



今から始めよう

今回も初めに、小学上級生・中学生の皆さんに向けて書きます。

年末のTBSテレビ、再放送の「ドラゴン桜」を見られたでしょうか。勿論そんなドラマを見る余裕はなかった、というのが正解ですが、筆者は商売柄、再放送も見ました。東大合格一直線の生徒の数学の学習は、極めて簡単な無数の四則演算の一つ一つを瞬時に処理する訓練から始まりました。これが、東大合格の数学の出発点である、というのです。これは、和田秀樹氏の「暗記数学」に通じます。限られた時間の中で、いかに多くのパターン化された問題を解くかを競う現代の各種入試、各種学力テスト、数学オリンピックやPISAの学力調査など全てに共通したやり方です。

和田秀樹氏の「暗記数学」批判は、『春夏秋冬 285号』を参照ください。これをやるのは、数学的無能な人物だけだと断言できますが、それをやれば、東大に合格する可能性は増大します。

一般に、1時間や2時間で解答できるような問題は、「解法の暗記もの」であり、いくらそれらを重ねても、頭の体操にはなっても、「即興力」を超えた学力の獲得には結びつきません。新井紀子氏が率いた、AI(人工知能)が東大に合格することを目標とした「東ロボ君」は、数年前に、「MARCH」(明治大学、青山学院大学、立教大学、中央大学、法政大学)に合格できる偏差値を獲得していました。当時、AIは「意味理解」に難があり、AIに題意を明確に伝えれば、AIは東大の入試問題にも即座に正解したと予想されます。新井氏は、その後、「読解力」キャンペーンを始めました。

現代の学習の「要点」は、AIやAIを備えたロボットだけでは処理できない課題に、人が適切に対応する能力、即ち、AIを超える「知的創造的能力」を持つことです。

レベル3の自動運転の自動車が発売されています。そして近い将来、限られた環境ではありますが、レベル4の自動車が導入されると考えられています。物流のターミナルである倉庫は、殆ど無人で機能するようになっています。今一番人手を要する物流・宅配は、徐々に合理化されます。規格化された住宅ならば、3Dプリンターで作ることもできます。無人工場もどんどん増えています。問診・診断でも、AIの方が正確に行え、医師はそのチェックをするだけ、手術も自動化がどんどん進んでいます。

人の労働は、歴史的には、徐々にAIだけではなし得ない、あるいは人がやってはじめて価値のある労働のみに移行していきます。しかし社会がすぐそうなるわけではありません。資本が、自動化より生身の人間を使った方が安上がりだと判断すれば、自動化は進みません。

教育も同じです。社会(政治)が、多くの国民をロボットの様に管理・使用しようとするれば、あまり知的創造性を持った人に育てようとはしません。その時、教育の軸は、現状の様に技能教育となります。

教育・学習の目標が狂っているのは、現代の社会的要請であ

る「知的創造的能力」は絶対に獲得することはできません。現に、東大に最も多く合格するのは、1987年から続く開成学園(百名の外部からの高校入学者を含む)ですが、ノーベル賞はおろか、著しい実績を出した科学者は誰一人いません。

現代の日本(多くの国でも、大なり小なり類似している)では、学習意欲が旺盛な若者を、「即興力」と言われる瞬時の判断力の向上に集中させ、現代が真に若者に求めている「知的創造的能力」の育成をなおざりにしてしまったことが、あらゆるこの国の閉塞・後退に結び付いてしまったのです。

現在の学力の実体「知的創造的能力」は、基礎科学を完成し応用するものとしてではなく、さらに発展させるものとして、即ち科学史の教える合理的な手続きの中で学習することを通して形成されるものです。

例えば、

$$\frac{5}{12} + \frac{3}{8}$$

の計算は、誰でも難なくできますが、当塾の小5年生向けの演習問題、

$$\frac{5}{893} - \frac{3}{611} \quad \frac{1}{2418} + \frac{1}{434} - \frac{2}{2015}$$

はできるでしょうか。通分には最大公約数が必要で、その手法「ユークリッドの互除法」は、分数計算という枠組みには欠かせないツールです。もっと強く言えば、互除法の学習抜きには、分数計算の学習を完結したことにはなりません。当塾の小学生の授業では、『中学数学基礎』を示しながら、中学生になったら互除法を厳密に証明し、さらにその応用として「ベズーの等式」を証明し、その活用も議論する、と説明します。

ところが、現行の検定教科書、中学数学では互除法の説明はなく、高校数学でも互除法の原理には触れられていますが証明はされていません。したがって、整数についての極めて重要な「ベズーの等式」を知らないまま、高校を卒業することになります。

いまや、中学受験・高校受験・大学受験は、現代の学力「知的創造的能力」の獲得の足かせになっています。合格すればよい、という姿勢では、どこの大学に進んでも、現代が要請する学力を修得することは不可能です。

しかし、残念ながら、今の文科省の役人、初等中等教育の教師、ましてや教育ジャーナリストに上記のような認識はありません。彼らの殆どは、「知的創造的能力」の結実と言える科学論文を書き、高い評価を得た経験がなく、「知的創造的能力」の何たるかを殆ど理解していません。現状の受験勉強は、現代の学力獲得とは大きくずれていることの認識がありません。上からの改革は期待できないのです。

現代の教育改革は、教育を受ける側からの能動的な働きかけがなくては実現しません。シカゴ市では、「統一テスト」を拒否する市民運動が起こりました。児童・生徒とその保護者が自律的に立ち上がらなければ、事態は改善せず、結果として、この国の退潮は続くと言わなければなりません。

塾生募集中 募集中のコース

当塾の HP の最新の「折込ピラ」をご覧ください。
不明な点は、電話でお尋ねください。

急がねば！

1 英教育専門誌タイムズ・ハイヤー・エデュケーションの「22年度世界大学ランキング」(2021年9月2日発表)の上位200校には、東京大(35位)・京都大(61位)の2校しか含まれず、中国10校、韓国6校、香港5校と差がついてしまった。また、文部科学省「科学技術指標2021」(Top10%補正論文)では世界第10位となった。

ところが、前京大総長の山極寿一氏は、「世界大学ランキングを信じてはいけない」と主張する。確かに、そうした現実を誰も「信じて」はおらず、しかも、世界の“一流大学”が、政策的にランキングが上がるよう差別的な学生の選抜、人材登用、資金運用などを行ってきた結果ではあるとしても、依然として、それらのランキングに用いられた基礎資料は、教育・研究の実績を表していることに変わりはない。東大は、従来“国立”ということでも必ずしも上手く立ち回り難い面はあったのだが、それでは、文科省による教育改革で近い将来、世界のトップクラスの大学に踊り出すことができるか、と言えば、ほとんど絶望的である。従来から東大には任期制の特任教授が多いが、“論文”の数を増やすだけで、そこからノーベル賞級の成果が出たことはないし、偽装論文の多さが際立っている。

東京大学には、歴史的に極めて有利な条件が無数にあった。我々が問題にしているのはその東大が、研究実績として、近年極めて低いランキングの状況にあり続けている現実である。そして、今世紀に入って、世界で2番目に多くのノーベル賞受賞者を輩出してきたこの国の基礎科学のレベルがガラガラと崩れ去りつつある現実を、日本の教育・研究が全くなすすべもなく傍観している教育の無策に、呆れているだけだ。

「四行教授」という言葉がある。東京大学卒業、東京大学大学院修了、東京大学助教、(講師)、准教授、教授と、履歴書に四行程度しか学歴・経歴を書かない人を指す。筆者は、ノーベル賞級の世界的な実績を出した人一人も知らない。

2 2021年12月17日、次のようなニュースが流れた。

三菱重工業は16日、三重県松阪市の工場の一部を、消毒薬などを手がける健栄製薬(大阪市)に売却した。国産初の小型ジェット旅客機「スペースジェット(SJ,旧MRJ)」の尾翼などを手がけていた。三菱重工によると、SJの製造を担う同社工場の売却は初めて。SJは開発を中断しており、事業化が見通せなくなっている。

完全に国産の小型ジェット旅客機の開発の可能性がなくなる、ということではないが、ついにここまで来たか、の感をぬぐえない。

一時、この国は、世界の半導体生産のシェアは5割を超えていた。今は数パーセントだ。特に、先端分野の半導体は、この国では生産できなくなっている。

2021年12月末現在、殆ど毎日、コロナ関連のワクチンや治療薬の開発がとん挫した、というニュースが流れている。ブースター接種も、結局外国産のワクチンに頼らざるを得なくなった。年末になって、22年の春頃には、国産ワクチンが利用できるかもしれない、と報じられた。一体どれだけこの国に、先端技術、競争力のある技術があるのだろうか。心細くなってくる。

世界は厳しい緊張と競争の時代に突入している。

「先端技術の特許、非公開を検討

政府、軍事転用リスクを回避」

共同通信社 2021/12/11

政府は軍事に転用できる先端技術の特許を非公開にする制度の導入に向け、検討を加速する。情報公開を制限し、先端技術の国外流出で安全保障上のリスクが高まるのを回避する。来年の通常国会に提出を目指す経済安全保障推進法案の柱の一つで、早ければ2023年にも導入したい考えだ。

米中のハイテク覇権争いが激化し、情報保全の重要性が増している。欧米や中国、ロシアなど主要国には既に軍事関連の特許情報を非公開にする「秘密特許制度」がある。軍事上の重要技術が漏れれば自国の安全保障に脅威となるためだ。

科学技術の前線では、部分的ではあっても、日常的に、否が応でもこうした覇権争いに巻き込まれる。特定の先端技術が軍事転用可能かどうかは、開発の時点では必ずしも明らかではないが、一般的に言えば、全ての先端技術は、軍事的転用の可能性があり得る。

しかも、そうした最先端の技術は、それぞれの基礎科学分野での進歩に基づいている。特に、近年では、基礎科学の言葉であり、手段である数学が注目を浴びている。

1990年ごろから、これからは数学が活躍する時代である、と多くの識者が指摘していた。しかし、この国では、数学者の職場はむしろ減少していった。

『春夏秋冬391号』(2020年1月号)には、次のように書いた。

「週刊ダイヤモンド2016/1/23」の特集「使える数学」の副題は、

「数学こそビジネスで戦う究極の武器である」

が参考になる。そこには、米名門大学5校(スタンフォード大学、マサチューセッツ工科大学、ハーバード大学、カリフォルニア大バークレイ校、プリンストン大学)の「数学専攻者」の勤務先の表が掲載されていた。(括弧内の数は人数)

「米では数学者がトップ企業へ」

グーグル(338)、アップル(87)、オラクル(87)、ゴールドマン・サックス(86)、マイクロソフト(86)、IBM(79)、マッキンゼー・アンド・カンパニー(77)、フェイスブック(71)、インテル(66)、モルガン・スタンレー(51)、シティグループ(44)、リンクトイン(44)、アマゾン(41)、ボストン・コンサルティング・グループ(39)、ブラックロック(33)

最近になって、ジャーナリストの知野恵子氏は

政府や産業界が「数学」に力を入れ始めた。デジタル化が進む中、数学の知識や思考法が、AI(人工知能)、ビッグデータなど、これからのビジネスや生活に不可欠になっているからだ。グーグル、アップルなどの「GAFA」と呼ばれる大手IT企業を生み出した米国では、すでに10年ほど前から人

気職業ランキングの上位を「数学者」「データサイエンティスト」などの数学関連が占める。数学ができれば、つぶしが利く時代の到来。日本も対応を迫られている。

と主張している。今ごろになって、何を言っているのか、呆れてしまう。

ノーベル賞を受賞した山中伸弥氏の iPS 細胞の発見・製作用や眞鍋淑郎氏の長期の気象モデルは、生命科学や地球物理学の最も基礎的な発見でもある。

基礎科学と技術開発の相関がますます強くなっている現在では、基礎科学研究と技術開発の境界は、明白ではなく、相互に重なる部分が大きくなっている。もっと言えば、長期的には、基礎科学レベルの向上は、あらゆる技術レベルの向上に決定的な影響を与えるようになっている。特定の技術開発は、開発の社会的要請を背景にすることに変わりないが、それは常に何らかの基礎科学的分野の確立あるいは進歩を背景としている。基礎科学は、技術開発の母体である。

歴史的には、「基礎科学 → 技術開発」ではなく、「社会的要請 → 技術的工夫 → 基礎科学」が主流であった。しかし現代では、基礎科学が技術開発の土壌を形成している。どんな技術開発も、その展開を可能ならしめる基礎科学の進歩を背景とする。したがって、マクロ的には、基礎科学の遅れたところからは、抜本的あるいは継続的な技術的開発は行えない。

したがって、逆に、ハイテク覇権争いは、基礎科学研究にも大きな影響を与えるようになっている。

是非、

「モビリティ・ゼロ 脱炭素時代の自動車ビジネス」

深尾三四郎著 日経 BP 2021 年 10 月 第 1 版第 1 刷発行を読んでいただきたい。筆者には、こうした分析を行う能力がない。

帯には、「脱炭素は欧州が編み出した世界経済のゲームチェンジであり、CO₂ 削減努力をお金に換える新しい錬金術です」とある。そして、全編を通して、日本は、大きく立ち遅れていることを示している。その上で、第 5 章(終章)「ピンチをチャンスに、日本への提言」を読んで、全ての提言の絶望的状况に暗澹たる思いを抱かせる。日本の政府に、一体どんな科学技術戦略があるというのだろうか。

次善の策として、一世代前の半導体工場を莫大な国家資金を投入して九州に誘致し、当面の半導体不足を補填したとしても、次世代の経済成長には結びつかないことは明らかである。こうした政策は、途上国の技術習得の処方であり、日本が完全に技術的後進国になった証でもあるのだが、それではこうしたことによってこの国の後進性が克服できるかと言えば、それは全くありえない話である。安価で豊富な労働力が十分あるとは言えないだけでなく、何よりそれを基礎に先端技術を開発する「知的創造的能力」をもった多くの人たちを養成してはいないからである。

日本には、まだまだ余裕がある、とみる人たちもいる。

「日本が 100 年以上にわたり蓄積してきた国富(ストック)は韓国に比べられない。日本の国家債務比率が 254%(世界 2 位)であっても揺れないのは、3 兆 2000 億ドルの対外純資産(世界 1 位)を保有しているからだ。」

という。しかし、一人当たりの GDP(フロー)の相対的減少は、円安の流れもあって、徐々に進行している。重要なことは、対外純資産は、主要には国家が持っているわけではなく、永久に一般国民の生活向上に寄与するのではなく、限られた人のためだけに運用される。

明らかに、現代では「基礎科学 → 技術開発」の時代になっ

ている。優れた基礎科学教育は、この国の再生に欠かせない前提条件となっている。

3 この国に残された唯一の可能な策は、抜本的な教育改革を断行するしかない。小学上級生からの主要な教育目標を明確に「知的創造的能力」の育成に据え、その基礎である基礎科学教育を合理的・統一的に推進するしか道はない。科学を出来上がったものとしてではなく、発展させるべきものとして教育・学習する必要がある。少なくとも、小学上級生・中等教育・大学学士課程教育の科学教育は、入試対応などの「即興力」ではなく、言わば科学史的な必然性の中で基礎科学を学習することが欠かせない。

2022 年 1 月 1 日、当塾の HP には以下の様に書いた。

この国は全ての面で危機的状況にあります。その突破口は、教育を現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の育成に転換することだ、と考えています。

そのためには、第一に教育内容の改革であり、第二に多様な生徒・学生の能力・意欲に応じた協働学習の実現、第三に中等教育の科学教育の教師には確かな「知的創造的実績」のある人を充てることです。

教育改革は、殆ど金をかけずとも、国民の強い意志・合意さえあれば実現可能であり、成果は十数年から 20 年ぐらいで必ず現れてくる。明治維新や戦後の復興はこれを実証している。しかし、それらは、外的要因を起爆剤にして達成できたものであり、この 40 年の弛緩、この国の誤った政策を起因とした全面的後退とは、多くの点で異なっている。政策的誤りに起因した事態は、もし可能であったとすれば、政治によってしか改めることはできない。残念なことではあるが、現在の政治にはその意志や能力が全く欠けているだけでなく、主要な世論にも改革の意志はほとんど見られない。

強い意志を持って、可能どころ可能な人から取り組み始め、世論の変化を促すしか道はない。

多項式

『春夏秋冬 405 号』に続いて、現代の初等・中等教育における数学教育の問題点とその改良について検討する。今回のテーマは「式の計算」である。中学では、虚数を含む複素数の学習をしない。さらに、実数では、その連続性の議論をしない。したがって、「代数学の基本定理」は学ばず、たとえば、有理数係数の多項式の因数分解であっても、因数は一次式だけでなく二次式となることもある。したがって、ここで重要なことは、中学数学教育・学習による学力形成には、教育する側の一貫した論理構成を進めるためのかなりの努力・工夫が要請される。「即興力」形成の従来の教育では、これをサボり、より高度な学力形成の障害となってきた。

1 一変数多項式の割り算

『中学数学基礎』でみられる通り、整数の素因数分解には、「整数の割り算」の定義が出発点になった。同様に、一変数多項式の議論にも、割り算の定義が欠かせない。

一変数多項式の割り算

2つの多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 \quad (a_n \neq 0)$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \quad (b_m \neq 0)$$

に対して,

$f(x) = h(x)g(x) + r(x)$, $r(x)$ の次数 $< g(x)$ の次数を満たす多項式 $h(x), r(x)$ がただ一つ存在する。この時, $r(x)$ を, $f(x)$ を $g(x)$ で割った余り (剰余) という。

一般に, こうした定義もその根拠 (証明) を必要とする。『中学数学基礎』の整数の議論では, 証明していた。

ここではまず, 「現代数学への入門 代数入門」(上野健爾著 岩波書店) の証明を紹介しておく。

もし, $n < m$ ならば, 条件 ($r(x)$ の次数 $< g(x)$ の次数) より,

$$h(x) = 0, r(x) = f(x) \text{ である。したがって以下, } n \geq m \text{ と仮定する。}$$

$d = n - m$ において,

$$h(x) = c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_0$$

とする。 $d = n - m$ に注意すると,

$$\begin{aligned} h(x)g(x) &= (c_d x^d + c_{d-1} x^{d-1} + \cdots + c_0)(b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0) \\ &= c_d b_m x^n + (c_{d-1} b_m + c_d b_{m-1}) x^{n-1} \\ &\quad + (c_{d-2} b_m + c_{d-1} b_{m-1} + c_d b_{m-2}) x^{n-2} + \cdots \\ &\quad + (c_0 b_m + c_1 b_{m-1} + \cdots + c_m b_0) x^m + (m-1 \text{ 次以下の項}) \end{aligned}$$

従って, $a_n = c_d b_m$

$$a_{n-1} = c_{d-1} b_m + c_d b_{m-1}$$

$$a_{n-2} = c_{d-2} b_m + c_{d-1} b_{m-1} + c_d b_{m-2}$$

...

$$a_m = c_0 b_m + c_1 b_{m-1} + \cdots + c_m b_0$$

となる。 $b_m \neq 0$ だから, $c_d = \frac{a_n}{b_m}$

これを 2 番目の式に代入して,

$$c_{d-1} = \frac{1}{b_m} \left\{ a_{n-1} - \frac{a_n b_{m-1}}{b_m} \right\}$$

続いて, 3 番目の式 c_d, c_{d-1} を代入して, c_{d-2} を得る。この操作をつづけて, 順次 $c_{d-3}, c_{d-4}, \dots, c_1, c_0$ が定まる。以上によって, $h(x)$ が一意に定まる。そこで,

$$r(x) = f(x) - h(x)g(x)$$

とおくと, これは, $m-1$ 次以下の式であり, 「 $f(x)$ の次数 $< g(x)$ の次数」を満たし, $h(x)$ が一意に定まったので, $r(x)$ も一意に定まる。

さらに「現代数学への入門 代数入門」には, 多項式についてのユークリッドの互除法の証明があり, その上, 多項式についてのベズーの等式の証明もされている。

非常に丁寧・厳密で, 中学生にもその気があれば十分理解できる。教科書・参考書もこうありたいものだ。これらの証明は, 「構成的証明」であり, 筆算で割り算を行う手続きを表現したものである。

しかし, 中学生には, これでは話が長すぎる。『中学数学基礎』には以下の様に記述している。

多項式の割り算

多項式 $f(x)$ を多項式 $g(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると,

$$f(x) = Q(x)g(x) + R(x)$$

ただし, $Q(x), R(x)$ は多項式で, $R(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より低い

と定義する。

多項式の割り算が一意的であることを証明しておこう。

もし, 多項式 $f(x), g(x)$ について, 2つの割り算があったとしよう。

$$f(x) = Q_1(x)g(x) + R_1(x)$$

$Q_1(x), R_1(x)$ は多項式で, $R_1(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より低い

$$f(x) = Q_2(x)g(x) + R_2(x)$$

$Q_2(x), R_2(x)$ は多項式で, $R_2(x)$ の次数は $g(x)$ の次数より低い

これより, $(Q_2 - Q_1)g(x) = -(R_2 - R_1)$

R_1, R_2 の次数はともに $g(x)$ の次数より低いから, 右辺は $g(x)$ の次数より低い。一方, 左辺の $Q_2 - Q_1$ が 0 でないとすると, 左辺の次数は $g(x)$ の次数以上となり, 右辺と左辺の次数が等しくなくなる。したがって, 恒に $Q_2 - Q_1 = 0$ となり, また, $R_2 - R_1 = 0$ となる。すなわち, $Q_1 = Q_2, R_1 = R_2$ で多項式の割り算は一意的となる。

重要なことは, 多項式の割り算が整数の割り算と同じ形式で定義されていることである。このことが, 多項式の多くの性質が, 整数の性質と同じ形式の性質に対応することになる。

$R(x)$ が 0 のとき, $f(x)$ は $g(x)$ で割り切れると言い, $f(x)$ は $g(x)$ の倍数, あるいは, $g(x)$ は $f(x)$ の因数という。

いま, $g(x) = x - A$ とすると, $R(x)$ は定数となる (x を含まない多項式)。したがって, $f(x) = Q(x)(x - A) + R$ 両辺に $x = A$ を代入すると, $f(A) = R$ となる。すなわち, もとの多項式 $f(x)$ に $x = A$ を代入した値は $f(x)$ を $(x - A)$ で割ったときの余り R に等しい (剰余定理)。もし, $f(A) = 0$ ならば, $f(x)$ は因数 $(x - A)$ をもつ (因数定理)。

さらに, 以下の定理が成り立つ。

$$f(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

$c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ は整数

が有理数 $\frac{p}{q}$ (p, q は互いに素で, $q \neq 0$) に対して,

$f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ ならば, p は c_0 の約数, q は c_n の約数である。

証明

$$c_n \left(\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + c_{n-2} \left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \cdots + c_1 \left(\frac{p}{q}\right) + c_0 = 0$$

両辺に q^n をかけて,

$$c_n p^n + c_{n-1} p^{n-1} q + c_{n-2} p^{n-2} q^2 + \cdots + c_1 p q^{n-1} + c_0 q^n = 0$$

$$p(c_n p^{n-1} + c_{n-1} p^{n-2} q + c_{n-2} p^{n-3} q^2 + \cdots + c_1 q^{n-1}) = -c_0 q^n$$

左辺は p の倍数であり, $c_0 q^n$ も p の倍数, p と q は互いに素だから, c_0 が p の倍数となる。よって, p は c_0 の約数である。

同様に,

$$c_n p^n = -q(c_{n-1} p^{n-1} + c_{n-2} p^{n-2} q + \cdots + c_1 p q^{n-2} + c_0 q^{n-1})$$

だから, $c_n p^n$ は q の倍数, p と q は互いに素より, c_n が q の倍数。

例題を考える。

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 6$ の場合, 6 の因数は $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ である。

$x = -3$ のみが解である。従って, $x^3 + 2x^2 - x + 6 = (x+3)(x^2 - x + 2)$

また, $f(x) = 3x^3 + x^2 + 4x - 4$ の場合, $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{2}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$ が候補である。 $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ である。したがって,

$$f(x) = 3x^3 + x^2 + 4x - 4 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 + x + 2)$$

2 二変数以上の多項式の整理 … 対称式

以下, 『中学数学基礎』に従って記述する。

多項式が対称式であるとは, 変数を任意にいくら入れ替えても, 結果としてもとの形と同じ式になることをいい,

交代式とはどの1組の変数を入れ替えても符号が逆になる多項式のことをいう。また、一般の基本対称式の定義を省き、2変数 x, y の場合は $x + y, xy$ を、3変数の場合は、 $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$ のことをいう。差積とは2変数の場合 $x - y$ 、3変数の場合 $(x - y)(y - z)(x - z)$ をいう。

一般に、
対称式の基本定理

任意の n 変数の対称式は n 変数の基本対称式で表すことができる。

任意の交代式は差積と対称式の積で表すことができる。

したがって、対称式は基本対称式で、交代式は差積と対称式の積に整理することができる。

大学生になれば、対称式の基本定理の一般的な証明法に接するだろうが、これは中学、高校の数学の範囲を超える。しかし、中学生にとっても、対称式の基本定理は不可欠であり、証明なくしてそれを利用するのは数学の学習法ではない。したがって、限定的にでも、対称式の基本定理を証明せざるを得ない。表現はいろいろあるが、簡単なものを知らない。一例を順序を追って示しておく。

始めに、「数学的帰納法」と呼ばれる非常に良く用いられる証明法を、例を用いて説明する。

「 $n \geq 5$ のとき、 $2n + 1 < n^2 < 2^n$ である。」を証明しよう。

$$2n + 1 < n^2 < 2^n \dots \textcircled{1}$$

まず、 $n = 5$ について、 $\textcircled{1}$ が成立することを確かめる。

$$2n + 1 = 11, n^2 = 25, 2^n = 32 \text{ であり、} 11 < 25 < 32 \text{ より、}$$

$\textcircled{1}$ は成り立つ。

つぎに、 $n = k$ ($k \geq 5$) について、 $\textcircled{1}$ が成り立つとする。

すなわち、 $2k + 1 < k^2 < 2^k$ を仮定する。

$n = k + 1$ のとき、

$$n^2 - (2n + 1) = (k + 1)^2 - \{2(k + 1) + 1\} = k^2 - 2 > 0$$

$$2^n - n^2 = 2^{k+1} - (k + 1)^2 = 2 \cdot 2^k - (k + 1)^2$$

$$> 2k^2 - (k + 1)^2 = (k - 1)^2 - 2 > 0$$

よって、 $n = k + 1$ のときも、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

したがって、5以上の全ての整数について、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上のような証明法が、数学的帰納法である。

多項式は同次式のグループの和の形で書かれる。多項式の変数の入れ替えによって多項式が変わらないことは、各次のグループにおいて変数の入れ替えによってそのグループが変わらないことを意味する。したがって、証明は、同次式について行っておけばよい。以下の証明のアウトラインは20数年前ネットで読んだものであり、筆者のオリジナルなどはない。ここでは、2変数、3変数の「対称式の基本定理」を、読みやすくするため、埋め込み式の演習問題に仕立てておく。辛抱して読み通して欲しい。

〔演習1〕 2変数 (x, y) の基本対称式は $x + y, xy$ の2つである。以下は、2変数の場合の対称式の基本定理の証明である。空欄をうめよ。

$f(x, y)$ を対称式とする。 $f(x, y) = 0$ であるか、 $f(x, y)$ の次数が0(すなわち $f(x, y)$ が定数) のときは、成り立つ。

$f(x, y)$ の次数が1以上とする。 $g(x) = f(x, 0)$ とおく。多項式 $g(x)$ は0ではないとする(0の時は、 $f(x, y)$ が因数 xy を持ち、後の議論に含まれる)。

$h(x, y) = f(x, y) - g(x + y)$ とおくと、 $h(x, y)$ は対称式で、 $h(x, 0) = \textcircled{a}$ となる。因数定理より、 $h(x, y)$ は \textcircled{b} で割り切れる。 $h(x, y)$ は対称式で

あることから $h(x, y)$ は \textcircled{c} で割り切れる。よって、 $h(x, y) = xyp(x, y)$ を満たす対称式 $p(x, y)$ が存在する。 $g(x + y)$ の次数は、 $g(x)$ の次数と等しく、 $g(x) = f(x, 0)$ の次数は、 $f(x, y)$ の次数より小さいか、等しいので、 $h(x, y)$ は0か、または $h(x, y)$ の次数が $f(x, y)$ の次数より小さいか、等しくなる。よって $p(x, y) = 0$ または $p(x, y)$ の次数は $f(x, y)$ の次数より小さくなる。帰納法より \textcircled{d} は基本対称式の多項式となる。よって $f(x, y) = \textcircled{e} + xyp(x, y)$ は基本対称式の多項式となる。

- (a) 0 (b) y (c) xy (d) $p(x, y)$ (e) $g(x + y)$

〔演習2〕 3変数 (x, y, z) の基本対称式は $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$ の3つである。以下は、3変数の場合の対称式の基本定理の証明である。空欄をうめよ。

$f(x, y, z)$ を対称式として、 $f(x, y, z)$ の次数に関する帰納法で証明する。

$f(x, y, z) = 0$ 、あるいは $f(x, y, z)$ の次数が0の時 ($f(x, y, z)$ が定数の時)、は成り立つ。

$f(x, y, z)$ の次数が1以上とする。 $f(x, y, 0)$ は x と y に関する対称式になる。よって、2変数の対称式の基本定理より、 $f(x, y, 0) = g(x + y, xy)$ を満たす0ではない多項式 g が存在する。 $h(x, y, z) = f(x, y, z) - g(x + y + z, xy + yz + zx)$ とおくと、 $h(x, y, z)$ は対称式で、 $h(x, y, 0) = \textcircled{a}$ となる。因数定理より、 $h(x, y, z)$ は z で割り切れる。 $h(x, y, z)$ は対称式であるから $h(x, y, z)$ は \textcircled{b} でも割り切れる。よって $h(x, y, z) = xyzp(x, y, z)$ をみたす対称式 $p(x, y, z)$ が存在する。 $g(x + y + z, xy + yz + zx)$ の次数は、 $g(x + y, xy)$ の次数と等しく、 $g(x + y, xy) = f(x, y, 0)$ の次数は、 $f(x, y, z)$ の次数より小さいか、等しいので、 $h(x, y, z)$ は \textcircled{c} 、または $h(x, y, z)$ の次数が \textcircled{d} の次数より小さいか等しくなります。よって $p(x, y, z) = 0$ 、または $p(x, y, z)$ の次数は $f(x, y, z)$ の次数より小さくなる。帰納法の仮定により \textcircled{e} は基本対称式の多項式である。よって $f(x, y, z) = g(x + y + z, xy + yz + zx) + xyzp(x, y, z)$ は基本対称式の多項式となる。

- (a) 0 (b) xyz (c) 0 (d) $f(x, y, z)$ (e) $p(x, y, z)$

〔演習3〕 2変数の場合について、交代式は差積と対称式の積であることを証明せよ。

$f(x, y)$ を交代式、すなわち $f(x, y) = -f(y, x)$ とする。 $x = y$ とおくと、 $f(x, x) = 0$ 。これは因数定理より、 $f(x, y)$ が因数 $x - y$ を持つことを意味する。 $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$ 、 $g(x, y)$ は多項式とおく。これを $f(x, y) = -f(y, x)$ に代入して、 $(x - y)g(x, y) = -(y - x)g(y, x)$ 、 $(x - y)(g(x, y) - g(y, x)) = 0$ となる。これが常に成り立つためには、 $g(x, y) = g(y, x)$ 。

特に対称式については応用は広い。

$$\textcircled{1} x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$$

$$a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$$

$\textcircled{2} x + y = 10, xy = 16$ のとき、多項式ではないが、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{x + y} = \frac{x + y}{xy} + \frac{xy}{x + y} = \frac{10}{16} + \frac{16}{10} = \frac{89}{40}$$

$\textcircled{3} a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{1}{6}$ のとき、多項式ではないが、

$$\frac{b + c}{a} + \frac{c + a}{b} + \frac{a + b}{c} = \frac{(a + b + c)(ab + bc + ca) - 3abc}{abc} = -3$$

$\textcircled{4}$ 数 a, b, c があり、 $a + b + c = \frac{23}{20}, \frac{1}{a + b} + \frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} = 6$ のとき、

$$\begin{aligned} & \frac{a}{b + c} + \frac{b}{c + a} + \frac{c}{a + b} \\ &= \frac{(a + b + c) - (b + c)}{b + c} + \frac{(a + b + c) - (c + a)}{c + a} + \frac{(a + b + c) - (a + b)}{a + b} \\ &= (a + b + c) \left(\frac{1}{b + c} + \frac{1}{c + a} + \frac{1}{a + b} \right) - 3 = \frac{23}{20} \times 6 - 3 = \frac{39}{10} \end{aligned}$$

これは、対称式を意識して式を変形した結果である。

⑤ $ab = 4$, $ab^2 - a^2b + a - b = 48$ のとき, $a^2 + b^2$ の値を求めよ。

(西大和学園高)

交代式 $ab^2 - a^2b + a - b = (b-a)(ab-1) = 48$ に $ab = 4$ を代入して, $b-a = 16$, 平方して対称式にして, $a^2 - 2ab + b^2 = 256$, よって $a^2 + b^2 = 256 + 2ab = 264$

⑥ $m - n = 2$, $mn = 4$ のとき, $(n^2 + 1)m - (m^2 + 1)n$ の値を求めよ。(13, 東大寺学園高)

m, n の交代式であることに注目して,

$$(n^2 + 1)m - (m^2 + 1)n = n^2m - m^2n + m - n = -mn(m - n) + (m - n) = (m - n)(-mn + 1) = -6$$

⑦ 4次の交代式 $x^3(z - y) + y^3(x - z) + z^3(y - x)$ は直ちに

$$x^3(z - y) + y^3(x - z) + z^3(y - x) = (x - y)(y - z)(z - x) \times (x + y + z) \times c, c: \text{定数}$$

となり, x^3 の係数の比較から, $c = 1$ が得られ, 因数分解

$$x^3(z - y) + y^3(x - z) + z^3(y - x) = (x - y)(y - z)(z - x)(x + y + z)$$

ができたことになる。

3 『中学数学基礎』には, 因数分解の手法について, 実利的な以下の提案を行っている。

因数分解の技法

- (a) 共通因数でくくる。
- (b) 2次の展開公式を適用する。
- (c) 二次方程式の解の公式が使えないか。
- (d) 括弧を活かす。
- (e) 次数の低い文字について整理する。
- (f) いじめられっ子に注目する。
- (g) 同次の項がそれぞれ因数分解できないか。
- (h) 複二次式ではないか。

内容は『中学数学基礎』で確認いただきたい。今回の紹介を契機として、『中学数学基礎』を改定するべきところは一か所もなかった。また, 当塾には, 式の計算及び因数分解のかなり膨大な演習プリントを用意している。塾生となって, 活用いただきたい。

4 最後に, 以前、『中学数学基礎』に取り上げていた問題を解いてみる(現在は、『中学数学発展』に収録している)。

素数 p に対して,

$$x + y + z = \frac{p}{3}, xy + yz + zx = \frac{1}{p}, xyz = \frac{1}{p^3}$$

を満たす x, y, z が全て正の有理数であるとき, p および x, y, z を求めよ。(’10 旭川医大)

このままでは中学生には全く手がかりもないようにみえるが, しかし, 3つの式の左辺は3変数 x, y, z からなる基本対称式であることに気づく。中学生は2変数 α, β の基本対称式 $\alpha + \beta, \alpha\beta$ はどんなときに役立つのか良く知っている。即ち, 全ての対称式は基本対称式で表せること, 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ の2つの解を α, β とすると, いわゆる解と係数の関係,

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

が成り立つことを知っている。

3次方程式について, どうなっているのか, と考えるのは自然な発想だ。簡単のため, t の多項式の展開

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - (x+y+z)t^2 + (xy+yz+zx)t - xyz$$

を考えると, $t^3 + at^2 + bt + c = 0$ の3つの解を x, y, z とすると,

$$x + y + z = -a, xy + yz + zx = b, xyz = -c$$

が得られる。したがって, x, y, z は方程式 $t^3 - \frac{p}{3}t^2 + \frac{1}{p}t - \frac{1}{p^3} = 0$ の3つの解であるあることが分る。分母を払って,

$$3p^3t^3 - p^4t^2 + 3p^2t - 3 = 0$$

このままでは, 3次の係数にパラメーターがついていて, 定理がすぐ使えないので, $pt = u$ とおくと

$$3u^3 - p^2u^2 + 3pu - 3 = 0$$

ただし, t は正の有理数, p は素数だから, u も正の有理数。

これに1で証明した定理を適用すると, u の候補は $u = 1, 3, \frac{1}{3}$ のみとなる。これを順次確かめる。

$u = 1$ のとき, $-p^2 + 3p = 0$, p は素数だから, $p = 3$ 。

$$\text{このとき方程式は, } 3u^3 - 9u^2 + 9u - 3 = 0, (u-1)^3 = 0$$

解は $u = 1$ の3重解 ($x = y = z$), $x = y = z = \frac{1}{3}$

$u = 3$ のとき, $-9p^2 + 9p + 78 = 0$ 整数解なし

$u = \frac{1}{3}$ のとき, $\frac{1}{9} - \frac{p^2}{9} + p - 3 = 0, p^2 - 9p + 26 = 0$ 整数解なし

$$\text{よって, } p = 3, x = y = z = \frac{1}{3}$$

『中学数学基礎』, あるいはこのメモを一通り学習すれば, 中学生も大学受験生も, あるいは中学・高校の教師も条件は同じである。中学生にはかなり難しくなったが, 上の解答を見れば, 理解できないところはどこにもないはずだ。即ち, 「即興」ではなく, 十分な時間さえあれば, これぐらいの問題はほぼ解けるよう(完璧を狙えば, 学習はそこでストップする), 慌てず着実な学習を進めるのが本筋である。逆に言えば, 筆者は, この程度の問題が解けるように, このメモを書いたつもりである。「即興力」を求めれば, 「知的創造的能力」に向けての学習は, 原理的にそこでストップすることを覚悟すべきだ。

何度も指摘してきたことだが, 日本の誇る大数学者の岡潔氏の“名言集”の中に,

「私は三日かからねば, つまり二晩寝なければ解けない

という問題から問題と呼ぶことにしている」

という言葉がある。それぞれ個人にとって, 意義のある課題は, その処理に最低三日程度はかかるという意味である。

原理的には, 上述の通りだが, 上記の問題は, そうは言っても, 解けない中学生が多数いるだろう。解答を見て, 理解できなければより基礎的な学習からやり直さねばならないが, 解答を理解できるならば, 自らにとってこれは「難問」として, その論理展開を記憶にとどめながら, 先に進むことを考えるべきである。これは演習問題であり, 如何に低次元の問題であっても, 初めて遭遇する課題には適切に答えられないこともある。これは, やむを得ないことであり, それによって, その人に学力がない, という証明にはならない。

逆に, 学習を「多数の解法に習熟すること」の様に理解し, 全く数学的に無能な人間を養成する「暗記数学」などに流れれば, 君の数学的才能はそこで完全に終了する。