



謹賀新年

2022年1月1日
本年もどうぞよろしく
お願い申し上げます。

今年こそは

以下、小学上級生・中学生の皆さんに向けて書きます。
あ 敢えて新年の挨拶を書くことすれば、今年の『春夏秋冬 393号』(2021年1月号)と全く同じことを書くことになるでしょう。この1年で、この国の殆どの指標は、さらに極端に悪化しました。しかし、状況がより深刻になったのは、こうした悪くなった各種の指標に目を瞑り、当座のつじつま合わせによって事態はそのうち好転する、という甘い考え方が台頭してきたことです。

僅かであっても科学技術的事業への参画・実績を持つ人は全て、社会の問題であっても物事には必ず原因があり、事態の好転は、例え複雑な因果関係を経由するにしても、その原因に何らかの作用することなくしてあり得ない、と考えます。すなわち、事態の好転が可能ならば、それは必ず何らかの政策的課題の解決を通して起こる、と考えます。

命と健康、基本的人権、文化、平和と安全保障など、私たちには守り・育てたい価値は多くあります。「この国の殆どの指標は、さらに極端に悪化し」たとは、こうした価値が危うくなった、という意味です。そして、何らかの事態の好転には、先行して必ず政策的課題の解決があるのです。

容易に理解できるように、教育政策は、複雑な因果関係とは相対的に独立して行える政策的課題です。教育は「百年の計」と言われ、即効性には欠けませんが、全ての価値についてその事態の好転に寄与する可能性があり、その上あまりお金をかけなくとも、絶大な効果・結果をもたらす分野もあることを、この国の歴史が何度も証明してきました。その一方、即効性が薄いため、優れたしかも強力な教育政策を実施するには、国民の確かな合意が欠かせません。

この国の凋落を食い止め、我々の多くの価値を高めるには、最優先でこの国の教育の改革を行うしかありません。勿論、政治は、教育のことだけ考えていればよい、などと言っているのではありません。上手くいっていない現況での最重点政策は教育である、と言っているに過ぎません。

少子高齢化の中でも、困難な安全保障状況の中でも、財政逼迫の中でも、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力の育成」は、国民の合意さえあれば、直ちに着手で

きます。そして、15~20年後ぐらいには、この国の科学技術、労働の生産性は、著しく改善する、と予想できます。しかし、こうした考えを持つ人は、まだ少数派です。

続きは、「現代の教育の機会均等」で読んでください。

塾からのお知らせ

1 時代は、一人一人が自律的で知的創造的な存在であることを強く要請していますが、日本は、少子高齢化と人口減少の中で、低学力・低学歴社会となっています。

2 当塾は、それぞれの塾生の学習戦略を、個性を尊重して個別に話し合っ決めていきます。やむを得ず個人指導となることはありますが、しかし、教育も学習も、社会的な活動であり、協働学習のメリットを無視しては、優れた個性は絶対に育ちません。教室にとって、複数の生徒の存在と、教師の事前の万全の準備は、創造性教育の不可欠の条件です。

3 塾を休む時は、必ず保護者からご連絡ください。

授業は(話し合っ決めて)定刻に始まり、定刻に終わります。学習は、児童・生徒の本分であり、最も重要な活動だからこそ、リズミカルに楽しく続けます。

4 塾の月謝は、前納制です。月末に月謝袋をお渡しますから、当月の月謝は、最初の塾の日に納めてください。必ず、領収書を発行しますから、その日に確認してください。

塾生募集中 募集中のコース

当塾のHPの最新の「折込ビラ」を見てください。
不明な点は、電話でお尋ねください。

現代の教育の機会均等

1 『春夏秋冬 404号』で詳しく書いた通り、サンデル氏は、^{メリトクラシー}米国の教育問題の最大の課題は、能力主義(meritocracy)の克服であると主張している。

「実力も運のうち 能力主義は正義か？」

マイケル・サンデル著 鬼澤忍訳

早川書房 2021年4月初版発行

サンデル氏は、「能力主義」を主に正義の問題として取り扱う。即ち、「能力主義」を不平等・格差・労働意欲の減退・社会の分裂などと結び付け、説得力ある議論を展開する。サンデル氏が指摘する通り、能力主義に適応し、多くの特典を手中にするのは、特定の階層の子息に限られる。サンデル氏は、アメリカの「一流大学の学生の(出身家庭の)大半は、

そもそも裕福である。アメリカの高等教育は、殆どの人がピルの最上階から乗り込むエレベーターのようなものである」と書いており、「能力主義」は社会の分断と停滞に大きく影響を与えている。そして、米国は多くの問題を抱えつつも、それでも今も成長している。

一方、日本でも「能力主義」にはそうした正義の問題も多くあるが、主要にはこの国の学力後退 → 科学技術力の後退 → 労働の生産性の後退と直結していることでより重大で深刻な問題となっている。基礎科学力の積み上げは、およそ小学5年生ぐらいから始まる。しかし多くの「能力主義」にかぶれた児童・保護者は、このころは既に中学受験の「即興力」形成の真っ只中である。

日本での「能力主義」が目標とする能力の実体は、「一流中学受験塾・一流中高一貫校・東大あるいは国公立大医学部に結び付く「即興力」であり、科学的基礎力とは全く無縁の能力となっている。そして、その王道を歩んできた人たちの無能さ、即ち現在が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の欠如が、この国の多面的な凋落の根本的な原因となっている。そして、殆どすべての政治家・官僚・文科省の役人、殆ど全ての中等教育の教師、全ての教育ジャーナリスト、そしてこれに重大な影響を与えている一部の評論家（これについては後述する）・一部の企業経営者はこの現状を良しとし、“教育”も金儲け・生産性の一助になればそれでよい、と考えている。

教育は「百年の計」であって、五年や十年で大きな実を結ぶことなど絶対にない。人口ボーナス・少子高齢化など日本の凋落を説明してきた議論は数々あるが、いずれも原因ではなく、結果を指しているに過ぎない。日本の凋落を政策的視点で見るとすれば、その原因はこの40年の教育の後退にある、と判断せざるを得ない。したがって、成果が出てくるには、改革を上手くやっても、少なく見ても、15~20年は辛抱しなければならないのは当然のこととなる。今直ちに改革を始めても、現在の小・中学生が社会の生産性の軸になるころに成果を期待するしかないのだ。その覚悟を共通認識として持たない限り、この国の凋落が加速することは不可避となる。

2 “一流”私立中高一貫校は、現在では公立中高一貫校も、目的・目標はどうであれ、学習意欲が高い生徒を選抜していることに変わりない。間違いなく、エリートの子だ。結果として、確かに彼らの一部は豊かな生涯を手にする。しかし、その結果、この国の科学技術力は大きく後退し、経済と労働の生産性は後退した。そして、サンデル氏の主張どおり、社会は富める者と貧しいものとに分断し続けている。

私立中高一貫校に何の罪もない。学校と生徒は、現状の「即興力テスト」である入試制度に適応したに過ぎない。創造性教育という面からみれば、無能になるための訓練という犠牲を払って、入試を突破してきたのだ。今や、日本は世界で有数の偽装論文の多い国となっている。そんな人たちに、この国の将来を多く期待すること自体、矛盾に満ちている。

各種の入学試験は、「資格試験」の様になっている。たとえば、医師国家試験は、計算問題、画像診断も含め全ての問題を、五択などの選択問題に

還元している。ちょっと工夫すれば、AIの方が高得点が取れるのではないか。「資格試験」はそれでよいのかもしれない。しかし、現代が要請する主要な教育目標は「知的創造的能力」の育成であり、AIができることは、AIに任せればよいはずだ。AIだけではできない事こそ、人はできなければならない。教育の軸を明確に「知的創造的能力」に据えなければ、この社会は資源を消耗した挙句には、そう遠からずの破滅を迎えるであろう。

現代が主要に要請する教育目標「知的創造的能力」に向けて、中等教育・大学学士課程教育を抜本的に改革しない限り、この国は凋落のスパイラルから逃れることは絶対にできない。基礎科学教育という視点で見れば、各生徒の個性・能力とその学習意欲は多様で、社会はそれに合理的に対応した学習環境を提供しなければ、教育目標「知的創造的能力」の要請に応えることはできない。

この国の「教育の機会均等」は、学年で輪切りにされた均一のしかも「即興力」優先のカリキュラムを全ての児童・生徒に押し付けるものになっている。個人の成長は決して一次的な尺度で測ることはできないが、例えそうであったとしても、学年を区切りとした学習指導要領、共通テスト、**偏差値などは、現代の教育目標とは全く無縁のものだ。現代の教育の主要な目標「知的創造的能力」に向けて、多様な児童・生徒の個性に対応した教育を提供しなければならない。これが現代の教育の機会均等の原則だ。

筆者がいくらそう叫んでも、現代の殆どすべての政治家・官僚・文科省の役人、殆ど全ての中等教育の教師、全ての教育ジャーナリズムには、全く通じない。なぜなら、彼らには殆ど「知的創造的」実績がなく、現在の「困難性」には全く理解が及ばないのだ。

野口悠紀雄氏は日本経済の現状について以下の様に説明し、政府の経済政策を厳しく批判している。

米国を含む労働の生産性が高い国は、付加価値の高い高度サービス産業が成長し、そのためサービス価格が上昇する。その結果、財価格が上昇しないにもかかわらず、消費者物価が上昇する。日本には、そうした産業が希薄なため、サービス価格が上昇せず、その結果、消費者物価が上昇せず、経済は成長していない。物価が上がるから経済が成長するのではない。

付加価値の高い高度サービス産業は、間違いなく高度な科学技術を基礎としており、いずれにしてもこの国の科学技術の停滞・後退がこの国の後退の直接的原因であることに変わりない。要約すれば、学力(知的創造的能力)の後退が科学技術力の後退を招き、それがこの国の経済を困難な状況に追いやっている。

全ての評論家がこうした考えに賛同しているわけではない。むしろ、現今では、これと全く反対の意見を述べる人が多数いる。その典型的な一例を、弁護士、名古屋商科大学経営大学院教授の植田統氏の主張に見ることができる。

「いつの間にか日本を見捨てていた日本企業と富裕層が映す怖い未来」

Microsoft Start (原文は JBpress) 2021/12/02 06:00

植田氏は、怖い未来「日本の将来はお先真っ暗」の原因を、次の3つに集約する。

(1) 少子高齢化：2020年には出生数が84万、死亡数は137万、日本人平均年齢は48歳である（インドは30歳だ！）

(2) 日本人個人の国際性のなさ：英語力の欠如、IT化の遅れ、海外ビジ

ネスについての知識のなさ

(3) 新しい時代に対応できない社会と会社の仕組み：高齢者支配と日本人のリスク回避性向，欧米と中国の企業に比べて圧倒的に劣る IT 化とスピード感

従って，対策は以下になる。

第一の施策は，やはり少子高齢化対策だろう。これが日本市場のサイズを決める変数なのだから。

第二の施策は，日本人の国際性の向上だ。

「今年から英語が小学校でも必修となるのは一つの進歩ではあるが，これまで中学高校で行われてきた“使えない英語”を教える英語授業はもうやめよう。“使える英語”を教える，“しゃべれる英語”を教える授業とするために，せめて英語のしゃべれる英語教師を増やしてほしい。教員免許がなくても，英語がしゃべれる人を大量に教師として雇い入れるべきではないのか。」

第三の施策は，年功序列の社会の仕組みを撤廃することだ。

上田氏は，一体どんな英語力で，上田氏の言う「怖い未来」の克服，弁護の成功，有利な商談の推進に寄与したことがあるというのか。

年功序列は，現実にはすでに崩壊している。さらにこの国では，非正規労働が，かなり多くなっている（正規：非正規＝2:1）。一体どういう現実に対する施策なのか。

少子高齢化は，政策的に現実化したのではない。十分な養育費，教育・医療の完全な無償化などは早急に取り組みねばならないが，それらが満たされたからと言って，少子化を転換することはできない。自分たちとこの社会に未来・夢があることを指し示すことこそが，少子化対策の原点だ。家畜を増やすのとは意義が違う。

3 世の制度が変わるのを待てば，それは破綻を待つことに等しい。立ち上がるのは，今しかない。たとえ少数であっても，あるいは“異端”と見なされても，個人は，ひたすら，現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」に向けた取り組みを可能なところから始めていくしかない。それは『春夏秋冬』で一貫して主張している基礎科学教育を「知的創造的能力」の育成に焦点を絞った目的意識的で合理的な取り組みに徹することだ。当塾はそれを目標としている。

「基礎科学を出来上がったものとしてではなく，発展するものとして学ぶ」ことが，「知的創造的能力」の獲得には欠かせない。それは，「即興力で問題を解く」ことを目標とした学習とは，大きな隔たりがある。一つの理論を学ぶにも，どういうことを契機としてその理論ができたのか，その理論の成立の背景は何なのか，そしてその理論の現実への適応で，どんなことがその限界を与えているのか，要するに科学史の中でのその理論の位置づけを学ばねば，より高度に進んだ学習への必然性・動機は十分に出てこない。即ち，自らも「知的創造的活動」に参画する姿勢で日常的な学習に取り組むことが，教育・学習の基本スタイルでなければならない。

各種の入試・選抜テストは，教育を低次元の技能訓練に追いやり，現代が強く要請する「知的創造的能力」の成長を極めて貧弱な状況に貶めている。

特に「四技能英語力」は，全ての入試から直ちに完全に排除すべきだ。

ある程度の「四技能英語力」が教育に不可欠というのであれば，それは選抜ではなく，レベルを設定した資格・条件とすれば十分だ。

現在の教育は，絶対に即興力を目標とはしてはならない。ひたすら将来の「創造的能力」を目指して進むことが現在の教育の絶対条件である。

天津市議会は，聴覚に障害がある人でも議事を傍聴できるように，議場での議員などの発言を音声認識ソフトで文字に変換し，傍聴席に置いた画面にリアルタイムで表示するシステムを新たに導入した。かな漢字変換を行い，漢字には，ルビまでついている。これは，AI がある程度の意味理解を行っていることを意味し，英語にも自動翻訳できる。したがって，議会の議論を英語でも聞くことができることを意味する。自動通訳はまじかに来ている。

『春夏秋冬』では，何十回も繰り返し，松尾豊氏の，「2025 年には機械翻訳が実用的なレベルに達するため，翻訳や外国語学習という行為そのものがなくなるかもしれない」という発言を取り上げてきた。松尾豊氏の主張は，読んで字の通りの「外国語学習」がなくなるのではなく，「四技能英語力」の学習はなくなるという意味だ。現実には，それに近づいている。

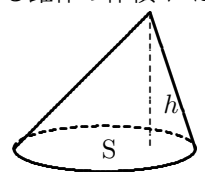
先端的な仕事をする上で，機微に満ちた英会話力が必要な分野はごく少ない。数学をはじめ科学の世界で用いる言葉は明確に定義して用いる。分からなければ問い返し，理解してもらえないなら，説明し直せばよい。殆ど，上手いかなかったことを「四技能英語力」に言い逃れているだけだ。人間に求められるのは，「即興力」ではなく，「知的創造的能力」である。即興力は，AI に任せることがどんどん増えてきている。

錐体の体積，球の表面積・体積

『春夏秋冬 404 号』に続いて，現代の初等・中等教育における数学教育の問題点とその改良について検討する。今回のテーマは「錐体の体積，球の表面積・体積」である。いずれも現行の教科書・入試参考書には，それらの公式の明確な証明がないだけでなく，公式を当てはめて「課題解決」という「即興力の修得」に重点を置いた教育が行われている。数学教育になっていない。『中学数学基礎 2022 年度版』をもとに，議論を展開する。

1 全ての空間図形の体積のもとなる錐体の体積 V は，底面積を S ，高さを h とすると

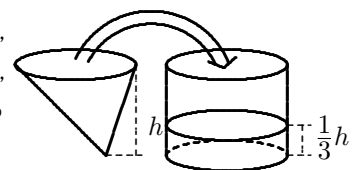
$$V = \frac{1}{3}Sh$$



である。

これは小学生でも知っている。その一般的で簡単な証明は，積分を用いて行われるため，中学生には，それを用いることはできない。

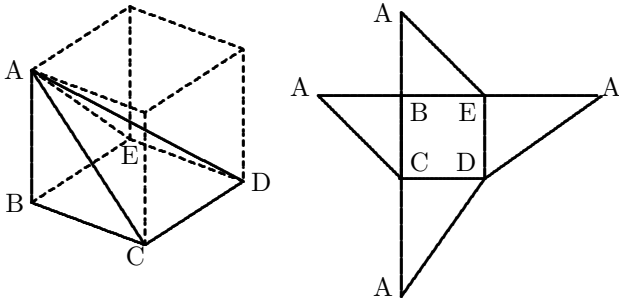
通常は，円錐形の容器いっぱいの水を，同じ底面積の円筒形の容器に移すと，水面の高さが3分の1になる，という実験で納得することになる。



『中学数学基礎』では，以下の様に記述している。

立方体の1面を底面とし，その上にない頂点を頂点とする四角錐 A-BCDE を考える。紙の上に四角錐の展開図を描き，これを切り取り，四角錐を折りあげる（塾では1年生の時に学習する，必ず一度は自分で実行して下さい，立方体の1辺の長さは5 cm 程度として下さい）。これを3個よせると

立方体ができる。即ち底面の正方形の1辺の長さが1 cm、高さが1 cmの四角錐の体積は $\frac{1}{3}\text{cm}^3$ となる。



ここから思考実験になる。この四角錐を底面に平行な多くのスライスに切る。もう一つこれを作り、面積の広いものから順に重ねると、底面は元の四角錐と同じで高さが2倍の四角錐状の立体ができる。スライスの厚さを十分薄くすればこれは高さが2倍の四角錐であり、体積は2倍になることがわかる。これを3個の四角錐に行えば、体積は3倍になる。こうして四角錐の体積は高さに比例することがわかる。

つぎに底面積 1 cm^2 で高さが任意の四角錐を粘土状の物質で作り、四角錐を高さは変えないで底面の形状を正方形から任意の形状に変えた錐体に変形することができる。これは四角錐を前と同じく薄いスライスに切断したとしたら、断面積は頂点からの距離の2乗に比例し、形状によらないことによる(相似な図形の面積比は相似比の2乗に等しい)。こうして底面の形状が任意の 1 cm^2 で高さが $h\text{ cm}$ の錐体の体積は $\frac{1}{3}h\text{ cm}^3$ であることがわかる。

つぎに同じ錐体2個を、頂点と底面を共通にして1つの錐体を作るように変形すると、底面積が2倍になると体積が2倍になることが分かり、錐体の体積が底面積 S に比例することも理解できる。

底面の正方形の1辺の長さを2cm, 3cm, 4cmと増加し、それぞれの底面の差を底面とする錐体の体積や、対称性からその半分の底面からなる錐体の体積を計算することにより、錐体の体積は底面の形状によらず底面積に比例することが確認できる。

こうして、公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ が“証明”できた。多くの平面図形の面積の計算は三角形の面積の公式から出発している。それは、どんな平面の図形も小さな三角形を積み重ねて表すことができるからである。

ユークリッドの展開では、『中学数学基礎』に書いている通り、平行四辺形が先行、等積移動を通して、三角形の面積に至る。

同様の理由で、空間図形の体積の計算は元をたどれば、公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ から出発していることが多い(後述の通り、別の展開もいくらかでもある)。『中学数学基礎』には、三角柱の分割による錐体の体積の求め方も書いている。しかし、公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ の証明には、いずれも話が長く、分かりにくい。

2 高校2年で学ぶ積分を使うと、以下の様に、錐体の体積を求めることは極めて容易である。

錐体の頂点を座標の原点に、 x 軸を原点を通り底面に垂直な直線に選ぶと、錐体の $x(>0)$ 面での断面積は、 ax^2 と表せる。よって、高さ h 、底面積 $S = ah^2$ の錐体の体積 V は、

$$V = \int_0^h ax^2 dx = \frac{1}{3}ah^3 = \frac{1}{3}Sh$$

となる。

3 積分を学ぶ前では、当塾の教材『中学数学発展』(非公開)で説明している、級数(区分求積法)を用いた錐体の体積の求め方が最もスッキリした理解となる。

初めに、数列と級数の扱いに慣れる。

数が並んでいるものを数列という。

$$a_1, a_2, \dots, a_n$$

数列の各項を加え合わせたものを級数という。

$$\sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

2次に比例する数列

$$\text{初項 } a, \quad \text{一般項 } a_k = ak^2$$

$$\text{級数(の和)} \quad \sum_{k=1}^n ak^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}a$$

級数を用いた錐体の体積

底面積 S 、高さ h の錐体を考える。底面に平行な面で切断すれば、その面積は頂点からのその面までの距離の2乗に比例する。したがって、錐体を底面に平行な $(n-1)$ 個の面で等間隔に切断した k 番目の切断面の面積は

$$S_k = \left(\frac{k}{n}\right)^2 S$$

となる。各切断された板の厚さは、 $\frac{h}{n}$ である。したがって、これらの板の体積の総和 V_n は、

$$\begin{aligned} V_n &= \sum_{k=1}^n S_k \times \frac{h}{n} = \frac{Sh}{n^3} \sum_{k=1}^n k^2 \\ &= \frac{Sh}{n^3} \times \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

n を無限大に取ると、 $V = \frac{1}{3}Sh$ が得られる。

繰り返すが、高校で積分を学習するまでは、このやり方が一番スッキリする。しかし現在、中学では級数とか極限などを学習していない。

4 どうせ解析的な発想を根拠にするのならば、さらにもっと巧妙に錐体の体積を求めることもできる。

今回の概説に際し、以下のような証明を考案した。

高さ h 、底面積 $S(h)$ の錐体の体積 $V(h)$ は、 Δh を任意の微小量($|\Delta h/h|$ が十分小さい)とすると、

相似な図形の体積比は相似比の3乗に等しく

$$\begin{aligned} V(h + \Delta h) &= \left(\frac{h + \Delta h}{h}\right)^3 V(h) \\ &= (1 + 3 \cdot \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta h}{h} \text{の高次の項})V(h) \end{aligned}$$

また、一方、

$$V(h + \Delta h) = V(h) + S(h) \cdot \Delta h + \frac{\Delta h}{h} \text{の高次の項}$$

と表せる。したがって、

$$\{3V(h) - hS(h)\} \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta h}{h} \text{の高次の項} = 0$$

$$\text{よって、} V(h) = \frac{1}{3}S(h)h$$

『中学数学基礎』では $(x+a)^3$ の展開に限らず、1.4節「集合の要素の数」で、二項定理も学習する。

これが成功したのは、空間図形の計量における相似な図形の体積比は相似比の3乗に等しいことをユークリッド幾何学の学習で学んでいたからである。これが積分の役割を演じていたのだ。筆者は、こうした展開を他に見たことはないが、こんな単純なことだから誰かがどこかに書いている可能性は高い。これには、中学生に理解困難なところはどこにもない。『中学数学基礎』(2022年度版)に付け加えておいた。

いずれにしても、数学の学習において、証明あるいは根拠を明確にすることなく、公式を利用することなど、あってはならない。実験は数学の証明ではない。やむなく、証明なしで公式を使わざるを得ないときは、何時・どういう形で、その証明を行うかを明確に生徒に伝えるべきだ。

現在の初等・中等教育には、将来の自律的な「知的創造的能力」を持った人材を育てようという姿勢が全く見えない、即ち、現代の教育にはなっていない。解が解明済みの「平易な難問」(物江潤氏)に即興的に応えればよい、という姿勢に徹している。

5 球の計量に入る前に、円の計量を復習しておく。

『中学数学基礎』を要約すると以下の様になる。

① 全ての円は相似である。

② したがって、以下の議論が成り立つ。

円周の直径に対する割合を円周率という。

$$\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}} = \text{円周率 (半径によらず一定)}$$

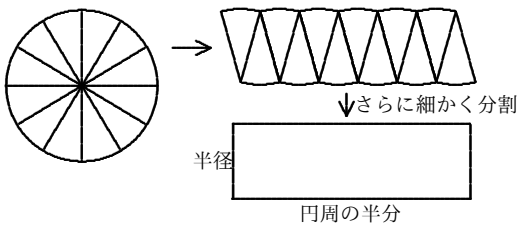
すなわち 「円周の長さ = 円周率 × 直径」

この公式の意味は、円周の長さが直径に比例する、ということであり、円周率はその比例定数にすぎないということだ。その根拠は全ての円は相似であり、直径も円周もその図形の長さの量である、ということである。「円周率」とは「円周の直径に対する割合」という意味である。よって、上の議論は論理的には「相似」の後に来るべきものだ。

$$l = 2\pi r \quad r: \text{円の半径}, \quad l: \text{円周の長さ}$$

これは、公式というより、定義に近いものだ。

③ 円の面積は「半径 × 半径」に比例することが(次元解析的に)直ぐわかる。この場合の比例定数が円周率であることは、円を小さな扇形に分割し、それを長方形のような形に並べて、縦は半径、横は円周の半分になり、結局、円の面積は 円周率 × 半径 × 半径 であることから理解できる。



よって 半径 r の円の面積 S は、 $S = \pi r^2$

これを錐体の体積を求めた方法で証明しておこう。

半径 r の円の面積を $S(r)$ とし、 Δr を 任意の微小量 ($|\Delta r/r|$ が十分小さい) とすると、

相似な図形の面積比は相似比の2乗に等しく、

$$S(r + \Delta r) = \left(\frac{r + \Delta r}{r}\right)^2 S(r) = (1 + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r} \text{の2次の項}) S(r)$$

また、一方、

$$S(r + \Delta r) = S(r) + 2\pi r \cdot \Delta r + \frac{\Delta r}{r} \text{の高次の項}$$

と表せる。したがって、

$$\{2S(r) - 2\pi r^2\} \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r} \text{の高次の項} = 0$$

よって、 $S(r) = \pi r^2$

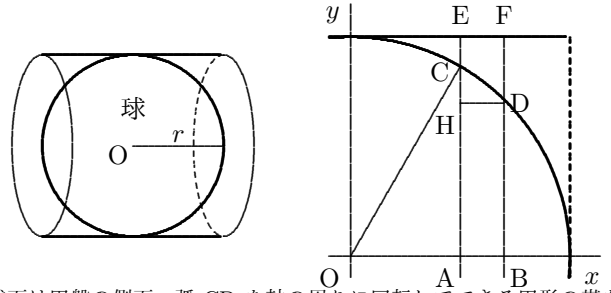
6 球の計量 … 表面積と体積

初めに、半径 r の球の表面積 S は以下である。

$$S = 4\pi r^2$$

これを『中学数学基礎』にしたがって証明しておこう。

左の図では、半径 r の球をすっぽり包む円筒を考える。右の図はそれを円筒の軸 (x 軸) に垂直な方向から見たもので、球を x 軸に垂直な面で切断して厚さの薄い円盤を作ったとする。切断の中は十分小さいとする。



球面は円盤の側面、弧 CD を軸の周りに回転してできる円形の帯を加え合わせたものと考えられる。この帯の円の半径は AC で、帯の長さは $2\pi \times AC$ となるから、帯の面積は $2\pi \times AC \times (\text{弧 } CD \text{ の長さ})$ となる。

球面は円盤の側面、弧 CD を軸の周りに回転してできる円形の帯を加え合わせたものと考えられる。この帯の円の半径は AC で、帯の長さは $2\pi \times AC$ となるから、帯の面積は $2\pi \times AC \times (\text{弧 } CD \text{ の長さ})$ となる。

CD が十分小さいとき、弧 CD は直線と見なせ、 $OC \perp CD$ と見なせる。このとき、 $\triangle OAC \sim \triangle CHD$ 、よって $AC:HD = OC:CD$ 、

$AC \times CD = HD \times OC$ となる。面の間隔 AB が十分に小さいとき、弧 CD は弦 CD と等しく、結局帯の面積は $2\pi \times OC \times HD = 2\pi r \times EF$ となる。

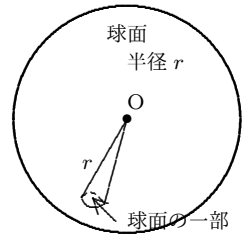
すなわち、線分 EF を x 軸の周りに回転した帯の面積と同じになる。これらの帯の面積を加え合わせると円筒の側面積になる。

すなわち球の表面積は円筒の側面積に等しくなる。

よって、 $S = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$ となる。

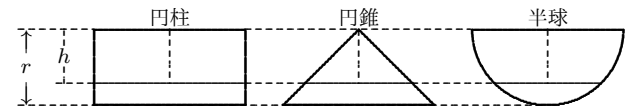
次に、半径 r の球の体積を求めよう。

これは簡単で、錐体の体積の公式から直ぐわかる。球を、頂点を球の中心に持つ小さな「錐体」(ただし底面は球面の一部)に分けたとする。一つ一つの錐体の体積は $\frac{1}{3}r \times (\text{小さな球面の一部の面積})$ となる。これを加え合わせれば $\frac{1}{3}r \times \text{球の表面積} = \frac{1}{3}r \times 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ となる。



もっとわかりやすい求め方もある。

底面の半径 r 、高さ r の円柱、底面の半径 r 高さ r の円錐、半径 r の半球を図のように描く。



上から h のところでの断面はそれぞれ、 πr^2 、 πh^2 、 $\pi(r^2 - h^2)$ となっている。すなわち (円柱の断面) - (円錐の断面) = (半球の断面) になっている。各 h について常にこれが成り立つから、(円柱の体積) - (円錐の体積) = (半球の体積) となる。球の体積を V とすると $\pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{1}{2}V$ 、 $V = \frac{4}{3}\pi r^3$ となる。

上の議論は球の体積を球の表面積を用いずに求めていることから、球の体積を球の中心を頂点とする小さな錐体の集まりと見なして、逆に球の表面積を求めることができる。

$$\frac{1}{3} \times \text{球の表面積} \times r = \frac{4}{3}\pi r^3 \quad \text{したがって、球の表面積} = 4\pi r^2$$

7 さらに、錐体の体積を求めたと同様の方法で球の体積を求めることもできる。

半径 r の球の体積を $V(r)$ とすると、 Δr を任意の微小量 ($|\Delta r/r|$ が十分小さい) とすると、

相似な図形の体積比は相似比の 3 乗

$$V(r + \Delta r) = \left(\frac{r + \Delta r}{r}\right)^3 V(r) \\ = (1 + 3 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項}) V(r)$$

また、一方、

$$V(r + \Delta r) = V(r) + 4\pi r^2 \cdot \Delta r + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項}$$

と表せる。したがって、

$$\{3V(r) - 4\pi r^3\} \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項} = 0$$

$$\text{よって、} V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$$

この処方でも、球の体積の公式から、球の表面積の公式 $S(r) = 4\pi r^2$ を簡単に導くこともできる。

$$V(r + \Delta r) = \frac{4}{3}\pi(r + \Delta r)^3 \\ = \frac{4}{3}\pi(r^3 + 3r^2\Delta r + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項})$$

一方、 $V(r + \Delta r) = \frac{4}{3}\pi r^3 + S(r) \cdot \Delta r + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項}$

$$\{4\pi r^2 - S(r)\} r \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項} = 0$$

$$\text{よって、} S(r) = 4\pi r^2$$

いずれにしても注目すべきことは、球の表面積や体積を求めるには、円周あるいは円の面積の計算で導入した π のような新しい無理数を導入する必要がないだけでなく、図形の知識のみを用いて厳密に導くことができるということである。

楕円の面積は簡単に求まるが、一般の楕円の周囲の長さは、容易に求めることはできない。

筆者は数学教育の専門家ではないが、証明抜き公式を日常的に用いて学習を進めることなど、数学の成り立ちからありえないと考えている。歴史的にも、未だ証明が確定していない命題(“定理”)が多くあるが、その“定理”を用いないと証明できない命題は定理とは言わない。そして、それを用いて証明を行ったりしない。数学とは、そういう“面倒くさい”論理一貫性を重視する科学である。ある定理を証明するのに欠かせない定理があるのなら、その定理を先に学習すべきである。結果として、数学の学習は、前進あるのみである。そういう習慣を中学生の段階から、しっかり身に付けておくべきだ。曖昧な根拠、覚えただけの定理など、(数学の)学習の進展に何の役にも立たない。

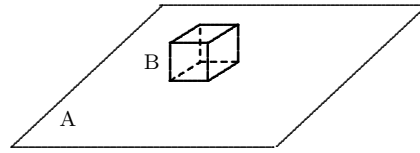
筆者をはじめ、殆どの人は数学を生業なりわいとはしていない。数学を利用しているのだ。しかし、数学を利用する立場ではあっても、ほんの少し他の人と違った形で定理を応用しようとする、殆ど常に、その定理の根拠、即ち厳密な証明を見直さなければならない。それに納得することなく、オリジナルな主張を展開することはできない。これは、一般の研究者の日常的な作業である。

多くの優秀な児童・生徒を育てるには、それぞれの児童・生徒の多様な個性を活用し、児童・生徒が自らの学習生活に自信・確信が持てるような学習環境を整えねばならない。現状の中等教育の教科書や参考書は、あらゆる意味で、現在の教育目標「知的創造的能力の育成」に全く適合しておらず、全面的に書き改めねばならない。その際、中学数学の錐体の

体積、球の表面積・体積については、ここで記した議論も参考にして、出来るだけコンパクトに展開して頂きたい。

8 『中学数学基礎』には、次の例題を取り上げている。

〔例題1〕 図のように、平面 A の上に 1 辺の長さが 1cm の立方体 B が置かれている。長さ 1cm の線分 PQ は、平面 A の上部かつ立方体 B の外部を立方体 B の表面と共有点を持ちながら動く。この線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めなさい。(灘高 14)



線分 PQ が通過できる立体は

- (1) 平面 A に含まれない立方体 B の 5 つの面と、それぞれ 1 つの面を共有する、1 辺 1cm の立方体が 5 つ
- (2) 平面 A に含まれない立方体 B の 8 つの辺をそれぞれ高さとし、半径 1cm で中心角 90° の扇形を底面積とする円柱を 4 等分した立体が 8 個
- (3) 平面 A に含まれない立方体 B の 4 つの頂点をそれぞれ中心とした、半径 1cm の球を 8 等分した立体が 4 個

$$\text{合計 } 5 + \frac{8}{3}\pi(\text{cm}^3)$$

何の変哲もない問題だが、これを 5 年前、二人の小学 5 年生の塾生にやってもらった。勿論、ヒントを出しながらだったが、結局 2 人で 1 時間以上を要して、正解に至った。

立方体 B と上記 (1) と (2) の全ての展開図を作成し、それぞれの空間図形を作成し、これらを糊で張り合わせた。この作業を行えば、(3) は容易に球を 8 等分した図形が 4 個であることが理解できる。

この際、球面のどんな部分であっても、展開図は作成できない事を確認しておかねばならない。今はやっているかどうか知らないが、小学校では、工作の時間に、地球儀を作ったことがあるのではないか。そのことを思い出してほしい。学習の過程で、演習問題を多くやれば、それが「即興力」だけでなく「学力」に結び付く、と考えるのは軽薄である。時間は限られており、取り上げた演習課題には、「学習」としての機能を十分考慮しなければならない。したがって、(3) を通して、生徒には、たとえ球の一部であってもその展開図は描けないことは、この問題の重要な学習項目でもある。(ユークリッド幾何学的には、 π も作図できず、(2) の展開図も描けないのだが、必要な精度では描けるので、通常はそれを用いる。)

空間図形の学習で最も重要なことは、空間図形の正確なイメージを頭に描くことである。『中学数学基礎』には、

「ロシアの数学者ポントリアーギンは幼くして視力を失った。ご母堂はポントリアーギンのために部屋に糸を縦横に張って、彼が図形を「感じる」ことに貢献した。ポントリアーギンは数学の多くの分野(特に位相幾何学)で不朽の貢献をした。大学生になると、君も何冊かは彼の著作を読むだろう。」と書いている。

ステイーヴン・ウィリアム・ホーキング氏の例もある。全ての人には、それぞれの多様な個性を活用すれば、「知的創造的実績」にも貢献する可能性はあるはずだ。「能力主義」と「即興力テスト」は、社会進歩の障害物となっている。