



今、最後のチャンス?

1 大学入学共通テストで、受験生による“不正”が発覚しました。しかし筆者は、本質的にはこれは必ずしも不正ではなく、単に共通テストに失敗したに過ぎないと考えています。なぜなら、何度も繰り返し述べてきましたが、このテストは現代が主要に要請する教育・学習目標「知的創造的能力」と殆ど相関がなく、むしろ即興力を目標とした「競争と選抜」の論理に汚された極めて悪質な策謀に過ぎないと考えからず。

『春夏秋冬 405号』、『春夏秋冬 406号』ではこうしたテストは、マイケル・サンデル氏の能力主義(メリトクラシー)批判を基礎に、差別と社会の分断・分裂を誘導し、科学技術の発展を遅らせるものだということを学びました。

この国の科学技術力は全面的に大きく後退し、結果として、労働の生産性は既に後進国の域に達しています。即興力としての技能教育や目先の技術開発投資では、もはやこの国の再生は全く困難な状況になっています。研究・開発投資は、既にその規模に関わらず殆ど実績が期待できない状況に陥っています。こんな状況での教育の使命は、どんなに時間がかかろうとも、長期的・戦略的な教育政策によってこの閉塞を転換することです。

「教育は百年の計」と言われています。明治維新や戦後の復活には、決して潤沢な研究・開発資金があったわけではありません。基礎科学教育を、慣れ親しんだ自らの母語(日本語)で、それぞれの時代の出来る限りの高度なレベルの、できる限りの多くの若者に実施しました。

基礎科学教育のカリキュラム上の後退は1980年ころから進行しています。因みに、公共職業安定所をハローワークと呼ぶようになったのは1990年です。既に1990年代の中ごろには、東大生をはじめとする大学生の分数計算さえできない数学力の低下のデータが数多く示されるようになりました。しかし文部省は、そのころから「ゆとり教育」を主張し、カリキュラムのレベルの後退をさらに加速させました。

高度成長期後半から、工業高校、工業高等専門学校、工業大学などがかなり多く作られました。教育内容においては、普通教育(基礎科学教育)に近いものでした。すなわち、そこで修得した技能が必ずしも直接生産に結び付くものばかりではなく、大学・大学院に進学した生徒もかなりいました。技能教育・訓練が不要だと言っているわけではありません。最終的には、全ての人はそれぞれの分野での技能を必要とし、幼少のころから訓練が必要な分野もあります。

ところが、文科省は3年後には、大学入学共通テストに「プログラミング」を導入しようとしています。情報科学やアルゴリズムを取り入れるのならいざ知らず、「プログラミング」は技能であり、それを全ての大学進学

者に強要することは基礎科学教育レベルの低下を招くことになります。

筆者の研究・教育活動の大半は各種のプログラミング言語を用いたプログラミングに終始しました。やむを得なかったこととは言え、結果として、筆者の基礎科学の識見は不十分となり、研究・開発の局面で多くの困難に直面し、人一倍の努力と時間を要することとなりました。

原子核理論、内燃機関の性能向上、大学や塾での数学・理科の教材作成など何をやるにも、数学とプログラミングは不可欠でした。例えば、音声解析に用いられるFFT(First Fourier Transformation)の実質的機能を理解するには、一度は自らがFFTのプログラミングを行わねばなりません。借り物では、人のまねをした利用しかできません。研究・開発の局面だけでなく、自らの思想・科学観に従って一貫した教育を行なうためには、無数のプログラミングという作業が必要になります。それぞれには、それぞれに適したプログラミング言語があります。プログラミング言語は、次々と新しい言語が開発され、バージョンアップや統合化も行われます。「プログラミング」という概念自身もどんどん発展しています。筆者は、課題・仕様さえ要請すれば、最終的には、「プログラミング」という作業はなくなり、AIが課題処理をしてくれるようになるのではないかと予想しています。

明治維新や戦後の復活は、結果として技能労働者の育成とは全く異なる効果、この国の基礎科学レベルの高度化をもたらしました。基礎科学教育にそれほど膨大な資金は要りません。国家は貧しくても、かなりの高度な基礎科学教育は十分可能です。戦後の普通教育はそれをよく物語っています。そして21世紀に入って日本は世界で2番目に多くのノーベル賞受賞者を輩出するところまで到達しましたが、最近になってはその影もなくなりつつあります。国家の意志、あるいは民意こそが重要です。困難な状況にあっても、民意が求めれば、先進的な基礎科学教育は、この国でも十分可能なはずで

す。ICT(Information and Communication Technology 情報通信技術)の進歩と現代社会への浸透は凄まじく、人の在り方(生活、労働、文化活動、スポーツ、教育、その他)即ちこの社会を大きく変化させています。従来多くの技能労働だけでなく知的労働・事務的作業も、次々と自動化されています。ひとは、徐々にではありますが、AI(artificial intelligence 人工知能)だけではできない事、ひとがやってこそ価値があることに集中しなければならなくなり続けます。

どの程度の速さでそうした社会に転換するかは、技術的な進歩ではなく、主に社会的な事情によって(自動化より人の苦役に委ねた方が低コストとなるなど)決まります。2012年のGoogleのディープラーニングによる猫認識からまだ10年しかたっていません。AIは発展途上です。

いずれにしても、ICTとAIは、この社会を大きく転換し続けます。それに従って、ひとの知的労働は、ますます「知的創造的能力」が要請されるようになります。AIだけでは

処理できない「知的創造的作業」ができるようなひとが要請されていると考えられています。

最終的に、全ての知的作業において、AI がひとの知能を超える転換点(技術的特異点 シングularity Singularity) がやってくるかどうかは誰にもわかりません。しかし、科学史が教えるところによると、ひとの科学的認識の進歩には、数々の大きな「飛躍」がありました。現代の AI では、コペルニクス転回ではできないと考えられています。「飛躍」は、単純な演繹・帰納ではありません。AI と言えども人が作った仕掛けです。AI が地動説や相対性理論、量子論(粒子と波動の統一)を創造することができるようになるかどうかは、わかりません。ひとは、「創造性」において、まだまだ大きな役割が続くと考えられています。

現代の教育の主要な目標は「知的創造的能力」の育成であることは明白です。それは決して「即興力」を求める「***テスト」などによって計量できるものではありません。

解法のマニュアルにしたがっていくら短時間に解を得る訓練を行っても、「知的創造性」は得られません。「得られない」というより、ますます AI が、あるいは AI だけで多くのことが自動的に処理できるようになります。通訳・翻訳などは AI のほうが優れた仕事をしてくれるようになります。自動車や他の乗り物の自動運転はそのレベルを急速に向上させています。医療・介護における診断・判断・処置は日進月歩で自動化が進んでいます。医者は、GO のサインを出すだけになりつつあります。まもなく、あらゆる方面で、「即興的判断」は AI のほうが優れた判断を行うようになるでしょう。

現代が主要に要請する「知的創造的能力」と言っても、その養成は容易ではありません。何よりも、現代の殆どの中等教育の教師には、「知的創造的能力」の実体を理解することさえできません。それは確立した定型の処方(技能)の訓練をいくら積み重ねても、あるいは、即興力修得を目標とする入試対策的な学習を積み重ねても、「知的創造的能力」を獲得することはできません。大雑把に言って、基礎科学の世界での創造性の実績、それなりに国際的に評価される論文を書いたことがないひとに、「知的創造的能力」の実体を理解することなどできません。自らが確かな創造性の実績を持たない人に、創造性の実体を理解することはできないひとに、創造性に向かって教育を進めることなどできません。言い換えれば、現代が主要に要請する学力「知的創造的能力」のための教師は務まりません。

ひとの創造性の源泉の一つは、ひとそれぞれの多様性です。基礎科学の進歩・発展の歴史(論理)の中での理解と同時に、自らを特徴づける多様性・個性は創造性の源泉です。同じことを学んでも、同じ現実にあっても、他の人とは異なる受け止め・理解があります。自らの持つ多様性は感性とも言われることがあります。それが合理性と結合したとき、創造性に発展することがあります。

現在、教育投資に反対する人は殆どいません。しかし、政治家も、産業界からも、もちろん評論家も、教育の主軸を基礎科学教育へ転換すべきだ、という認識を持っている人は少ししかいません。何度も引用してきましたが、以下のような考えは安倍氏だけにとどまらず、殆どのこの国の識者の共通した考え方です。

安倍元首相が 2014 年の OECD 閣僚理事会で「学術研究を深めるのではなく、もっと社会のニーズを見据えたもっと実践的な職業教育を行う。そうした新たな取り組みを、高等教育に取り込みたい」と演説しました。未

だに、これを信奉する人が多くいます。安倍氏は、イノベーションを「既成の技術の組み合わせ」と見なし、市場をにらみながら、そうした技能を修得することが、学習・教育の課題である、とみています。ノーベル賞受賞の本庶氏はこれを「問題意識の低い発言」と言いました。こうした考え方は、安倍氏固有のものではなく、日本の多くの財界人や歴代政権の中枢部も、似たり寄ったりです。教育・学習を「受験偏差値競争」と見なし、非合理的競争に若者を駆り立てた結果が、この国の閉塞・後退を招いたのです。

教育改革は、民意の統一あるいは国家の意思があれば、容易に実施できると書きましたが、現実にはそこにはまだまだ遠い道のりがあります。しかし、これも何度も主張してきましたが、教育改革の主題は、教育内容の改革です。『春夏秋冬』では、過去、数学(算数)教育について、この 10 年だけでも、何度もしかも多くの提案を行ってきましたが、一向に改められてきません。ゆとり教育を境に、教育レベルの大幅な低下さえ強行されてきました。文科省が動くのを待つのではなく、あらゆるところで、教育内容の改革に取り組み始めるべきです。大学入試共通テストや府教育委員会の主導する各種学力テストや入試とは一線を画した、それぞれの児童・生徒の能力と意欲に最大限的確に対応した教育をあらゆる教育現場に導入する時です。

初等・中等教育は自力で通える距離に、大学学士課程の大学は自宅から通える距離に、少なくとも理系教育においてはそれぞれの意欲と能力に応じた最適の教育コース・カリキュラムを設定しておく必要があります。中等教育においても、半年前にはシラバスを公開し、受講選択の指導はあっても、最終的には受講者の責任において受講する、という形式にすればよい。入学テストなどは、直ちに全廃するべきです。

この国にも、現在においても、次々と英才の卵は生まれています。その多くの人には、現状の「競争と選抜」の論理の中で、次々とただの物知り程度の人に骨抜きにされています。各地域に、組織的にそうした英才を含む意欲と能力に応える教育を実施する体制を早急に整えなければなりません。

年齢と「即興力」で輪切りにした教育コースの設定は、現代の「教育の機会均等」に反します。教育の機会均等は、その人の成長を原則とします。「即興力」に対応した「競争と選抜」の論理は、完全に破綻しています。

これらを実現するためには、中高の少なくとも理系の教師には、基礎科学の実績を持った教師を大量に採用し、教育ノルマを週 2 日ぐらいに制限し、後は研究・開発に専念させる、という形態を導入すれば、多くの困難に対するかなり現実的な策となります。現状の科学の実績を持たない多くの教師は、教務の補助的任務に就ければよい。現在では、単に理論や解法を伝えるだけならば、生身の人間である教師は殆ど必要とはしません。

この国の多面的な閉塞を打開するには、科学技術の向上が必要であり、そのためには基礎科学教育の質的転換が欠かせません。

直ちに、やれるところから着手すべきです。

塾生募集中 募集中のコース

当塾の HP の最新の「折込ビラ」をご覧ください。
また、不明な点は電話でお尋ねください。

間に合わない？

1 「1980年代前半からの過去40年を10年単位に切り分けて見てみると、赤字の慢性化が2012年以降であるのがよく分かる」と言われている。すなわち、日本の貿易収支がすでに黒字体質ではなくなっているのだ。

「日本は先進国から脱落目前、2022年は歯止めの正念場」と野口悠紀雄氏は言う。「5月以降に株価大暴落、不動産バブル崩壊で一步間違えたら世界恐慌に」と森永卓郎氏は言う。

二人の経済予測は、他の経済ジャーナリストに比べ格段の確度を持っている。例えば、筆者の手元には、資料「原油バブルは近いうちに必ず崩壊する 2008年8月18日 経済アナリスト 森永卓郎氏」がある。そこには、「原油の製造原価は、1バーレル＝3ドルといわれている。昨年初めの価格である50ドルで売ったとしても、47ドルものもうけが出る。それが150ドル近くにまで暴騰したのだから、これはバブルとしか言いようがない。」とあった。そして、「NY原油、87ドル台に急落 8カ月ぶり90ドル割る 2008年10月7日6時38分」となった。

筆者は経済やその他の社会のことについて、全くの無知であり、景気予想などについては何ら独自の見解があるわけではない。しかし、例えば多くの経済評論家の株価についての予測は、二人の予測と全く異なっており、政府の経済政策は、少なくとも表面的には、その二人の予測とは全く違う予測を基に進められていることを知っている。

1991年のバブル崩壊が始まるまで、大手銀行系のシンクタンクに属していた高名な経済評論家は、高度に発達した資本主義では、バブルあるいはバブル崩壊などありえない、と何度も主張していた。今も鮮明に記憶しているが、氏はNHKのテレビに出演し、部分的な「プラトール」があるだけだ、と言っていた。筆者はその真意あるいは正確な用語を聞き取ったわけではないが、しかし、バブル崩壊後、氏は何食わぬ顔をして、ある私立大学の教授に取まっていたことには強い違和感を感じていた。

筆者には、この国の政治・経済・教育・福利厚生の方針決定が科学的根拠・合理性からどんどん離れている、としか考えられない。「新しい資本主義」はその代表だ。「資本主義」は、政治的な響きの強い言葉ではあるが、経済学の言葉でもある。ノーベル経済学賞は、他のノーベル賞と大きくその性質が違うが、経済に関する理論で大きな功績(影響)があった人に与えられる賞であることに変わりはない。現在まで、90名ほど(以前、数え方を間違っていた)受賞者がいるが、日本人は誰一人いない。そんな国の総理が「新しい資本主義」などお笑いの種にもならない。アベノミクスも同様だ。結果として近年まれにみる長期政権となったが、この国の経済は成長した、あるいは成長の土台ができたとは誰も言わない。

岸田政権は、菅政権の学会会議の推薦した会員候補の一部拒否を踏襲した。科学者による民主的な手続きによって選ばれた会員候補を科学の素人の総理大臣が拒否する正当な根拠はどこにもない。歴代の自民政権は科学者を代表する学会会議を無視し、政権の意向を反映しやすい科学技術庁を文部省の外に設置した。しかし、そこで打ち出された原子力政策

(原子力商船サバンナ号、動燃)をはじめとする各種のプロジェクトはことごとく失敗した。現在は、科学技術庁は、文部科学省に属するが、科学者の意見が反映されにくい制度であることに変わらない。

近年、失敗に終わった動力炉・核燃料開発事業団(動燃)の高速増殖炉開発の経験は、米国の高速増殖炉開発に寄与できる部分がある、と言われるようになった。あらゆる失敗という事実も、貴重なデータであることに変わりはない。

それでは、いずれかの野党勢力が政権を担うようになれば合理的・科学的な政策遂行が実施されると期待できるのだろうか。

国民の多くは、一時的には、民主党政権に多くの夢を託そうとした。しかし永年の保守政権の下で力をつけた官僚たちの抵抗あってあえなく崩壊した。民主主義は政治にとってもっとも重要なことに変わりはない。しかし、それを支える科学的合理性が担保されなくてはいずれ破綻する。独裁国家においても、科学者・技術者を十分政権の近くに置いておかねば、脆いものとなる。この国は、あらゆる方面で停滞・閉塞を来している。パンデミック、SDGs、安全保障のどれ一つをとっても、この国の科学技術力の向上は喫緊の課題となっている。

権力に科学的合理性を担保するような構造を政権構造の中に付与しておかねば、成長と安心・安全な国民生活は得られない。特に、多面的なグローバル化が進んでいる現代社会では、民主主義と科学的合理性は一体のものである。

まとめて言えば、この国の科学的合理性の弱体化、この国の科学技術力の後退が、この国の全面的後退の直接的原因であり、その原因は教育レベルの後退にある。

現状の教育、即興力を目標とした教育では、この国の後退は避けられない。現代が強く要請する「知的創造的能力」に向けての教育に全面的に転換しなければ、この国の若者の将来はない。教育改革は主要には教育内容・教育レベルの改革である。『春夏秋冬』で、これまで数々の提案を行ってきており、今後もそう主張するつもりだ。しかし、教育内容についての反応さえ、ほとんどない。積年の教育の後遺症がそうした面でも現れる。

もはや猶予はない。できるどころ、できる人から、「知的創造的能力」に向けての取り組みを始めなければならない。

図形から関数・グラフへ

『中学数学基礎』に準拠し、ユークリッド幾何学から文字式を用いる数学への発展の歴史的経緯に基づいて、中学数学でも、三角比・三角関数の導入が不可避であることを主張する。一部の中高六年一貫校では、かなり昔から中学生に三角比を教育していた。次回には、当塾の『中学数学発展』に基づいた三角比・三角関数を書く予定にしている。

1 放物線 $y = ax^2$ を描く

グラフ用紙で各 x に対する y をプロットしておよそのグラフが描ける。連続的にはどうしたら描けるだろうか。ボールの表面に墨を塗り、斜めに

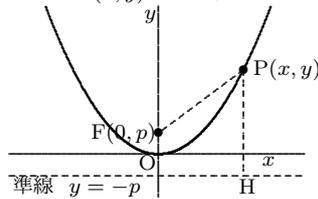
傾けた平板に斜め上方に初速度を与えて転がすと、平板に放物線状の軌跡が描ける。コンピュータでは簡単に描けるが、それは (x, y) の点をプロットしているのと同じである。連続的な曲線を正確に描こうとすれば、放物線の基本的な性質を少し学習しておかねばならない。

図のように、一つの直線 $y = -p$ (これを準線という) と定点 $F(0, p)$ (これを焦点という) からの距離が等しい点を $P(x, y)$ とする。すなわち $PF=PH$ である。

$$y + p = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

両辺を平方して整理すると

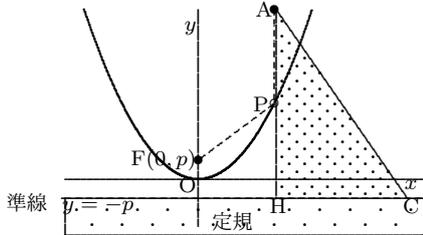
$$4py = x^2, \quad (y = \frac{1}{4p}x^2)$$



が得られる。これは $y = ax^2$ とすると、 $a = 1/4p$ に相当する。したがって、放物線は直線と定点からの距離が等しい点の集まり (軌跡) と言える。

この性質を用いると放物線は簡単に描ける。

はじめに、準線に定規を当て、三角定規 AHC の直角をはさむ2辺を y 軸と定規に合わせる。点 A と点 F を両端とし、 $AP+PF=AH$ に合わせて糸の長さを調節する。点 F にはまち針をたて糸を結ばばよいし、点 A ではゼロテープなどで三角定規に糸を固定すればよい。図のように三角定規を定規にそって滑らし、糸に鉛筆を掛け、三角定規の辺 AH から離れないようにして鉛筆を滑らせば放物線が描ける。



一人では困難だから2人で協力してやってみよう。しかしユークリッドの『原論』を基礎とした中学の図形では、これは「作図」とは言わない。作図とはあくまで定規とコンパスで有限回の操作によって描くことを言う。したがって数学的には放物線を作図できたことにはならない。一般の角の3等分線が作図できない、ということと同じ論理である。

2 全ての放物線は相似であることを確認する。

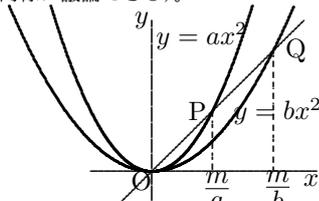
2つの放物線を $y = ax^2, y = bx^2$ ($a, b > 0$) とする。

原点を通り、傾き m の直線と2つの放物線の交点を P, Q とする。

$$OP:OQ = \frac{m}{a} : \frac{m}{b} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

となり、2つの放物線は原点 O を相似の中心とする相似の位置にある。

$y = bx^2$ は $y = ax^2$ を a/b 倍した図形になっている (a , あるいは b が負の場合も同様に議論できる)。



また、点 P と点 Q は相似の位置における対応する点だから、それぞれの放物線の接線の傾きは等しく ($= 2m$)、平行となる (2の議論の後、各自確かめておいてください)。

$y = ax^2$ 上の $x = x_1, x = x_2$ の2点を結ぶ直線の傾き (変化の割合) は

$$m = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) \text{ である。}$$

この式は2乗に比例する関数についての公式であり、二次関数にそのまま適用できるのではないから注意が必要である。2乗に比例する関数の2点を通る直線の傾きは常時必要になるから、これは公式として覚えておいたらよい。時間の節約になる。

しかし、もっと大事な応用がある。

x_2 が x_1 にどんどん近づくと直線は $x = x_1$ における接線に近づく。したがって、 $x = x_0$ における接線の傾きは

$$m = 2ax_0$$

となる。

また x_0 を $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, すなわち x_1, x_2 の中点にとると、接線の傾きは $x = x_1, x = x_2$ を通る直線の傾きに等しくなる。

また、 $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ とすると、 $x = x_1, x = x_2$ における変化の割合 $a(x_1 + x_0)$ と $x = x_0, x = x_2$ における変化の割合 $a(x_0 + x_2)$ との平均は $2ax_0$ となり、 $x = x_0$ における接線の傾きになる。等加速度直線運動 (たとえば自由落下) の場合、平均の速度や、瞬間の速さを表す。したがって瞬間の速さは前後する同じ時間幅の平均の速さの平均になっていることになる。

一般の二次関数に上の点 $P(x_1, y_1)$ における接線の式は、グラフの頂点を原点に移動し、点 P に対応した点 Q での接線の式を求め、これを元のグラフに平行移動してもとめることができる。

しかし、こんなことをやる必要はなく、高次関数でも、2乗に比例する関数に用いたと同様な方法を適用することができる。すなわち、有理整関数 ($f(x) = ax^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_1x + a_0$) の“微積”を中学で学ぶことに、何の困難もない。

たとえば、 $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の場合、 $x = x_1$ と $x = x_2$

$$\begin{aligned} \text{における変化の割合 } m \text{ は,} \\ m &= \frac{(ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) - (ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2^3 - x_1^3) + b(x_2^2 - x_1^2) + c(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + b(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + c(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= a(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + b(x_2 + x_1) + c \end{aligned}$$

ここで x_2 を限りなく x_1 に近づければ、 $m = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c$ となる。

まとめると、

$$y = ax^2 + bx + c \text{ の } x = x_0 \text{ における接線の傾き } m = 2ax_0 + b$$

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \text{ の } x = x_0 \text{ における}$$

$$\text{接線の傾き } m = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c$$

この式は、三次関数の極値を求めるところで用いる。

その他の重要な二次関数の性質は、『中学数学基礎』を参照されたい。

3 平行移動

変化の割合が一定でない関数 (曲線) を考えるとき、重要な役割を果たす定理がある。

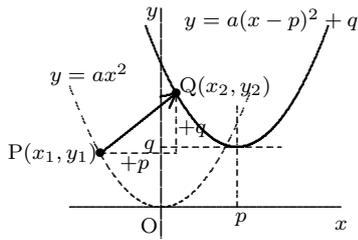
$$y = a(x - p)^2 + q \text{ のグラフは、} y = ax^2 \text{ のグラフを } x \text{ 軸方向に } p, y \text{ 軸方向に } q \text{ だけ平行移動したグラフである。}$$

したがって、頂点の座標は (p, q) である。

これは、次のようにして理解できる。

$y = ax^2$ 上の点を $P(x_1, y_1)$ とする。点 P を x 軸方向に p , y 軸方向に q だけ平行移動した点を点 $Q(x_2, y_2)$ とすると $x_2 = x_1 + p, y_2 = y_1 + q$

となる。 x_1, y_1 は $y_1 = ax_1^2$ を満たすから、 $x_1 = x_2 - p, y_1 = y_2 - q$ を代入して、 $y_2 = a(x_2 - p)^2 + q$ となる。すなわち、点 Q は $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ上の点である。これはほとんど自明であるが是非理解しておいてほしい。



繰り返して要約すると、 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したグラフは $x \rightarrow x - p, y \rightarrow y - q$ の置き換えを行ったグラフである。

グラフの平行移動の考えは、指導要領の中学数学では明確には導入されない。

二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は常に

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a}$$

と変形できるから、1変数の二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{b}{2a}$ 、 y 軸方向に $\frac{4ac - b^2}{4a}$ だけ平行移動したグラフである。すなわち、放物線の頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ である。

〔問題〕 次の二次関数が表す放物線の軸の方程式と頂点の座標を言え。

(1) $y = 2x^2 - 3x + 4$ (2) $y = -2x^2 - 4x - 5$

(1) $x = \frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$ (2) $x = 2, (2, 3)$

変化の割合が一定でない他の例は反比例を表す関数 $y = \frac{a}{x}$ であった。反比例のグラフが双曲線であることはよく知っている。次の問題を解いて、グラフに表してみよう。

「 $y - 2$ が $x - 3$ に反比例し、 $x = 4$ のとき、 $y = 8$ とする。 y を x の式で表せ。また、そのグラフを書きなさい。」

$y - 2$ が $x - 3$ に反比例するから、求める関数を

$$y - 2 = \frac{a}{x - 3} \quad \text{とおく。}$$

$x = 4$ のとき、 $y = 8$ より、

$$8 - 2 = \frac{a}{4 - 3}, \quad \text{したがって、} \quad a = 6.$$

$$\text{よって } y - 2 = \frac{6}{x - 3}, \quad y = \frac{6}{x - 3} + 2.$$

グラフは $y = \frac{6}{x}$ を x 軸方向に $+3$ 、 y 軸方向に $+2$ 平行移動したものになっている。レンズの公式を思い出そう。

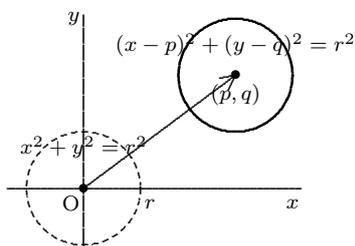
原点を中心とし、半径が r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2$$

また半径 r 、中心が (p, q) の円は

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

である。これは、元の方程式で、 $x \rightarrow x - p, y \rightarrow y - q$ と置き換えた式になっている。上の2つの例、2乗に比例する関数の場合も、反比例の場合も同じようになっている。



〔問題〕 x 軸に接し、中心が $x = 3$ の直線上にある半径2の円の方程式を求めよ。

答え $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

再度、以上のことをまとめると、

関数 $f(x, y) = 0$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q 平行移動したグラフの方程式
 $f(x - p, y - q) = 0$

ここで、関数 $f(x, y) = 0$ の表現は、たとえば、 $y = 3x^2 + 2x + 4$ などの二次関数の場合、 $y - (3x^2 + 2x + 4) = 0$ と表せる。したがって、 $f(x, y) = y - (3x^2 + 2x + 4)$ と置いたものに対応する。 y が x の関数であるとは、定義域の x を与えたとき、 y がただ一つ決まることを言う。したがって、 $f(x, y) = 0$ を y について解いた式があるはずであり、今の場合それが $y = 3x^2 + 2x + 4$ ということである。

一例をしめす。

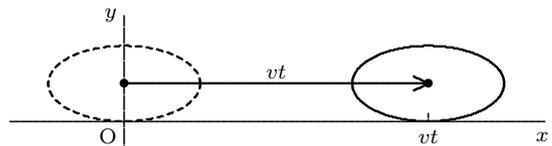
$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} - 1 = 0$$

は、長軸 a 、短軸 $b (a > b > 0)$ の楕円が原点の上に乗っている

グラフとなる。この時、

$$\frac{(x - vt)^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} - 1 = 0$$

は、上の楕円が x 軸に接しながら、速度 v で進んだ時の時刻 t の楕円を表す。



『中学数学基礎』では、点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線の式を、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ と表現する。これは、比例の式 $y = mx$ を x 軸方向に x_1 、 y 軸方向に y_1 平行移動したグラフの直線の式である。

4 対称移動

次に、1つのグラフの y 軸に対称なグラフは $x \rightarrow -x$ と置き換えればよいことはすぐわかる。すなわち、

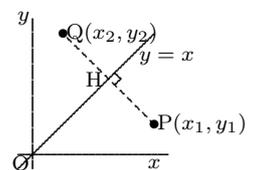
グラフ $f(x, y) = 0$ の y 軸に対称なグラフは $f(-x, y) = 0$ である。
 グラフ $f(x, y) = 0$ の x 軸に対称なグラフは $f(x, -y) = 0$ である。

$y = x$ に関して、点 $P(x_1, y_1)$ に対称な点を $Q(x_2, y_2)$ とすると、

$$x_2 = y_1, \quad y_2 = x_1$$

となる。

点 (x_1, y_1) が関数 $f(x, y) = 0$ 上の点とすると、 $f(x_1, y_1) = 0$ だから、 $f(y_2, x_2) = 0$ となる。すなわち、 $f(y, x) = 0$ のグラフは $f(x, y) = 0$ のグラフの $y = x$ に対称なグラフとなる。

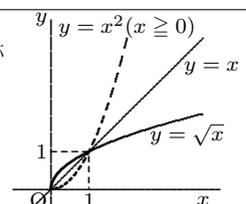


$y = x$ に関して、 $f(x, y) = 0$ のグラフに対称なグラフの式は $f(y, x) = 0$ である。

$y = x^2, x \geq 0$ の $y = x$ に関して対称なグラフの方程式は、

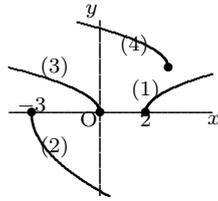
$$y = \sqrt{x}$$

である。



〔例題 1〕 次のグラフの概形を描け。

- (1) $y = \sqrt{x-2}$
- (2) $y = -2\sqrt{x+3}$
- (3) $y = \sqrt{-x}$
- (4) $y = \sqrt{-x+3} + 2$



〔例題 2〕 次の不等式を解け。

$$\sqrt{x+3} \geq x+1$$

$y = \sqrt{x+3}$, $y = x+1$ のグラフを描いてみる。共通な定義域は $x \geq -3$ 、値域は $y \geq 0$ である。

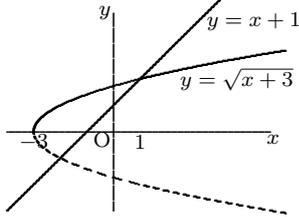
2つの関数のグラフの交点は

$$\sqrt{x+3} = x+1 \quad \text{両辺を平方して, } x^2 + x - 2 = 0$$

(両辺を平方すると, $\sqrt{x+3} = -(x+1)$ も方程式に含まれることになる。

これは、解の選択時に排除しなければならない)

$$(x+2)(x-1) = 0 \quad x = 1 \quad \text{従って, } -3 \leq x \leq 1$$



平面図形において、一般の直線に対する対称移動が簡単に記述できることは極めて重要である。なぜなら、全ての移動は対称移動の組み合わせで表現することができるからである。

一般の直線 $l: ax + by + c = 0$ に関して、点 $P(x_1, y_1)$ に対称な点を $Q(x_2, y_2)$ とする。

$$\text{直交条件より, } \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

PQ の中点が直線 l 上にある条件より、

$$a \times \frac{x_1 + x_2}{2} + b \times \frac{y_1 + y_2}{2} + c = 0$$

これを x_1, y_1 について解くと

$$x_1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x_2 - \frac{2ab}{a^2 + b^2} y_2 + \frac{2ac}{a^2 + b^2}$$

$$y_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y_2 - \frac{2ab}{a^2 + b^2} x_2 + \frac{2bc}{a^2 + b^2}$$

これを元の関数 $f(x, y) = 0$ に代入すれば、対称移動した点 $Q(x_2, y_2)$ が満たす方程式が得られる。ちなみに、以下の対応がある。

$$y \text{ 軸対称移動: } a = 1, b = 0, c = 0 \quad x \text{ 軸対称移動: } a = 0, b = 1, c = 0$$

$$y = x \text{ 対称移動: } a = 1, b = -1, c = 0$$

5 回転移動 ここからが、本題に入る。

原点の周りに、点 (x_0, y_0) を 45° 反時計回りに回転した点を $Q(x, y)$ とする。OP=OQ=r とすると、

$$x = OJ - KH = r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x_0}{r} - r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{y_0}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - y_0)$$

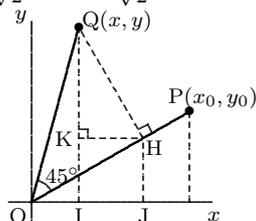
$$y = HJ + QK = r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{y_0}{r} + r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x_0}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + y_0)$$

x_0, y_0 について解くと

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y)$$

$$y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

となる。



$f(x, y) = 0$ のグラフを原点のまわりに反時計回りに 45° 回転したグラフの方程式は $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x+y), \frac{1}{\sqrt{2}}(-x+y)\right) = 0$ である。

〔問題〕 $f(x, y) = 0$ のグラフを原点のまわりに反時計回りに 30° 回転したグラフの方程式は $f\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y), \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y)\right) = 0$ である。

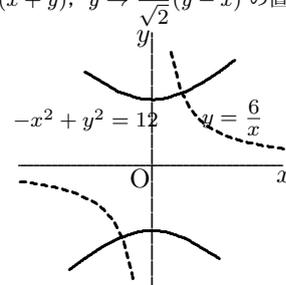
以下双曲線について議論する。

$$\text{反比例 } y = \frac{6}{x}$$

のグラフを原点を中心に 45° だけ反時計回りに回転すると

$$-x^2 + y^2 = 12$$

となることは理解できる (各 x にたいして、 y をプロットすればよい。ただし、1つの x にたいして、2つの y が対応することもあるから注意)。これは $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$ の置き換えによって実現できる。



直角双曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ を 45° 回転したグラフの式は

$$xy = \frac{a^2}{2} \quad \text{すなわち } y = \frac{a^2}{2x}$$

となる。 y は x に反比例し、比例定数が $\frac{a^2}{2}$ の場合に対応する。反比例のグラフは双曲線の種類であることがわかった。

6 ここまで読んで、読者は特異なことが起こっていることに気づかれたのではないだろうか。中学ではグラフの一般の回転を表すうまい「手だて」を持っていないから、回転は特別な回転角に対してのみ行うことができたのだ。その「手立て」が得られたのなら、一般の回転も式で表すことができることは容易に想像できる。

ただし、中学・高校では、回転は全て平面内の回転に限定する。三次元的な回転は、高校でも扱わない。平面内の回転(回転の軸は平面に垂直)とは異なり、三次元的な回転では回転の軸が変わり、回転の数学的表現は複雑となる。

図形の一般の回転角に対する表現には、三角比・三角関数の知識が欠かせない。即ち、図形の合同変換を数式で表すには、三角比・三角関数の学習が不可欠である。

紀元前 300 年ごろに書かれたユークリッドの『原論』は文字式が未だ発明されていない時代の数学史における金字塔である。基礎科学を確立したものとしてではなく、自分たちも進歩・発展させるものとして学ぶのなら、何よりもこの歴史的経緯を尊重・活用しなければならない。中学では『原論』のエッセンスを全て学ぶべきであり、図形の文字式を用いた学習においては、可能な限り合同変換、相似変換の表現を学ぶべきである。

一部の私立中学では、三角比がカリキュラムの中に取り入れられている。これは極めて合理的な処置である。次回では、回転移動に必要な最低限の三角比・三角関数の概略を『中学数学発展』を用いて展開する。しかし、当面、それを『中学数学基礎』に取り入れる予定はない。急激なレベルの高度化は、多くの中学生をとり残してしまう可能性が大きいからだ。『中学数学基礎』は、多数の生徒が直ちにこう学習すべきだ、という考えで書いている。