_S x^2 dS$ (原点に中心がある 1 辺 $2a$ の立方体の表面を S とする)
 $\int_S x^2 dS = a^2 \cdot (2a)^2 \times 2 + \int_{-a}^a x^2 \cdot 2a dx \times 2 \times 2 = 8a^4 + 8a \times \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-a}^a$
 $= 8a^4 + 8a \times \frac{2a^3}{3} = \frac{40}{3} a^4$
- (2) $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$ (原点に中心がある 1 辺 $2a$ の立方体の表面を S とする)
 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = (a, y, z) \cdot (1, 0, 0) = a$ より $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = 6 \times a \times (2a)^2 = 24a^3$
- (3) $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS$ (半径 a の球面を S とする)
 $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{r} \cdot \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} = a$ より $\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS = a \cdot 4\pi a^2 = 4\pi a^3$
- (4) $\int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$ (半径 a の球面を S とする)
 $\int_S \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \cdot \int_S \frac{a}{a^3} dS = \frac{q}{\epsilon_0}$

(5) 点 $\mathbf{d} = (d, 0, 0)$ に電荷 q があると、電場 \mathbf{E} は $\mathbf{E} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{d}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3}$ である。

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS \quad (\text{原点を中心とする半径 } a \text{ の球面を } S \text{ とする})$$

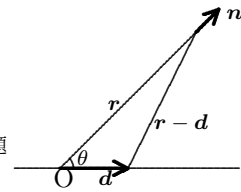
$t = \cos \theta$ において

$$\int_S \mathbf{E} \cdot \mathbf{n} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_S \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{d}|^3} dS = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_0^\pi \frac{(a - d \cos \theta) 2\pi a^2 \sin \theta d\theta}{(a^2 + d^2 - 2ad \cos \theta)^{3/2}}$$

$$= \frac{2\pi a^2 q}{4\pi\epsilon_0} \int_{-1}^1 \frac{a - t}{(a^2 + d^2 - 2adt)^{3/2}} dt = \frac{q}{\epsilon_0}$$

(この計算は自分でチェックしておいて下さい。ガウスの法則を学ぶとこの問題は

は一瞬に解けます。)



特に曲面 S で囲まれた領域 V で定義された 3 次元関数 $f(x, y, z)$ に関して、曲面 S の領域から外向きの方向余弦 $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ をかけた面積分は

$$\int_V \text{grad } f(x, y, z) dv = \int_S f(x, y, z) \mathbf{n} dS \quad (3.54)$$

となるのが以下のように証明できる。

曲面 $S: z = z(x, y)$ に垂直な単位ベクトル $\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z)$ は

$$\mathbf{n} = \pm \frac{1}{\sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1}} (-z_x, -z_y, 1), \quad dS = \sqrt{z_x^2 + z_y^2 + 1} dx dy \quad (3.55)$$

であるから、曲面上の面積要素 $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ は

$$d\mathbf{S} = \pm (-z_x dx dy, -z_y dx dy, dx dy) \quad (3.56)$$

となる。

曲面 $S: \phi(x, y, z) = c$ (c は定数) 上の点 $P(x, y, z)$ の微小面積 $\mathbf{n} dS = d\mathbf{S}$ を考える。面に垂直な単位ベクトル (法線ベクトル) \mathbf{n} は符号の任意性がある。曲面 $\phi(x, y, z) = c$ と y 軸に垂直な平面との交線上の微小ベクトル $d\mathbf{r}_y$ は

$$d\mathbf{r}_y = \mathbf{i} dx + \mathbf{k} dz, \quad \phi_x dx + \phi_z dz = 0 \quad \text{より} \quad d\mathbf{r}_y = \left(\mathbf{i} - \frac{\phi_x}{\phi_z} \mathbf{k}\right) dx$$

同様に、曲面 $\phi(x, y, z) = c$ と x 軸に垂直な平面との交線上の微小ベクトルは

$$d\mathbf{r}_x = \left(\mathbf{j} - \frac{\phi_y}{\phi_z} \mathbf{k}\right) dy$$

したがって、

$$d\mathbf{S} = d\mathbf{r}_y \times d\mathbf{r}_x = \frac{1}{\phi_z} (\phi_x, \phi_y, \phi_z) dx dy, \quad (n_x dS = \frac{\phi_x}{\phi_z} dx dy, \quad n_y dS = \frac{\phi_y}{\phi_z} dx dy, \quad n_z dS = dx dy)$$

となる。また、点 $P(x, y, z)$ における曲面 $\phi(x, y, z) = c$ の法線ベクトルは

$$\mathbf{n} = (n_x, n_y, n_z) = \pm \frac{1}{\sqrt{\phi_x^2 + \phi_y^2 + \phi_z^2}} (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$$

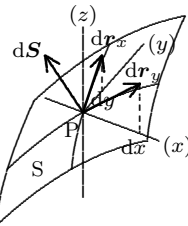
当然のことであるが、点 P を通る y 軸および x 軸に平行な平面と曲面の交線によって微小面積 $d\mathbf{S}$ を表して法線ベクトル \mathbf{n} を求めたが、結果は x, y, z 軸の選択に関わらない表現となっている。 $\nabla\phi = (\phi_x, \phi_y, \phi_z)$ は曲面 (等ポテンシャル面 $\phi = c$) に垂直な方向の微分を表している。したがって、

$$d\phi = \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi_x dx + \phi_y dy + \phi_z dz$$

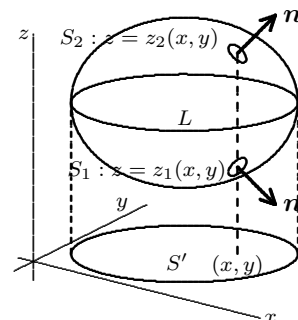
の意味は明らかである。

点 $P(x, y, z)$ における曲面 $\phi(x, y, z) = c$ の法線ベクトル \mathbf{n} を求めるだけならば、等ポテンシャル面 $\phi = c$ 内の点 P における任意の $d\mathbf{r}$ に対して、 $\nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = 0$ より、 $\nabla\phi$ は曲面に垂直となる事から得られる。

曲面が $S: z = z(x, y)$ で与えられているときは、 $\phi(x, y, z) = z - z(x, y)$ において、 $\phi_x = -z_x$, $\phi_y = -z_y$, $\phi_z = 1$ とすればよい。

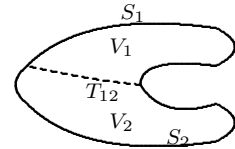


(3.54) の z 成分について証明する。はじめに、閉曲面 S は z 軸に平行な直線と 2 つより多くの交点を持たないとし、閉曲面 S の xy 平面への正射影を S' 、底面を S' とする xy 平面に垂直な曲面はもとの曲面 S と 1 つの閉曲線 L で接している。これにより、曲面 S は曲線 L によって z 軸の上面 $S_2: z = z_2(x, y)$ と下面 $S_1: z = z_1(x, y)$ に 2 分される。法線ベクトル \mathbf{n} は外向きを正の方向としているので、面積要素は上面では $dx dy = n_z dS$ 、下面では $dx dy = -n_z dS$ となる。



$$\begin{aligned}
\int_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dv &= \iiint_V \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dx dy dz = \iint_{S'} \left\{ \int_{z_1}^{z_2} \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} dz \right\} dx dy \\
&= \iint_{S'} [f(x, y, z)]_{z_1}^{z_2} dx dy = \iint_{S'} \{f(x, y, z_2) - f(x, y, z_1)\} dx dy \\
&= \int_{S_2} f(x, y, z_2) n_z dS - \int_{S_1} f(x, y, z_1) (-n_z) dS \\
&= \int_S f(x, y, z) n_z dS \tag{3.57}
\end{aligned}$$

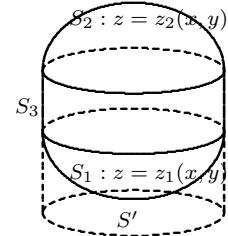
曲面 S が z 軸と 2 点より多くの点で交わるときは、閉曲面 S をいくつかの曲面で分割し、それぞれ閉曲面 S_1, S_2, \dots については z 軸とせいぜい 2 点で交わるようにする。それぞれの閉曲面で囲まれた領域を V_1, V_2, \dots 、分割面を T_{12}, T_{23}, \dots とする。



$$\int_V = \int_{V_1} + \int_{V_2} + \dots = \int_{S_1} + \int_{S_2} + \dots$$

となるが、隣り合う 2 つの閉曲面 S_i, S_j の境界面 T_{ij} ではそれぞれの法線方向は逆となり、境界面での面積分は互いに打ち消し合う。したがって、右辺の各面積分は一つの閉曲面 S での積分となる。

また閉曲面 S の一部が底面を S' とする柱面を含むときは、 S の柱面上の部分を S_3 とすると、閉曲面 S は S_1, S_2, S_3 から構成される。 S_3 は z 軸に垂直であり、 n_z は 0 となる。 $\int_{S_3} f(x, y, z) n_z dS = 0$ したがって、(3.57) の右辺の面積分への S_3 の寄与はなく、(3.57) は成り立つ。



x, y 成分についても同様だから、全ての閉曲面 S について (3.54) が成り立つ。

(3.54) は x, y, z 方向成分が独立に成立するから、 x, y, z 方向成分の f としてそれぞれ A_x, A_y, A_z を適用して加えあわせると

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS \tag{3.58}$$

となる。また (3.54) の y 方向成分に f として A_z を適用したものから、(3.54) の z 方向成分に f として A_y を適用したものを引いて x 軸方向成分に、同様に y 軸方向成分、 y 軸方向成分、にもサイクリックに適用すると

$$\int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} dv = \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS \tag{3.59}$$

となる。(3.54), (3.58), (3.59) は「Gauss の定理」と呼ばれる。

式 (3.59) は式 (3.58) から得られる。

式 (3.58) で、 \mathbf{A} を $\mathbf{A} \times \mathbf{d}$ 、 \mathbf{d} は一定とおくと $\int_V \operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{d}) dv = \int_S (\mathbf{A} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} dS$

$\operatorname{div} (\mathbf{A} \times \mathbf{d}) = \mathbf{d} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{A}$ 、 $(\mathbf{A} \times \mathbf{d}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{d} \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{A})$ を用いると $\mathbf{d} \cdot \int_V \operatorname{rot} \mathbf{A} dv = \mathbf{d} \cdot \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{A} dS$

\mathbf{d} は任意だから (3.59) となる。

Gauss の定理 (3.58) からベクトルの発散 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ の意味がより明らかになる。点 P を内部に含む微小な閉曲面 S と、その内部の体積 Δv に対して Gauss の定理を適用すると

$$\operatorname{div} \mathbf{A} \Delta v = \int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS, \text{ よって } \operatorname{div} \mathbf{A} = \frac{\int_S \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS}{\Delta v}$$

となる。ベクトル \mathbf{A} を場の量とすると、 $\operatorname{div} \mathbf{A}$ は単位体積当たりのその表面を貫く流線の数で、単位体積当たりの「湧きだし」の割合である。

5 同様に 3 次元関数 $f(x, y, z)$ の 3 次元曲線 C 上での線積分を

$$\int_C f(x, y, z) ds = \lim_{\delta \rightarrow 0} \sum_i f(x_i, y_i, z_i) \Delta s_i \tag{3.60}$$

で定義しておく。ここで、 Δs_i は曲線上の線要素である。

特に $f(x, y, z)$ に、曲線の接線方向の方向余弦 $(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds})$ をかけた線積分は

$$\begin{aligned} \int_C f(x, y, z) ds &= \left(\int_C f(x, y, z) dx, \int_C f(x, y, z) dy, \int_C f(x, y, z) dz \right) \\ &= \left(\int_C f(x, y, z) \frac{dx}{ds} ds, \int_C f(x, y, z) \frac{dy}{ds} ds, \int_C f(x, y, z) \frac{dz}{ds} ds \right) \end{aligned}$$

となる。積分路を $C: A \rightarrow B$ とすると

$$\int_A^B f(x, y, z) ds = - \int_B^A f(x, y, z) ds$$

となる。

練習

次の線積分を求めよ。

- (1) Γ を点 $(-a, b, 0)$ から点 $(a, b, 0)$ へ直線的に進む積分路とする。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} r^2 ds &= \int_{\Gamma} r^2 dx = \int_{-a}^a (x^2 + b^2) dx = [\frac{x^3}{3} + b^2 x]_{-a}^a = (\frac{2a^3}{3} + 2b^2 a) \cdot i \\ \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Gamma} x dx = [\frac{x^2}{2}]_{-a}^a = 0 \end{aligned}$$

- (2) Γ を点 $(a, 0, 0)$ から点 $(0, b, 0)$ へ直線的に進む積分路とする。

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} r^2 ds &= \int_a^0 (x^2 + y^2) i [dx + \int_0^b (x^2 + y^2) j dy] \\ &= \int_a^0 (x^2 + (-\frac{b}{a}x + b)^2) i dx + \int_0^b ((-\frac{a}{b}y + a)^2 + y^2) j dy = -\frac{a}{3}(a^2 + b^2) i + \frac{b}{3}(a^2 + b^2) j \\ \int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{\Gamma} (x dx + y dy) = \frac{1}{2} \int_{\Gamma} d(x^2 + y^2) = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \end{aligned}$$

- (3) Γ を各点 $(a, 0, 0)$, $(0, b, 0)$, $(-a, 0, 0)$, $(0, -b, 0)$ を一回りする積分路とすると

$$\int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

となることを確かめよ。

$$\int_{\Gamma} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{s} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) + \frac{1}{2}(b^2 - a^2) + \frac{1}{2}(a^2 - b^2) = 0$$

- (4) $r dr = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ であることを証明せよ。

$r^2 = \mathbf{r} \cdot \mathbf{r}$ より、両辺の微分をとると、 $d(r^2) = d(\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})$ 。

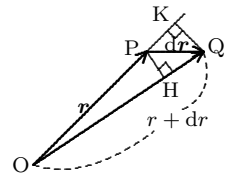
これより $2r dr = 2\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ 。したがって、 $r dr = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ である。

図形では、 $d\mathbf{r}$ が微小の時、

$OP=OH=r$, $HQ=PK=\frac{r}{r} \cdot d\mathbf{r}$, $r + dr = OQ=OH+HQ$ だから、

$dr = \frac{r}{r} \cdot d\mathbf{r}$, すなわち、 $r dr = \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}$ となる。

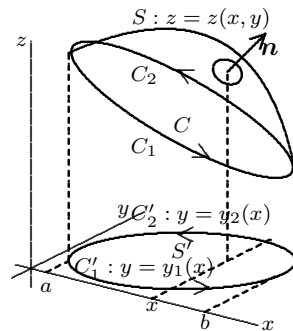
これにより、電位 $\phi(\mathbf{r}) = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0} \int_{\infty}^{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{r}}{r^3} ds$ が積分の途中の経路によらず r だけの関数 (とくにここでは r だけの関数) になることが導かれる。



閉曲線 C で囲まれた曲面 S について

$$\int_S \mathbf{n} \times \text{grad } f(x, y, z) dS = \int_C f(x, y, z) ds \quad (3.61)$$

が成り立つ。(3.61) の x 成分について証明する。閉曲線 C で囲まれた曲面を $S: z = z(x, y)$ とし、 xy 平面への正射影を C' , S' とする。 C' の変域を $a \leq x \leq b$ とし、積分路にしたがって C' を $C'_1(x: a \rightarrow b, y = y_1(x))$ と $C'_2(x: b \rightarrow a, y = y_2(x))$ に分割する。



$n_y dS = z_y dx dy$, $n_z dS = dx dy$ を用いると、

$$\begin{aligned} \int_S \left(n_y \frac{\partial}{\partial z} - n_z \frac{\partial}{\partial y} \right) f(x, y, z) dS &= - \iint_{S'} \left(\frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial z} z_y(x, y) + \frac{\partial f(x, y, z(x, y))}{\partial y} \right) dx dy \\ &= - \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{d}{dy} f(x, y, z(x, y)) dy \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \int_a^b f(x, y_1(x), z(x, y_1(x))) dx + \int_b^a f(x, y_2(x), z(x, y_2(x))) dx \\
&= \oint_C f(x, y, z) dx
\end{aligned}$$

(3.61) は y 成分, z 成分についても, 単独で成立する。

また (3.61) で, x 成分について f を A_x , y 成分について f を A_y , z 成分について f を A_z で置き換えたものを加えあわせると

$$\int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} \quad (3.62)$$

となる。(3.61), (3.62) は「Stokes の定理」と呼ばれる。

Stokes の定理 (3.62) は $\text{rot } \mathbf{A}$ の幾何学的な意味を説明してくれる。十分小さい曲面 ΔS の法線ベクトルを \mathbf{n} とすると

$$\text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} \Delta S = \int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

$$(\text{rot } \mathbf{A})_n = \frac{\int_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}}{\Delta S}$$

即ち単位面積にわたる \mathbf{A} の一周の積分がその点における $\text{rot } \mathbf{A}$ の面に垂直な成分である。

またこのことから, ベクトルの回転の定義式を導くことができる。原点における $(\text{rot } \mathbf{A})_z$ は, 原点を中心とする xy 平面に平行な長方形 $ABCD$ について,

$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{AB} + \int_{BC} + \int_{CD} + \int_{DA}$$

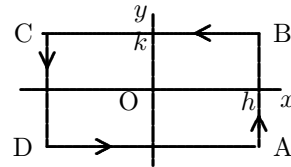
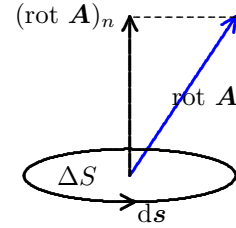
$$\int_{AB} = \int_{AB} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_{-k}^k A_y(h, y, 0) dy = \int_{-k}^k \left\{ A_y + \frac{\partial A_y}{\partial x} h + \frac{\partial A_y}{\partial y} y \right\} dy = \left[A_y y + \frac{\partial A_y}{\partial x} h y + \frac{\partial A_y}{\partial y} \frac{1}{2} y^2 \right]_{-k}^k$$

$$\int_{AB} = 2(A_y k + \frac{\partial A_y}{\partial x} h k), \quad \int_{CD} = 2(-A_y k + \frac{\partial A_y}{\partial x} h k)$$

$$\int_{BC} = 2(-A_x h - \frac{\partial A_x}{\partial y} h k), \quad \int_{DA} = 2(A_x h - \frac{\partial A_x}{\partial y} h k)$$

$$\oint_{ABCD} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = 4hk \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \quad \text{したがって} \quad (\text{rot } \mathbf{A})_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

となる。



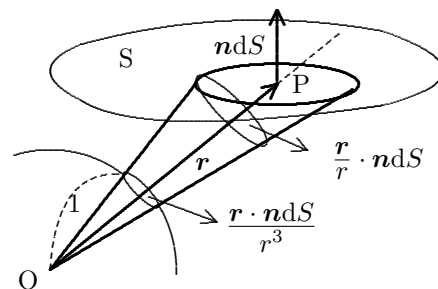
3.4 立体角, ポテンシャル, ベクトルポテンシャル

- 1 点 O を頂点とし閉曲線 Γ に囲まれた曲面 S を底面とする錐体を点 O を中心とする半径 1 の球面が切りとる面積を曲面 S の点 O に対する立体角という。曲面に表 (正側), 裏 (負側) を定義すると, 点 O が曲面 S の負側にあれば立体角を正, 正側にあれば負の立体角と定義する。原点を中心とする球面の原点に対する立体角は 4π である。

曲面 S 上の点 P の点 O に対する位置ベクトルを \mathbf{r} , 曲面 S に対する点 P における負から正の側への面に対する法線単位ベクトルを \mathbf{n} とすると, 点 P での微小面積 dS の点 O に対する立体角 $d\Omega$ は

$$d\Omega = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} dS}{r^3} = -\nabla \cdot \frac{1}{r} \cdot \mathbf{n} dS$$

となる。



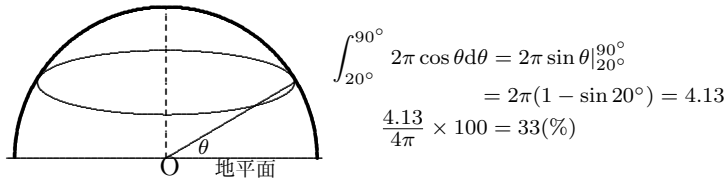
したがって曲面 S の点 O に対する立体角は

$$\Omega = \int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS \quad (3.63)$$

となる。

練習

- (1) 大阪での天体観測では、地平線から 20° 以下の範囲は良く見えない。観測できる天球の立体角はいくらか、またそれは全天球の何%か。



- (2) 月の直径は地球の約 $\frac{1}{4}$ 、地球から月までの距離は地球の直径の約 30 倍である。地球から見た月のおよその立体角を求めよ。またその全天に対する割合はいくらか。



いま、閉曲面 S に囲まれた積分領域 V を考える。点 O に対する点 P の位置ベクトルを \mathbf{r} 、点 P における外向きの単位法線ベクトルを \mathbf{n} とすると、積分領域 V に点 O を含んでいないとき、 $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ ($r \neq 0$) だから

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = - \int_V \nabla^2(\frac{1}{r}) dv = 0$$

である。

また、図のように曲面 S_1, S_2, S_3 が重なった部分では、曲面 S_2, S_3 上の法線方向が互いに逆になり、打ち消し合い、立体角には S_1 のみの立体角になる。したがって、積分領域 V に点 O を含んでいるとき、点 O のまわりの立体角は、点 O を中心とする十分小さな半径 ϵ の球 V' の球面 S' の立体角と同じになり、

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \int_{S'} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \frac{4\pi\epsilon^2}{\epsilon^2} = 4\pi$$

ちょうど点 O が曲面 S 上にあるとき、点 O を中心とする半径 ϵ の球面で S の内部にある部分を S' 、 S で球面の外部にある部分を S'' とする。点 O は S', S'' が作る閉曲面の外部にあるから $\int_{S'} + \int_{S''} = 0$ したがって、 $\int_{S''} = -\int_{S'} = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S'} dS$ 。曲面 S が点 O 近傍でなめらかとすると右辺の積分は半球面となり、積分は 2π となる。

以上をまとめると

「閉曲面 S の点 O に対する立体角は、点 O が S の中にあるならば 4π 、 S 上にあるならば 2π 、 S の外にあるならば 0 である」

となる。これは言い換えれば、

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = - \int_V \nabla^2(\frac{1}{r}) dv = \begin{cases} 4\pi & (\text{点 } O \text{ が閉曲面に含まれる}) \\ 2\pi & (\text{点 } O \text{ が閉曲面上にある}) \\ 0 & (\text{点 } O \text{ が閉曲面の外にある}) \end{cases} \quad (3.64)$$

を意味する。

立体角はその曲面 S の周囲の閉曲線 Γ と点 O の位置のみによって決まり、曲面にはよらない。なぜなら閉曲線 Γ によって囲まれた曲面で、曲面 S から連続的に変形した曲面を S' とする。 S と S' は一つの閉曲面をなし、変形の過程で曲面 S' が点 O を通過しなければ閉曲面は点 O の外にあり、点

O に対する立体角は 0 となる。このときは閉曲面の内側を正、外側を負としている。点 O に対して、閉曲線 Γ を挟んで曲面 S と曲面 S' は逆向きとなり、結局点 O に対する S の立体角 Ω と S' の立体角 Ω' は等しくなる。また丁度曲面 S' が点 O 上にあれば閉曲面に対する立体角は 2π だから Ω と Ω' の差は 2π となる。また点 O が閉曲面の内部になるように曲面 S' を変形すると閉曲面に対する点 O の立体角は 4π だから Ω と Ω' の差は 4π となる。差の符号ははじめ曲面 S の向きをどちらに選んだかによる。

この事情を逆に点 O を動かして調べてみる。下図のように、閉曲線 Γ によって囲まれた曲面 S の負の側の曲面に近い点を点 O とし曲面を挟んで点 O に近い点を点 O', 点 O および点 O' に対する曲面 S の立体角をそれぞれ Ω, Ω' とする。点 O と同じ側において、閉曲線 Γ によって囲まれた曲面を S_1 とすると、点 O および点 O' は十分近いとするとそれらに対する曲面 S' の立体角 Ω_1 は等しくなる。曲面 S と曲面 S_1 は点 O 内部に持つ閉曲面であり、 $\Omega + \Omega_1 = 4\pi$, 点 O' は外部の点だから $\Omega' + \Omega_1 = 0$, したがって $\Omega' - \Omega = -4\pi$ となる。



したがって,

$$\text{「点 O が曲面 } S \text{ の負の側から正の側へ移ると曲面 } S \text{ の点 O に対する立体角は } -4\pi \text{ だけ変化する。」} \quad (3.65)$$

また, $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ で連続な関数 ϕ に対して

$$\int_V \phi(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) dv = \begin{cases} \phi(\mathbf{r}_0) & (\mathbf{r}_0 \in V) \\ 0 & (\mathbf{r}_0 \notin V) \end{cases} \quad (3.66)$$

となる 3 次元のデルタ関数 $\delta(\mathbf{r})$ を導入する。

$\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0$ ($r \neq 0$) を考慮すると、積分領域 V に原点が含まれていないときは、

$$\int_V \phi(\mathbf{r}) \nabla^2(\frac{1}{r}) dv = 0$$

積分領域 V が原点を含むときは、原点を中心とする半径 ϵ の微小な球の領域 V' を考え、 $\phi(\mathbf{r})$ の原点での連続性と (3.64) を考慮すると

$$\int_V \phi(\mathbf{r}) \nabla^2(\frac{1}{r}) dv = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V'} \phi(\mathbf{r}) \nabla^2(\frac{1}{r}) dv = \phi(\mathbf{0}) \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{V'} \nabla^2(\frac{1}{r}) dv = -4\pi\phi(\mathbf{0})$$

である。したがって,

$$\nabla^2(\frac{1}{r}) = -4\pi\delta(\mathbf{r}) \quad (3.67)$$

と見なして良いことがわかる。電磁気学では

$$\nabla^2(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|}) = -4\pi\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$$

の形で何度も用いる。(デルタ関数, あるいは超関数の厳密な取り扱いには L. シュワルツ「物理数学の方法」吉田・渡辺訳, 岩波書店などを参照すればよいが, このメモのレベルでは, その必要はない)

2 ベクトル \mathbf{A} がポテンシャルを持っているとき, すなわち $\mathbf{A} = -\nabla\phi$ となるスカラー関数 ϕ が存在するとき,

$$\text{rot } \mathbf{A} = -\text{rot } \nabla\phi = 0 \quad \text{渦なし}$$

となる。逆に $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ となるベクトル場 \mathbf{A} にたいしては

$$\oint \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \text{rot } \mathbf{A} \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

より、点Oから点Pまでの積分

$$\phi = - \int_{OP} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{s}$$

がOからPへの道筋によらずPの位置のみによってきまる。したがってこの ϕ について点Pにおける任意の方向の微分は

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = -(A_x \frac{dx}{ds} + A_y \frac{dy}{ds} + A_z \frac{dz}{ds})$$

となるが、任意の微分可能な関数 ϕ について

$$\frac{\partial \phi}{\partial s} = \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{dx}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{dy}{ds} + \frac{\partial \phi}{\partial z} \frac{dz}{ds}$$

が成り立つから

$$A_x = -\frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad A_y = -\frac{\partial \phi}{\partial y}, \quad A_z = -\frac{\partial \phi}{\partial z}, \quad \text{すなわち } \mathbf{A} = -\nabla \phi$$

となる。すなわち

「ベクトル場 \mathbf{A} がポテンシャルを持つための必要十分条件は $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ (渦なし) である。」

3 ベクトル \mathbf{B} に対して $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ となるベクトル \mathbf{A} をベクトルポテンシャルという。このとき

$$\text{div } \mathbf{B} = \text{div rot } \mathbf{A} = 0$$

となる。逆に $\text{div } \mathbf{B} = 0$ ならば \mathbf{B} はベクトルポテンシャル \mathbf{A} を持つことを示そう。 $A_z = 0$ とする。このとき

$$B_x = -\frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z}, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

を満たす A_x, A_y を求めればよい。第2, 第1式から

$$A_x = \int_c^z B_y dz + \xi(x, y), \quad A_y = - \int_c^z B_x dz + \eta(x, y)$$

これを第3式の右辺に代入して

$$B_z : - \int_c^z (\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y}) dz + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

$\text{div } \mathbf{B} = 0$ より $\frac{\partial B_x}{\partial x} + \frac{\partial B_y}{\partial y} = -\frac{\partial B_z}{\partial z}$ だから

$$B_z : \int_c^z \frac{\partial B_z}{\partial z} dz + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y} = B_z - B_z(z=c) + \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$$

したがって $B_z(z=c) = \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \xi}{\partial y}$ となるように $\xi(x, y), \eta(x, y)$ を選んでおけば第3式が成り立つ。

これは常に可能だ。よって

「ベクトル場 \mathbf{B} がベクトルポテンシャルをもつ必要十分条件は $\text{div } \mathbf{B} = 0$ (湧出点なし) である」
任意の ϕ に対して、 $\text{rot } (\nabla \phi) = 0$ だから、 \mathbf{B} のベクトルポテンシャルを \mathbf{A} とすれば、 $\mathbf{A} + \nabla \phi$ もベクトルポテンシャルである。そこでベクトルポテンシャルに条件 $\text{div } \mathbf{A} = 0$ をつける。すなわち

$$\text{div } \mathbf{B} = 0 \text{ なるベクトル } \mathbf{B} \text{ にたいして, } \mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \text{ div } \mathbf{A} = 0$$

なるベクトル \mathbf{A} を求めてみる。こうして得られるベクトルポテンシャルを Coulomb ゲージのポテン

シャルという。

$\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{a}$ とおけば, $\text{rot } \mathbf{B} = \text{rot rot } \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} = -\nabla^2 \mathbf{A}$ より

$$\nabla^2 \mathbf{A} = -\mathbf{a}, \quad (\nabla^2 A_x = -a_x, \quad \nabla^2 A_y = -a_y, \quad \nabla^2 A_z = -a_z)$$

となる。これはポアソンの方程式の解 (3.79) を用いて

$$A_x(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a_x(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad A_y(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a_y(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad A_z(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{a_z(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv'$$

すなわち,

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3.68)$$

となる。

この \mathbf{A} は次のようにして $\text{div } \mathbf{A} = 0$ を満たすことがわかる。 $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ において,

$$\text{div } \mathbf{A} = \frac{1}{4\pi} \text{div} \int \frac{\mathbf{a}'}{r} dv' = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{r} \text{div } \mathbf{a}' + \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' \right) dv' = \frac{1}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' dv'$$

場の点 \mathbf{r} における微分から積分要素の点 \mathbf{r}' の微分に変更して

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' dv'$$

一方 $\text{div } \mathbf{a} = \text{div rot } \mathbf{B} = 0$ より

$$\nabla' \frac{\mathbf{a}'}{r} = \frac{1}{r} \nabla' \mathbf{a}' + \nabla' \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}' = \nabla' \frac{1}{r} \cdot \mathbf{a}'$$

したがって, r が十分大きなところでは $\mathbf{a}' = 0$ を考慮して積分すると

$$\text{div } \mathbf{A} = -\frac{1}{4\pi} \int \nabla' \frac{\mathbf{a}'}{r} dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\mathbf{a}'}{r} \cdot \mathbf{n}' dS' = 0$$

となる。

また, (3.68) の $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ に代入して,

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \text{rot} \int \frac{1}{4\pi} \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' = \frac{1}{4\pi} \int \left(\frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \text{rot } \mathbf{a}(\mathbf{r}') + \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}') \right) dv' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times \mathbf{a}(\mathbf{r}') dv' = \frac{1}{4\pi} \int \frac{\mathbf{a}(\mathbf{r}') \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} dv' \end{aligned}$$

となる。これは, ビオサバールの法則である。この \mathbf{B} は $\text{div } \mathbf{B} = 0$, $\text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{a}$ を満たす。

- 4 渦なし, すなわち $\text{rot } \mathbf{A} = 0$ なるベクトルは $\mathbf{A} = -\nabla\phi$ となるスカラー関数 ϕ が存在し, 湧出点なし, すなわち $\text{div } \mathbf{B} = 0$ なるベクトルは $\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}$ となるベクトルポテンシャル \mathbf{A} が存在した。一般のベクトル \mathbf{u} は渦無しのベクトル $\mathbf{u}_{//}$ と湧出点なしのベクトル \mathbf{u}_{\perp} の和で表される (Helmholtz の定理)。すなわち

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{//} + \mathbf{u}_{\perp}, \quad \text{rot } \mathbf{u}_{//} = 0, \quad \text{div } \mathbf{u}_{\perp} = 0 \quad (3.69)$$

が証明される。 \mathbf{r} が領域 V の内点とすると, $r = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$ において, (3.67) を用いると

$$-\frac{1}{4\pi} \nabla^2 \int_V \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{r} dv' = -\frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{u}(\mathbf{r}') \nabla^2 \frac{1}{r} dv' = \int_V \mathbf{u}(\mathbf{r}') \delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}') dv' = \mathbf{u}$$

となる。 $\nabla^2 \mathbf{A} = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A})$ を適用すると

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= -\frac{1}{4\pi} \nabla(\nabla \cdot \int_V \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{r} dv') + \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \int_V \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{r} dv') \\ &= \frac{1}{4\pi} \nabla \int_V \mathbf{u}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{r} dv' - \frac{1}{4\pi} \nabla \times \int_V \mathbf{u}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{r} dv' \end{aligned}$$

ここで

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{u}(\mathbf{r}') \cdot \nabla' \frac{1}{r} dv', \quad \mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \mathbf{u}(\mathbf{r}') \times \nabla' \frac{1}{r} dv' \quad (3.70)$$

とおくと, $-\mathbf{u}_{//} = -\text{grad } \phi$, $\mathbf{u}_{\perp} = \text{rot } \mathbf{A}$ であり,

$$\mathbf{u}_{//} = -\frac{1}{4\pi} \nabla(\nabla \cdot \int_V \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{r} dv'), \quad \mathbf{u}_{\perp} = \frac{1}{4\pi} \nabla \times (\nabla \times \int_V \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}')}{r} dv') \quad (3.71)$$

となる。 $\phi(\mathbf{r})$, $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ は, 部分積分, ガウスの定理を用いると

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-\text{div}' \mathbf{u}(\mathbf{r}')}{r} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}') \cdot \mathbf{n}'}{r} dS' \quad (3.72)$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\text{rot}' \mathbf{u}(\mathbf{r}')}{r} dv' + \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{u}(\mathbf{r}') \times \mathbf{n}'}{r} dS' \quad (3.73)$$

となる。こうして任意のベクトル \mathbf{u} は渦無しベクトルと湧出点なしベクトルの和 $\mathbf{u} = \mathbf{u}_{//} + \mathbf{u}_{\perp}$ に分解できる。ただし, 分解は一意的でなく, $\nabla^2 \chi = 0$ を満たす任意の χ に対して, $\mathbf{u}_{//} - \text{grad } \chi$, $\mathbf{u}_{\perp} + \text{grad } \chi$ はそれぞれ渦無し, 湧出点なしのベクトルであり, \mathbf{u} の分解になっている。

3.5 いくつかの偏微分方程式

1 3次元 Laplace の方程式を考える。

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x_3^2} = 0 \quad (3.74)$$

閉領域 V において, 連続で, そのすべての内点で調和 ((3.74) を満たす) であり, また V が無限領域の時は x が無限遠で 0 となる $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ を「閉領域 V で調和」と定義しよう。

「閉領域 V で調和な関数 $u(x) = u(x_1, x_2, x_3)$ は V と境界からなる領域 \bar{V} で連続ならば, 境界で最大値, 最小値をとる。」(最大値の原理)

境界 S における最大値を m とする。いま $u(x)$ が V の内点で m より大きかったとする。よって \bar{V} での $u(x)$ の最大値 M となるのは V の内点 $P(x)$ である。新たに関数 $v(\xi) = v(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ を定義する。

$$v(\xi) = u(\xi) + \frac{M-m}{2d^2} |\xi - x|^2, \quad |\xi - x|^2 = (\xi_1 - x_1)^2 + (\xi_2 - x_2)^2 + (\xi_3 - x_3)^2$$

ここで d は閉領域 V の 2 点の距離の上限とする。したがって $|\xi - x|^2 < d^2$ である。 $v(x) = u(x) = M$ であるが, 境界上では

$$v(\xi) \leq m + \frac{1}{2}(M-m) = \frac{m+M}{2} < M$$

したがって $v(\xi)$ は $u(\xi)$ と同様に領域 V の内点で最大値をとる。しかしこれは

$$\Delta_{\xi} v = \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_1^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_2^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial \xi_3^2} = \frac{M-m}{d^2} > 0, \quad \xi \in V$$

と矛盾する (最大値を内点で取れば, そこでは各 ξ_i について, $\frac{\partial v}{\partial \xi_i} = 0$, $\frac{\partial^2 v}{\partial \xi_i^2} \leq 0$ である)。よって境界で最大値をとる。また内点で最小値とならないことは $-u$ を考えて, 同様に示される。

最大値の原理から, 全空間で調和な関数は一定値 (0) となることがわかる (Liouville の定理)。

十分大きな閉領域を V とし, その境界での最大値, 最小値を M, m とすると, $m < M$, $|M| \leq \epsilon$, $|m| \leq \epsilon$, $\epsilon > 0$ (無限遠では $u = 0$ を用いている) となる。 V の任意の内点 x では $|u(x)| \leq \epsilon$, したがって $u(x) = 0$ 。

また, 最大値の原理から「導体 (同じ電位) で囲まれた空洞内の電界は 0」が得られる。

「境界条件が与えられると, ポアソンの方程式の解は一意的である。」

境界条件 ($\phi_0(\mathbf{r})$, $\mathbf{r} \in \Sigma$) に対して, ポアソンの方程式の 2 つの解 $\phi_1(\mathbf{r})$, $\phi_2(\mathbf{r})$ とする。すなわち,

$$\nabla^2 \phi_1(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}), \quad (\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Sigma)$$

$$\nabla^2 \phi_2(\mathbf{r}) = -\rho(\mathbf{r}), \quad (\phi_2(\mathbf{r}) = \phi_0(\mathbf{r}), \quad \mathbf{r} \in \Sigma)$$

とする。 $\phi(\mathbf{r}) = \phi_1(\mathbf{r}) - \phi_2(\mathbf{r})$ とおくと,

$$\nabla^2 \phi(\mathbf{r}) = 0, \quad (\phi(\mathbf{r}) = 0, \quad \mathbf{r} \in \Sigma)$$

となり, $\phi(\mathbf{r}) = 0$ が得られる。よって, $\phi_1(\mathbf{r}) = \phi_2(\mathbf{r})$

2 スカラー関数 ϕ, ψ についてつぎの「グリーンの定理」が成り立つ。

$$\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dv \quad (3.75)$$

$$\int_S (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS = \int_V (\psi \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \psi) dv \quad (3.76)$$

ただし $\frac{\partial \phi}{\partial n}, \frac{\partial \psi}{\partial n}$ は閉曲面のうち側から外側に向かう法線方向の方向微係数で

$$\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_S \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS, \quad \int_S (\psi \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial \psi}{\partial n}) dS = \int_S (\psi \nabla \phi - \phi \nabla \psi) \cdot \mathbf{n} dS$$

公式 $\operatorname{div}(\psi \mathbf{A}) = \psi \nabla \mathbf{A} + \nabla \psi \cdot \mathbf{A}$ で $\mathbf{A} = \nabla \phi$ とすると $\operatorname{div}(\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi$ ゆえに

$$\int_V \operatorname{div}(\psi \nabla \phi) dv = \int_V (\psi \nabla^2 \phi + \nabla \psi \cdot \nabla \phi) dv$$

左辺はガウスの定理より $\int_S \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \int_S \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS$ となり (3.75) が証明された。また (3.75) で ϕ, ψ を入れ替えて差をとると (3.76) となる。

3 閉曲面 S によって領域を V , スカラー関数 ϕ , V 内にとった原点 O から点 P までの距離を r , 点 O を中心とする半径 ϵ の球面を S' , V から S' の内部を取り除いた領域を V' とすると, グリーンの定理 (3.75) を $\phi, \frac{1}{r}$ に適用して

$$\int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS + \int_{S'} \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS = \int_{V'} \left(\frac{1}{r} \nabla^2 \phi - \phi \nabla^2 \frac{1}{r} \right) dv \quad (3.77)$$

$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0$ より, 右辺は $\epsilon \rightarrow 0$ では $\int_V \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dv$ となる。

左辺の面 S' における積分では $\frac{\partial \phi}{\partial n}$ が有界 (グリーンの定理ははじめからこれを仮定) とすると

$$\left| \int_{S'} \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \right| = \frac{1}{\epsilon} \left| \int_{S'} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS \right| \leq \frac{1}{\epsilon} \int_{S'} \left| \frac{\partial \phi}{\partial n} \right| dS \leq \frac{K}{\epsilon} \int_{S'} dS = 4\pi K \epsilon \quad K \text{ は定数}$$

一方

$$\int_{S'} \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS = - \int_{S'} \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS = \int_{S'} \phi \frac{1}{r^2} dS = \frac{1}{\epsilon^2} \int_{S'} \phi dS \rightarrow 4\pi \phi(r=0)$$

よって $\epsilon \rightarrow 0$ の極限では

$$\int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS - 4\pi \phi(r=0) = \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dv$$

となる。したがって次の「グリーンの公式」

$$\phi(r=0) = -\frac{1}{4\pi} \int_V \frac{1}{r} \nabla^2 \phi dv + \int_S \left\{ \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} - \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) \right\} dS \quad (3.78)$$

を得る。

無限の遠方で $\phi = 0$ の解を求めてみよう。点 O を中心とする半径 r の球面を S とする。グリーンの公式で

$$\int_S \frac{1}{r} \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{1}{r} \int_S \frac{\partial \phi}{\partial n} dS = \frac{1}{r} \int_S \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS = \frac{1}{r} \int_V \operatorname{div}(\nabla \phi) dv = \frac{1}{r} \int_V \nabla^2 \phi dv \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

なぜなら, r を十分大きくとると, 球の外では $\nabla^2 \phi = g = 0$ となる, したがって $\int_V \nabla^2 \phi dv$ は r によらず一定となるからである。

また十分大きな r では $|\phi| < \epsilon \rightarrow 0$ ($r \rightarrow \infty$) だから

$$\left| \int_S \phi \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right| = \left| \int_S \phi \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{1}{r} \right) dS \right| \leq \frac{1}{r^2} \int_S |\phi| dS \leq \frac{\epsilon}{r^2} \int_S dS = 4\pi \epsilon \rightarrow 0 \quad (r \rightarrow \infty)$$

$\nabla^2\phi = g$ のとき、すなわちポアソンの方程式が成り立つとき

$$\phi(r=0) = \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{-g}{r} dv$$

となる。したがって、原点をずらしておく、一般にポアソンの方程式の無限の遠方で0となる解は

$$\phi(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{-g(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3.79)$$

となる。

4 1次元の波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (3.80)$$

の一般解を求めておこう。

$$\xi = x - at, \quad \eta = x + at \quad (3.81)$$

とおくと

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial u}{\partial \xi}(-a) + \frac{\partial u}{\partial \eta}(+a), & \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial u}{\partial \xi} + \frac{\partial u}{\partial \eta} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} a^2 - 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} a^2 + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} a^2, & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \frac{\partial^2 u}{\partial \xi^2} + 2 \frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} + \frac{\partial^2 u}{\partial \eta^2} \end{aligned}$$

を波動方程式 (3.80) に代入して

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial}{\partial \eta} \left(\frac{\partial u}{\partial \xi} \right) = 0 \quad (3.82)$$

となる。したがって両辺を積分して、積分定数を $f(\xi)$ とおくと

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = f(\xi) \quad \text{さらに} \quad \xi \text{ で積分して} \quad u = \int f(\xi) d\xi + \psi(\eta) = \phi(\xi) + \psi(\eta)$$

となる。よって波動方程式の一般解は

$$u(x, t) = \phi(x - at) + \psi(x + at), \quad \phi, \psi \text{ は任意関数} \quad (3.83)$$

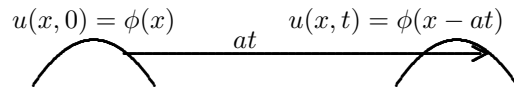
d'Alembert の解

となる。 $\phi(x - at)$ および $\psi(x + at)$ はそれぞれ正行波（前進波）、逆行波（後退波）である。

解 $u(x, t) = \phi(x - at)$ は $t = 0$ の時、 $u(x, 0) = \phi(x)$ である、すなわち、 $u(x, t)$ のグラフは $u(x, 0)$ を x の方向に at だけ平行移動したグラフである。したがって $\phi(x - at)$ は速度 a の正行波であることが解る。同様に $\psi(x + at)$ は速度 a の逆行波であることが解る。移動速度 a は波の伝播速度（位相速度）である。

前進波

$$u(x, t) = \phi(x - at)$$



5 空間3次元の波動方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u \quad (3.84)$$

$$u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = f(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = F(\mathbf{r}) \quad (3.85)$$

の解を求めておこう（スミルノフ、グリニエル、コシリヤコフ、偏微分方程式参照）。初期条件を明確にするため、 $t_0 \neq 0$ としておく。

はじめに座標点 $P(\mathbf{r})$ を中心とする半径 $r = a(t - t_0)$ の球 V の球面 Σ での面積分

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a} \int_{\Sigma} \frac{\phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \quad (3.86)$$

は初期条件

$$u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = \phi(\mathbf{r}) \quad (3.87)$$

の解であることを示す。(3.87)の一番目の条件は

$$\begin{aligned} |u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} &= \lim_{t \rightarrow t_0} \left| \frac{1}{4\pi a} \int_{\Sigma} \frac{\phi(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right| \leq \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{1}{4\pi a} \max |\phi| \frac{4\pi a^2 (t - t_0)^2}{a(t - t_0)} \\ &= \lim_{t \rightarrow t_0} (t - t_0) \max |\phi| = 0 \end{aligned}$$

より成り立つ。 $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = a(t - t_0)\boldsymbol{\xi}$, $|\boldsymbol{\xi}| = 1$ とおき, Σ 上での面積分を $\boldsymbol{\xi}$ による単位円 Σ_1 上での面積分 $d\sigma$ に変換すると(3.86)は

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{t - t_0}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \phi(\mathbf{r} + a(t - t_0)\boldsymbol{\xi}) d\sigma \quad (3.88)$$

となる。

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \phi(\mathbf{r} + a(t - t_0)\boldsymbol{\xi}) d\sigma + \frac{a(t - t_0)}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \boldsymbol{\xi} \cdot \nabla \phi(\mathbf{r} + a(t - t_0)\boldsymbol{\xi}) d\sigma \quad (3.89)$$

右辺第1項は $t \rightarrow t_0$ で $\phi(\mathbf{r})$ となり, 第2項は積分が有限であるから $t \rightarrow t_0$ で0となる。よって(3.87)の2番目の条件も満たされる。

つぎに(3.86)は方程式(3.84)を満たすことを証明する。

$$J(t) = \int_V \nabla'^2 \phi dv'$$

とおくと, (3.88)から

$$\nabla^2 u = \frac{t - t_0}{4\pi} \int_{\Sigma_1} \nabla^2 \phi d\sigma = \frac{1}{4\pi a^2 (t - t_0)} \int_{\Sigma} \nabla'^2 \phi dS' = \frac{1}{4\pi a^2 (t - t_0)} J(t) \quad (3.90)$$

(3.89)において, $\boldsymbol{\xi} d\sigma = \frac{1}{a^2 (t - t_0)^2} \mathbf{n}' dS'$ よりガウスの発散定理を適用して,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{u}{t - t_0} + \frac{1}{4\pi a (t - t_0)} \int_V \nabla'^2 \phi dv' = \frac{u}{t - t_0} + \frac{J(t)}{4\pi a (t - t_0)} \quad (3.91)$$

さらに(3.91)を t で微分して

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -\frac{u}{(t - t_0)^2} + \frac{1}{t - t_0} \left[\frac{u}{t - t_0} + \frac{J(t)}{4\pi a (t - t_0)} \right] - \frac{J(t)}{4\pi a (t - t_0)^2} + \frac{1}{4\pi a (t - t_0)} \frac{dJ(t)}{dt} \\ &= \frac{1}{4\pi a (t - t_0)} \frac{dJ(t)}{dt} \end{aligned} \quad (3.92)$$

$J(t)$ を球座標の積分に変換すると

$$\begin{aligned} \frac{dJ(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \int_0^{a(t-t_0)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \nabla'^2 \phi \rho^2 \sin \theta d\theta d\psi d\rho \\ &= a \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (\nabla'^2 \phi)_{\rho=a(t-t_0)} a^2 (t - t_0)^2 \sin \theta d\theta d\psi = a \int_{\Sigma} \nabla'^2 \phi dS' = aJ(t) \end{aligned} \quad (3.93)$$

(3.90), (3.92), (3.93)より(3.86)は方程式(3.84)を満たすことがわかる。

(3.84)は定数係数の線形同次方程式だから $v = \frac{\partial u}{\partial t}$ も(3.84)の解であり,

$$v|_{t=t_0} = \phi(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=t_0} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}|_{t=t_0} = aJ(t = t_0) = 0 \quad (3.94)$$

したがって, 一般に(3.84), (3.85)の解は

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Sigma} \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \int_{\Sigma} \frac{F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right\} \quad (3.95)$$

これを Poisson の公式という。

また, (3.84), (3.85) の解は一意的である。(前記スミルノフ等の「偏微分方程式」に空間 2 次元の場合の証明が示されている。空間 3 次元への拡張は, 時間を入れた 4 次元空間の積分を考えて同様の手法でできる)。

(3.95) を書き換えると

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi} \frac{\partial}{\partial t} \left[(t - t_0) \int_{\Sigma_1} f(\mathbf{r}') d\sigma \right] + \frac{t - t_0}{4\pi} \int_{\Sigma_1} F(\mathbf{r}') d\sigma \quad (3.96)$$

とも表せる。ここに $\mathbf{r}' - \mathbf{r} = a(t - t_0)\boldsymbol{\xi}$, $|\boldsymbol{\xi}| = 1$, Σ_1 は $\boldsymbol{\xi}$ による単位円。

Poisson の公式 (3.95) を 1 次元の波動方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u|_{t=0} = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=0} = F(x) \quad (3.97)$$

にも適用できる。 $t_0 = 0$ とし, Ox 方向を球面座標の軸方向にすると, 式 (3.95) において

$$x' = x + r \cos \theta, \quad dx' = -r \sin \theta d\theta$$

とおけ,

$$dS' = r^2 \sin \theta d\theta d\phi = -rd\phi dx'$$

となるから

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{4\pi a} \frac{\partial}{\partial t} \int_0^{2\pi} \int_{x-at}^{x+at} \frac{f(x') a t d\phi dx'}{at} + \frac{1}{4\pi a} \int_0^{2\pi} \int_{x-at}^{x+at} \frac{F(x') a t d\phi dx'}{at} \\ &= \frac{1}{2a} \frac{\partial}{\partial t} \int_{x-at}^{x+at} f(x') dx' + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(x') dx' \end{aligned}$$

したがってストークス (Stokes) の波動公式

$$u(x, t) = \frac{1}{2}(f(x - at) + f(x + at)) + \frac{1}{2a} \int_{x-at}^{x+at} F(\xi) d\xi \quad (3.98)$$

が得られる。(もちろん, d'Alembert の解 (3.83) から簡単に導ける)。

つぎに, 非同次な波動方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + g(\mathbf{r}, t), \quad u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = 0 \quad (3.99)$$

を解こう。そのため $v(\mathbf{r}, t, \tau)$ を同次方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 v, \quad v(\mathbf{r}, t)|_{t=\tau} = 0, \quad \frac{\partial v}{\partial t}|_{t=\tau} = g(\mathbf{r}, \tau) \quad (3.100)$$

の解とすると, Poisson の公式 (3.96) より $t - t_0$ を $t - \tau$ と置き換えて

$$v(\mathbf{r}, t; \tau) = \frac{t - \tau}{4\pi} \int_{\Sigma_1} g(\mathbf{r} + a(t - \tau)\boldsymbol{\xi}, \tau) d\sigma \quad (3.101)$$

となる。この $v(\mathbf{r}, t, \tau)$ から (3.99) の解

$$u(\mathbf{r}, t) = \int_{t_0}^t v(\mathbf{r}, t; \tau) d\tau \quad (3.102)$$

が得られることを示す。(3.102) の定義より $u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = 0$ が得られ, (3.102) より

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \int_{t_0}^t \frac{\partial v(\mathbf{r}, t; \tau)}{\partial t} d\tau + v(\mathbf{r}, t; \tau)|_{\tau=t}$$

右辺第2項は(3.101)の定義より0であり, $\frac{\partial u(\mathbf{r}, t)}{\partial t}|_{t=t_0} = 0$ が得られる。また更に微分して

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \int_{t_0}^t \frac{\partial^2 v(\mathbf{r}, t; \tau)}{\partial t^2} d\tau + \frac{\partial v(\mathbf{r}, t; \tau)}{\partial t}|_{\tau=t} \\ &= \int_{t_0}^t a^2 \nabla^2 v(\mathbf{r}, t; \tau) d\tau + g(\mathbf{r}, t) \\ &= a^2 \nabla^2 u + g(\mathbf{r}, t)\end{aligned}$$

となり, 方程式(3.99)の解である。(3.101), (3.102)より

$$\begin{aligned}u(\mathbf{r}, t) &= \frac{1}{4\pi} \int_{t_0}^t (t - \tau) \left\{ \int_{\Sigma_1} g(\mathbf{r} + a(t - \tau)\boldsymbol{\xi}, \tau) d\sigma \right\} d\tau \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{a(t-t_0)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi g(\mathbf{r} + r\boldsymbol{\xi}, t - r/a) r \sin\theta d\theta d\phi dr \\ &= \frac{1}{4\pi a^2} \int_0^{a(t-t_0)} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{g(\mathbf{r} + r\boldsymbol{\xi}, t - r/a)}{r} r^2 \sin\theta d\theta d\phi dr\end{aligned}$$

ここで, τ の積分を $r = a(t - \tau)$ の積分に置き換えた。したがって非同次の波動方程式の初期値問題(3.99)の解は

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_V \frac{g(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv', \quad V : \text{中心 } \mathbf{r}, \text{半径 } a(t - t_0) \text{の球} \quad (3.103)$$

となる。(3.99)において, 方程式の両辺を a^2 で割って, $g(\mathbf{r}, t)/a^2$ を $\rho(\mathbf{r})$ とにおいて $a \rightarrow \infty$ とするとポアソンの方程式 $\nabla^2 \phi = -\rho$ となり, 解(3.103)は, $a \rightarrow \infty$ としたとき解(3.79)と一致し, その拡張となっている。

したがって, また非同次の波動方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \nabla^2 u + g(\mathbf{r}, t), \quad u(\mathbf{r}, t)|_{t=t_0} = f(\mathbf{r}), \quad \frac{\partial u}{\partial t}|_{t=t_0} = F(\mathbf{r}) \quad (3.104)$$

は(3.95), (3.103)を重ね合わせた解を持つ。

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int_V \frac{g(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' + \frac{1}{4\pi a} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} \int_\Sigma \frac{f(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' + \int_\Sigma \frac{F(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS' \right\} \quad (3.105)$$

V, Σ : 中心 \mathbf{r} , 半径 $a(t - t_0)$ の球, 球面

また $t_0 \rightarrow -\infty$ としておくと, 初期条件 $u(t = -\infty) = \frac{\partial u}{\partial t}(t = -\infty) = 0$ に対応した解

$$u(\mathbf{r}, t) = \frac{1}{4\pi a^2} \int \frac{g(\mathbf{r}', t - |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|/a)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dv' \quad (3.106)$$

が得られる。

第4章 付録

4.1 アンペールの法則に関するアンペールの考え

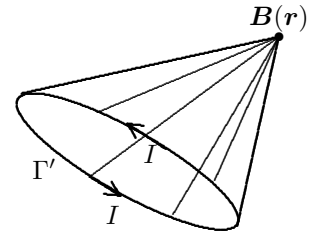
磁場が磁荷の分布から発生するならば、(2.54)のように磁位 (磁気スカラーポテンシャル) が存在し、 ϕ_m の傾きから求めることができた。しかし電流が作る磁場はスカラーポテンシャルを持たない。

アンペールは電流の作る磁場について簡潔な法則を見いだした。

電流 I が閉曲線 Γ' を流れ、点 P から見た閉曲線 Γ' を端とする面 Σ' の立体角を Ω とする。点 P の変位 $\delta \mathbf{s}$ による磁位の変化に相当する量 $\delta \phi_m$ は

$$\delta \phi_m \equiv -\frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{s} = \frac{1}{4\pi} I \delta \Omega \quad (4.1)$$

Ω : 閉曲線電流 I を臨む立体角

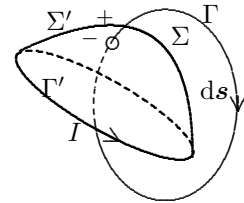


となる。

点 P が電流を囲むように曲線 Γ にそって回るとき、特定の面 Σ' を通過するたびに立体角は (3.65) より -4π だけ跳躍する。したがって、(4.1) を曲線 Γ にそって一周して積分すると

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \sum_{k=1}^n I_k, \quad \oint_{\Gamma} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{s} = \mu_0 \int_{\Sigma} \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS \quad (4.2)$$

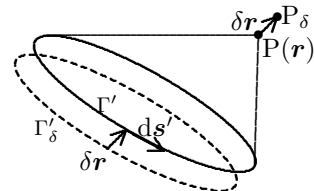
$$\text{rot } \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{j}, \quad \mathbf{j} : \text{電流密度} \quad (4.3)$$



となる。これをアンペールの法則という。積分形から微分形への変形には Stokes の定理 (3.62) を用いた。

アンペールが見いだした関係 (4.1) はアンペールの法則を含むだけではない。

式 (4.1) で、点 $P(\mathbf{r})$ を $\delta \mathbf{r}$ だけずらした点を $P_{\delta}(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r})$ とする。閉曲線 Γ' に沿った電流 I による点 P_{δ} における磁位 ϕ_m は閉曲線 Γ を $\delta \mathbf{r}$ だけ逆に移動した閉曲線 Γ'_{δ} に沿った電流 I が点 P につくる磁位と同じである。したがってこの2つの回路の電流による磁位の差 $\delta \phi_m$ が点 P の変位による磁位の差に等しい。



$$\mu_0 \delta \phi_m = -\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{r}$$

これは閉曲線 Γ' 上の電流と閉曲線 Γ'_{δ} 上の逆向きの電流がつくる磁位である。したがって Γ' と Γ'_{δ} の帯状の部分をもとに点 P から見た立体角 $d\Omega$ を電流 I が流れた時の磁位となる。変位 $\delta \mathbf{r}$ と曲線 Γ' に沿った線素 $d\mathbf{s}'$ のなす平行四辺形の面積 $\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{s}'$ の点 P から見た立体角は

$$\delta \Omega = \frac{(\delta \mathbf{r} \times d\mathbf{s}') \cdot (\mathbf{r}' - \mathbf{r})}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|^3} = -\frac{d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \delta \mathbf{r}$$

となる。したがって Γ' 、 Γ'_{δ} を一周すれば式 (4.1) より

$$-\mathbf{B} \cdot \delta \mathbf{r} = \int_{\Gamma'} \frac{\mu_0 I}{4\pi} \delta \Omega = \int_{\Gamma'} -\frac{\mu_0 I}{4\pi} \frac{d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \cdot \delta \mathbf{r}$$

$\delta \mathbf{r}$ を任意にとり、

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{\Gamma'} \frac{I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

閉曲線 Γ' は任意だからビオ・サバル (Biot-Savart) の法則

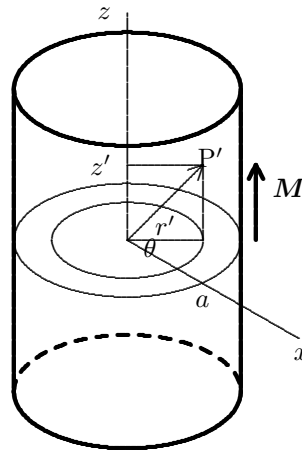
$$d\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{I d\mathbf{s}' \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \quad (\text{真空}) \quad (4.4)$$

が得られる。すなわち、アンペールが見いだした関係 (4.1) からビオ・サバル (Biot-Savart) の法則も導きだせた。以上の議論は、物理法則がどのような幾何学的意味を持っているのかを理解する上で重要であり、また、逆ルートを辿ることによって、ビオ・サバルの法則からアンペールの式 (4.1) を導くこともできる。物理的な意味を考える上で、アンペールの考えは重要な意味を持っているが、全体の見通し、特に論理的なつながりを理解するにはわかりにくい議論であり、我々はこの道を避けた。

4.2 柱状磁石の磁場の計算

柱状の磁石で磁化 \mathbf{M} が軸方向に一定とする。このときの磁束密度 \mathbf{B} 、磁界の強さ \mathbf{H} を求める。

磁石の断面の半径を a 、磁石の長さを d とし、磁石の中心を原点に、軸に垂直な方向に x 軸、 y 軸、軸方向に z 軸をとる。円筒座標を用いて、磁石内の点を $P(\mathbf{r}') = P'(r', \theta, z')$ とする。 $x-z$ 平面上の任意の点を $P(\mathbf{r}) = P(x, 0, z)$ とする。



磁束密度はベクトルポテンシャル

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int \frac{-\mathbf{n} \times \mathbf{M}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

から、 $\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \nabla \times \mathbf{A}(\mathbf{r})$ によって導ける。磁石の円柱の上下の底面では磁化 \mathbf{M} と面の法線ベクトル \mathbf{n} は平行となり、 $\mathbf{M} \times \mathbf{n}$ は 0 となる。積分は側面のみとなる。

$$\mathbf{M} = M\mathbf{k}, \quad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}' = a \cos \theta \mathbf{i} + a \sin \theta \mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

$$\mathbf{n} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}, \quad \mathbf{M} \times \mathbf{n} = M \cos \theta \mathbf{j} - M \sin \theta \mathbf{i}$$

を代入して

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= \int \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) dS = \iint -\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \times (\mathbf{M} \times \mathbf{n}) a d\theta dz' \\ &= -M \int_{-d/2}^{d/2} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{-(z - z') \cos \theta \mathbf{i} - (z - z') \sin \theta \mathbf{j} + \{(x - a \cos \theta) \cos \theta - \sin^2 \theta\} \mathbf{k}}{|x^2 + a^2 + (z - z')^2 - 2ax \cos \theta|^{3/2}} a d\theta dz' \\ &= 2Ma \int_0^{\pi} \left\{ \left[\frac{\cos \theta}{\sqrt{x^2 + a^2 + (z - z')^2 - 2ax \cos \theta}} \mathbf{i} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(x \cos \theta - a)(z - z')}{(x^2 + a^2 - 2ax \cos \theta) \sqrt{x^2 + a^2 + (z - z')^2 - 2ax \cos \theta}} \mathbf{k} \right]_{-d/2}^{d/2} \right\} d\theta \end{aligned}$$

また

磁界の強さは磁位

$$\phi_m(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \frac{\mathbf{M} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dS'$$

から, $\mathbf{H}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi_m(\mathbf{r})$ より求められる。側面では $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = 0$ より寄与しない。

また $\mathbf{M} \cdot \mathbf{n} = \pm M$ (+... 上面, -... 下面)

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + z\mathbf{k}, \quad \mathbf{r}' = r' \cos\theta\mathbf{i} + r' \sin\theta\mathbf{j} + z'\mathbf{k}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= -\frac{1}{4\pi} \int_{\Sigma} \nabla \frac{1}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \mathbf{M} \cdot \mathbf{n} dS' = \frac{1}{4\pi} \int_{r'=0}^{r'=a} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \right]_{z'=-d/2}^{z'=d/2} Mr' d\theta dr' \\ &= \frac{1}{4\pi} \int_{r'=0}^{r'=a} \int_{-\pi}^{\pi} \left[\frac{(x - r' \cos\theta)\mathbf{i} - r' \sin\theta\mathbf{j} + (z - z')\mathbf{k}}{\{x^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2xr' \cos\theta\}^{3/2}} \right]_{z'=-d/2}^{z'=d/2} Mr' d\theta dr' \\ &= \frac{2M}{4\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \left[\frac{r' \cos\theta - x \sin^2\theta}{\sqrt{x^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2xr' \cos\theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \cos\theta \log \{r' - x \cos\theta + \sqrt{x^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2xr' \cos\theta}\} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{x^2 \sin^2\theta \cos\theta (r' - x \cos\theta)}{(x^2 \sin^2\theta + (z - z')^2) \sqrt{x^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2xr' \cos\theta}} \right]_{z'=-d/2}^{z'=d/2} \right\}_{r'=0}^{r'=a} d\theta \cdot \mathbf{i} \\ &\quad + \frac{2M}{4\pi} \int_0^{\pi} \left\{ \left[\frac{-(z - z')}{\sqrt{x^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2xr' \cos\theta}} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{(z - z')x \cos\theta (r' - x \cos\theta)}{(x^2 \sin^2\theta + (z - z')^2) \sqrt{x^2 + r'^2 + (z - z')^2 - 2xr' \cos\theta}} \right]_{z'=-d/2}^{z'=d/2} \right\}_{r'=0}^{r'=a} d\theta \cdot \mathbf{k} \end{aligned}$$

θ についての積分は解析的には行えず, 数値積分 (ガウス型積分で 6 点公式程度) を行えばよい。

上の計算では不定積分

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= \frac{x}{a^2 \sqrt{x^2 + a^2}}, \quad \int \frac{x dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} = -\frac{1}{\sqrt{x^2 + a^2}} \\ \int \frac{x^2 dx}{(x^2 + a^2)^{3/2}} &= -\frac{x}{\sqrt{x^2 + a^2}} + \log|x + \sqrt{x^2 + a^2}| \end{aligned}$$

を用いている。

4.3 ものに沿って進む波

z 軸方向の 2 本の平行導線, 中空の管の中などを進行する電磁場を考える。完全導体の中では, (2.202) などから $\mathbf{E} = 0$ であり, したがって $\text{rot } \mathbf{E} = 0$ で $\mathbf{H} = 0$ となる。すなわち完全導体内では $\mathbf{E} = 0, \mathbf{H} = 0$ となる。

よって完全導体と接する領域での境界条件は, 物体が静止している場合の一般の境界条件 (2.162) を用いると

$$\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{E} = \frac{\sigma_t}{\epsilon}, \quad \mathbf{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_c, \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (4.5)$$

となる。

(2.205), (2.206) と同様に

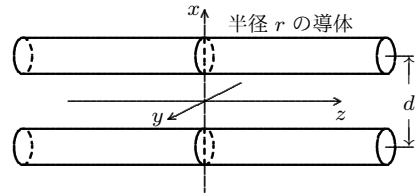
$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E}(x, y)e^{i(\omega t - k^* z)}, \quad \tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H}(x, y)e^{i(\omega t - k^* z)} \quad (4.6)$$

とにおいて Maxwell の方程式に代入すると

$$i\omega\epsilon E_x = \frac{\partial H_z}{\partial y} + ik^* H_y, \quad -i\omega\mu H_x = \frac{\partial E_z}{\partial y} + ik^* E_y \quad (4.7)$$

$$i\omega\epsilon E_y = -ik^* H_x - \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad -i\omega\mu H_y = -ik^* E_x - \frac{\partial E_z}{\partial x} \quad (4.8)$$

$$i\omega\epsilon E_z = \frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad -i\omega\mu H_z = \frac{\partial E_x}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (4.9)$$



(4.7), (4.8) から

$$E_x = (-i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial y} - ik^* \frac{\partial E_z}{\partial x})/(\omega^2\epsilon\mu - k^{*2}), \quad H_x = (i\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - ik^* \frac{\partial H_z}{\partial x})/(\omega^2\epsilon\mu - k^{*2}) \quad (4.10)$$

$$E_y = (i\omega\mu \frac{\partial H_z}{\partial x} - ik^* \frac{\partial E_z}{\partial y})/(\omega^2\epsilon\mu - k^{*2}), \quad H_y = (-i\omega\epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} - ik^* \frac{\partial H_z}{\partial y})/(\omega^2\epsilon\mu - k^{*2}) \quad (4.11)$$

これを (4.9) に代入して,

$$\frac{\partial^2 E_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_z}{\partial y^2} = -(\omega^2\epsilon\mu - k^{*2})E_z, \quad \frac{\partial^2 H_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H_z}{\partial y^2} = -(\omega^2\epsilon\mu - k^{*2})H_z \quad (4.12)$$

となる。(4.12) から E_z, H_z がそれぞれ独立の方程式を満たしている。したがって (a) $E_z = 0, H_z = 0$ の場合, (b) $E_z \neq 0, H_z = 0$ または $E_z = 0, H_z \neq 0$ の場合を考える。

(a) $E_z = 0, H_z = 0$ の場合 (TEM波)

このとき, $\mathbf{E} = \mathbf{H} = 0$ とならない解が存在するとして議論を進める。そのためにはまず, $k^{*2} = \omega^2\epsilon\mu$ がなりたつ。したがって $c^* = \frac{\omega}{k^*} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon\mu}}$ となり, 波の伝播速度は自由空間と同じになる。波は進行方向 (z 軸方向) と垂直な方向に振動する。これを TEM波 (transverse electromagnetic wave) という。(4.9) より

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} = \frac{\partial H_x}{\partial y}, \quad \frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y} \quad (4.13)$$

また (4.7) あるいは (4.8) より

$$E_x = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_y, \quad E_y = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} H_x \quad (4.14)$$

(4.13) より, \mathbf{E}, \mathbf{H} にはポテンシャル関数 Φ, Ψ が存在して

$$E_x = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial \Psi}{\partial x}, \quad E_y = \frac{1}{\sqrt{\epsilon}} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad H_x = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial x}, \quad H_y = \frac{1}{\sqrt{\mu}} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \quad (4.15)$$

とおける。(4.14) に代入すると

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = \frac{\partial \Phi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = -\frac{\partial \Phi}{\partial x} \quad (4.16)$$

となる。これは Φ, Ψ が2次元の調和関数で

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2} = 0 \quad (4.17)$$

を満たしていることを意味する。導体表面では (4.5) の境界条件 ($\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$) から $\Psi = \text{一定}$ である。調和関数の最大値定理 (領域内で最大値も最小値もとれない, 3.4節参照) より, 導体一つだけだとすると領域全体で Ψ は定数となる。従って意味のある解が存在するためには導体は2つ以上必要となる。系を取り巻く十分大きな xy 平面内の閉曲線について

$$\oint \mathbf{H} ds = \oint \frac{\partial \Phi}{\partial s} ds = I \quad (4.18)$$

を求めると, もし $I \neq 0$ ならば, 無限の遠方で $\Phi = 0$ の解が存在しないことになる。すなわち解が存在するためには少なくとも2つの導体が存在し, 電流の和が0となる系でなければならない。平行2直線状の導体や, 同軸ケーブルで電流の往路, 復路からなっている系が相当する。電磁波は z 軸の方向に減衰することなく伝播する。電力の送電, 通信線として使われる。

(b) $E_z \neq 0, H_z = 0$ の場合または $E_z = 0, H_z \neq 0$ の場合

$E_z \neq 0, H_z = 0$ の場合, $\lambda^2 = \omega^2\epsilon\mu - k^{*2} \neq 0$ である。 E_z は Helmholtz の方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \lambda^2 u = 0 \quad (4.19)$$

をみtas。この波を TM波 (transverse magnetic wave E波) という。同様に $E_z = 0, H_z \neq 0$ の場合も H_z は同じ (4.19) をみtas。この波を TE波 (transverse electric wave H波) という。E波とH波は独立に存

在し、一般にその重ね合わせとなっている。

TM 波について考える。 z 軸方向に伸びた導体表面では $E_z = 0$ である。

$$E_x = -ik^* \frac{\partial E_z}{\partial x} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}), \quad H_x = i\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}) \quad (4.20)$$

$$E_y = -ik^* \frac{\partial E_z}{\partial y} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}), \quad H_y = -i\omega \epsilon \frac{\partial H_z}{\partial y} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}) \quad (4.21)$$

だから \mathbf{E} の接線方向の成分も、境界上で常に $E_z = 0$ から自動的に 0 となる。したがって E_z は (4.19) を境界で $E_z = 0$ の条件で解けばよい。中空の導体円筒では、これは周りを固定した膜の固有振動問題と同じである。

固有値 λ が大きいと $k^{*2} < 0$ となり k^* は虚数となり \mathbf{E}, \mathbf{H} は減衰する。

λ が小さいとき k^* は実数となり、波の伝播となる。伝播速度は

$$c^* = \frac{\omega}{k^*} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2 \epsilon \mu - \lambda^2}} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon \mu} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{\omega^2 \epsilon \mu}}} \quad (4.22)$$

となる。 xy 面内での微分演算子 ∇_{\perp} を

$$\nabla_{\perp} = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} \quad (4.23)$$

で定義すると、結局、方程式 (4.19)、導体境界で $E_z = 0$ の境界値問題の固有値 λ に属する固有解 E_z を用いると

$$\tilde{\mathbf{E}} = \left(-\frac{ik^*}{\lambda^2} \nabla_{\perp} E_z + E_z \mathbf{k} \right) e^{i(\omega t - k^* z)} \quad (4.24)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left(-\frac{i\omega \epsilon}{\lambda^2} \mathbf{k} \times \nabla_{\perp} E_z \right) e^{i(\omega t - k^* z)} \quad (4.25)$$

となる。(4.25) より磁場は横波である。こうして電磁波を送る管を導波管 (wave guide) という。

次に、TE 波 (H 波) について考える。同様に H_z は (4.19) を満たし、

$$E_x = -i\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}), \quad H_x = -ik^* \frac{\partial H_z}{\partial x} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}) \quad (4.26)$$

$$E_y = i\omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}), \quad H_y = -ik^* \frac{\partial H_z}{\partial y} / (\omega^2 \epsilon \mu - k^{*2}) \quad (4.27)$$

H_z は導体の境界条件 $\mathbf{H} \cdot \mathbf{n} = 0$ より、 $\frac{\partial H_z}{\partial n} = 0$ が要求される。したがって (4.19) を自由境界条件 $\frac{\partial u}{\partial n} = 0$ で解けばよい。こうして得られた H_z を用いて、H 波は

$$\tilde{\mathbf{E}} = \left(\frac{i\omega \mu}{\lambda^2} \mathbf{k} \times \nabla_{\perp} H_z \right) e^{i(\omega t - k^* z)} \quad (4.28)$$

$$\tilde{\mathbf{H}} = \left(-\frac{ik^*}{\lambda^2} \nabla_{\perp} H_z + H_z \mathbf{k} \right) e^{i(\omega t - k^* z)} \quad (4.29)$$

となる。