



今こそ、力をつける時だ!

地球温暖化対策・SDGsの目途も立たない内にコロナパンデミックが、そしてそれらが片付かない内にロシアの主権国家ウクライナへの侵攻と、次々と抜き差しならぬ事態が発生しており、日常的となったこの国の国際的地位の低下、生産力・労働の生産性の低下、科学技術力の低下について、堅実に考えることが非常に難しくなっています。しかし、どこかで、早急にこれを食い止め、起死回生の策を打たなければ、この国の再起は不可能な状況に進んでいます。即ち、この40年の間に打ち出された対策は、全て破綻しており、現在も日本の凋落は、日に日に進行しています。

『春夏秋冬』では、ことあるごとにその原因を指摘し、また直接小学高学年生、中学生、高校生への呼びかけも行ってきましたが、今のところ反応は一向に帰ってきません。

この国の教育の最大の欠陥は、現代が要請する主要な教育目標を「知的創造的能力の育成」に置くのではなく、大学入試や課題解決の「即興力養成」に置いていることです。人の知的能力は、例え一題の課題であっても、1時間や2時間で処理できるかどうかなどでは絶対に評価することはできません。現代が要請する主要な能力は、「知的創造的能力」であり、その検定は、それに応じた方法でしか評価できません。

知的創造的能力は、結果即ち「知的創造的能力」による実績でしか評価できません。いろいろ問題はありますが、通常はピアレビュー(査読)の確立した国際誌に掲載された科学論文の評価で確定されます。現在行われている入試や学力テストは、現代が強く要請する学力と全く異質な能力(即興力)を検定しており、そうした能力に向けた努力・教育政策が科学技術力の進展を大きく毀損しているのです。

近未来では、各種の自動化によって5割程度の労働がなくなると予想されています。ある経済評論家は介護・医療労働は増大する、と主張していますが、筆者は、逆に介護・医療労働こそ自動化は進む、と予想しています。未来予測は、近未来でも、曖昧さがあります。

この国の全方面での後退は、人口ボーナスの終焉(少子高齢化)の中での科学技術力の低下がもたらしたものです。その回復は、科学技術力の向上しかなく、そのためには、国民の「知的創造的能力」の向上しかありません。「即興力」の中身=技能(スポーツ, 芸術, 芸能, 特殊技能など)は多様であり、人それぞれに違った長期の訓練が必要なものもあります。大学学士課程を含む全ての学校は、各生徒がそれらにも時間的に参画可能なように、合理的な「知的創造的能力」の育成に向けた教育、制度の改善を行わねばなりません。「即興力」テストである入試や各種学力テストは、それに反しま

す。学校教育は、全ての生徒に、それぞれの能力と意欲に適切に対応した教育を提供する責任があります。

新年度に向けた多くの人たちの努力は、まるでこの国の沈下を加速する重しのように作用しました。「即興力」を公言する多くの私立六年一貫校や殆どの進学塾・予備校は、弱体化したこの国のカンフル剤のように作用しています。

今必要なことは、多くの若者に、国民生活を支える基礎体力、即ちますます必要とされる「知的創造的能力」の育成に向けた可能な限りの高度な基礎科学教育を万難を排して提供することです。日本の再生はこの道しか残されていません。共にがんばろう。

塾生募集中 募集中のコース

当塾のHPの最新の「折込ビラ」を見てください。
また、不明な点は電話でお尋ねください。

間に合わない?

1 『春夏秋冬 407号』では、次の言葉から書き始めた。「1980年代前半からの過去40年間で10年単位に切り分けて見てみると、赤字の慢性化が2012年以降であるのがよく分かる」と言われている。すなわち、日本の貿易収支がすでに黒字体質ではなくなっているのだ。

日本には、高度成長の間にため込んだストックである海外資産があるから、今も日本経済は強いと言う人もいる。しかし、その大半は、何時まで経っても一般国民の生活向上には使われなく、むしろ、格差の拡大と国内での労働の生産性を押し下げる要因となっている。

日本人の多くの労働は、現実にはその大半は技能労働で、その多くは自動化と競争状態にあり、低賃金に置かれ続ける。したがって逆にこの国では、あらゆる局面で、自動化が遅れる。労働の生産性はますます極めて低い状態に据え置かれている。

この国の科学技術の向上に対するモチベーションが極めて弱くなっているのだ。一部の人はそれでもやっつけていけるのだが、多くの国民は、貧困と下級労働を強いられる。筆者は、理系人間で、経済や政治について、本質的な議論を行う能力は全くないが、しかし、政府が、「大半の勤労者の賃金を上げよ」というのは、確かに「新しい資本主義」になるのだろうが、これは資本主義の原則に反するぐらいのことは分かる。そして、どこかの国と同じ様に、失業者を増やすだけだ。

賃金は、資本と労働のせめぎ合いの中で決まるのであり、そうだからこそそれを通して、企業は労働の生産性の向上・技術の向上の動機づけが与えられる。

概念として、「新しい資本主義」はベシクインカム抜きには存在し得ないことは、素人でもよくわかる。

未だに、全方位のこの国の閉塞・停滞・後退を否定する人たちが多くいる。バブルがはじけるまでは、この国は「経済は一流、政治は二流」と諺のように毎日言われていた。いまは、経済も完全に二流に落ち込んでいる。各種の経済政策、福祉政策が次々と提案・実施されたが、何一つ実のある成果を出したものはなし、結局は全て破綻してしまった。

政府は、「経済財政運営と改革の基本方針 2021」（2021年6月策定）において、骨太方針2018で掲げた財政健全化目標（2025年度の国・地方を合わせたプライマリーバランス黒字化をめざす、同時に債務残高対GDP比の安定的な引き下げを目指す）としているが、22年度予算には、その面影もない。第208回国会における鈴木財務大臣の財政演説（令和4年1月17日）では、「幾多の試練を乗り越えてきた日本が、克服できない困難はないと固く信じております。次の世代に未来をつなぐためにも、まずは今回の危機を乗り越え、経済をしっかりと立て直し、財政健全化に向けて取り組んで行く必要があります」とあるが、全く展望は見えず、コロナ禍に責任を転嫁しているだけの様に思える。

2 議論は飛躍するが、大多数の国民にとって、残された手立ては教育の抜本的改革しかないところまで追い詰められていることをしっかり認識しておかねばならない。にもかかわらず、最近の動向は、そうした認識が全く認められない。

教育関係では、N高等学校・S高等学校（通信制高校 広域・単位制）やインターナショナルスクールが注目を集めている。しかし、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の育成の立場から見ると、それらは全く現代の教育に値しないまがい物である。自然を相手にするにしろ、社会を相手にするにしろ、教育は、その対象に合理的に接する方法を身に付けさせることである。その対象から離れたところでデータ整理を行い、真実・法則性を見つけ出すことなどできない。「知的創造的能力」の獲得を目指す教育には、実験や調査は不可分である。「現実・事実を知る」という手続きが欠かせない。例えば理科の教育では、実験・製作（飼育・培養）・観察・資料の整理などが、授業の過半を占めなければ、「知的創造的能力」の育成とは絶対にならない。自然科学の最大の教師は、自然自身であり、それを補助するのが大学の学士課程を含む学校教育である。社会科学でも全く同様である。現実との接点を軽視した教育は、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の育成に、何の貢献もしない似非教育に過ぎないのだ。

筆者が最も尊敬したノーベル賞受賞の物理学者ファインマンは自らの多数の著、たとえば「御冗談でしようファインマンさん」の中で、自らは理論物理学者となったが、幼少のころから、如何に多様な実験・製作・観察を行ってきたかが書かれている。純粋の理論物理学者ではあっても、常に現実・事実と密着することなく、創造的な仕事はできないのだ。

インターナショナルスクールがあってはならない学校だ、とは考えないが、少数の人を除いて、少なくとも多くの日本

人がそこで学ぶ価値はほとんどない。そこで主張される国際感覚は、もしそれが必要だとしても、ネットを通じて修得できるものであり、ましてや四技能英語力などは、間もなく自動翻訳にとってかわられる可能性が強く、それによって遠隔・複数の人たちの間でもより正確なコミュニケーションがとれるようになるだろうし、英語を母語としない民族は、その世界を変えていく責務を負っている。

筆者は、40代の頃は、英語での読み書きに不自由したことはなく、共著ではあるが、国際誌に論文も書き、米国の学会で45分の論文講演も行った。一流の科学者は、極めてドライで、相手が拙い発音であっても、十分耳を傾け、遠慮なく質問もする。（後で書くが、講演の後、多くの人が筆者に話しかけてきた。しかし、筆者の身分は何だ、という質問には、答えに窮した。大学の嘱託講師で、間もなく非常勤となる身分だった。）

幼少の頃は、まだ米兵がうろちょろしていたし、中1で初めて学んだ英語の先生は、自宅から100mほどのところに住んでおられたクリスチャンで、時々教室へ牧師さんを招いて英会話をを見せてくださった。高校からは、NHKのラジオ講座（NHK朝ドラの「カムカムエヴリバディ」）や夕刻のNHK英語ニュース（60年安保闘争時、毎日“Prime Minister Kishi”など）はかなり長く聴き、大学生の間は、小遣いが許す限り西部劇を始めとした多くの洋画を観たり、1年間英字新聞も購読し、大学院生のときは1年間、雑誌The New Yorkerも購読し、またこれも1年間だけが抄録のアルバイトもした。だが、特別に会話を学んだことは一度もない。

しかし、歳とともにあらゆる能力、特に記憶力の低下に伴って、間違った漢字（当て字）、間違った英語のスペルが増加し、よく知らない分野の洋書が殆ど読めなくなってきた。

以前にも紹介したが、数年前アマゾンで購入した「the fuzzy and techie Why the Liberal Arts Will Rule the Digital World」（SCOTT HARTLEY）は、最初翻訳版が出版されるということで、予約したのだが、3か月ほどたって、断りもなくなく、ペーパーバックの原書が送られてきた。苦勞して十数ページを読んだ段階で、殆ど意味が読み取れていないことに気づき、そこで読むのを断念した。それ以降、専門分野も含めて新たな洋書の購入は行わないことにした。身の回りの断捨離を行っているが、何冊かを除いて、洋書はかなりその順位が高い。

科学技術の世界は、政治と違って、何より中身（その人の主張の創造性）が重要である。創造性は即興力とは真逆のベクトルである。個性やその人の属する地域の持つ多様性は創造性の最も重要な源泉である。他の人、他の民族、他の国を排除するのではなく、それぞれの個性・多様性を活かす工夫を行わねば、互いに創造的活動への貢献は少なくなる。

筆者のような冴えない人間でも、米国での共同研究の誘いはあった。前線で活躍している人は、数分で、相手の研究開発力を見抜く力がある。優秀な研究者・技術者のスカウトは、近年に始まったことではない。残念ながら、この国の研究開発条件が年々厳しくなり、そうした誘いが、顕著になった、というだけだ。

ロシアのウクライナ侵攻をはじめ、世界は極めて流動的になっており、個人は、ますます修得した「技能」だけで生き抜くことは難しくなりつつあることをしっかり自覚し、自らの優れた知的個性を磨いておかねばならない。

3 真理・真実は客観的なものだが、一方それに向かう原動力の一つは、間違いなく人々の持つ多様性である。日本語という一つの文化（母語）の中で育った人が基礎科学を日本語

以外で学ぶことは、その人の「知的創造的能力」の源泉の一つを放棄することに等しい。

日本人のノーベル賞受賞者は21世紀に入って世界で2番目に多くいるが、日本人で最初のノーベル賞を受賞した湯川先生をはじめとして、全ての日本人のノーベル賞の受賞者は、日本の大学で日本語で基礎科学教育を受けた人たちだ。ノーベル物理学賞を受賞した益川氏は、受賞講演を日本語で行った。しかし、二度と益川氏のような人は、この国から出てこなくて、識者の多くは、現状の教育・研究体制が続く限りノーベル賞受賞者は殆どでなくなる、と考えている。

「知的創造的能力」の育成を主要な目標とする基礎科学教育において、創造性の大きな源泉である多様性を否定する母語でない英語による教育は、一体何を狙っていると言えるのか。これは、即興力を目標とする受験教育、偏差値教育と何ら変わらない、愚民化政策(施光恒氏)そのものである。愚民化を推し進めて一体この国に何が残るといいのか。

最近になって、「文理の壁を超える」という話がよく話題になる(例えば朝日新聞 EduA 2月号)。確かに近年、科学的対応を必要とする多くの課題は、文系・理系の両面的な取り組みが必要な課題である。そして、多くの文系的な課題にも、数学的アプローチが必要となっていることが多い。そうした現実には、理工系の大学にリベラルアーツ教育を強化したり、文系の学生にAIやデータサイエンスを教育したりする大学が増えているようだ。

全く当然のことであるが、文系・理系を問わず、学士課程でできる限り高度な基礎数学を学習することは、極めて重要なこととなっている。どんな分野の科学であっても、数学は科学の言葉であり、分析とデザインにも欠かせない道具であるからだ。しかし、例えばAIやデータサイエンスなどは、データ処理の手法の寄せ集めのようなもので、未だ完全な数学的体系を十分整えてはいない。創造性教育の立場からは、まずもっと一貫性のある高度な基礎数学教育の先行を必要としている。これらを犠牲にして、学士課程の多くの人が、AIやデータサイエンスを修得させるような教育を受けたところで、何の役にも立たない。理系・文系を問わず、基礎数学を含む高度な基礎科学をしっかり身に付けることこそが、「知的創造的能力」の修得に最も重要なことと考えられる。

4 もう一つ、是非理解しておいていただきたいことは、自然にしろ社会にしろ、そこで成立している法則性には、必ず階層性があることだ。

基礎物理学、とくに非相対論的(第二量子化を含む)量子力学を十分理解することなく、物性や基礎化学・有機化学を理解することはできないし、基礎化学の理解なしに、基礎生命科学を理解することはできないし、基礎生命科学の理解なくして、医学や薬学の進歩は期待できない。

『春夏秋冬』では、何十冊もの文献の引用によって、この法則性を説明してきた。科学史は、社会の次元での「知的創造的能力」の獲得の法則性を示してきたのだ。我々は、そこから学ばねばならない。

筆者は、「科学の発見」(スティーヴン・ワインバーグ)、「宇宙を解く唯一の科学 熱力学」(ポール・セン)の科学史、また、「21世紀の資本」(トマ・ピケティ)、「底本 想像の共同体」(ベネディクト・アンダーソン著)の経済

学、これら以外の殆どの本は、この数か月の間に断捨離した。政治・民主主義に関わる全ての本は全て処分した。なぜなら、『春夏秋冬』で引用したすべての文献は、現在も入手できるはずだからである。

経済学に反するあらゆる社会政策は必ず破綻するはずだ。筆者は、専門外(本来、現在の専門家とは、国際的に評価される科学論文を書いた人を言う。)だから、その証明を行うことができない。

菅政権、岸田政権は、学術会議が推薦した会員の一部を拒否した非科学政権である。政策の合理性は保証されない。

階層性は、言い換えれば、どの分野の研究・開発も、その周りの分野の動向を注意深く観察・理解しながら、自ら設定した前線での研究・開発を行わねばならないことを意味する。したがって、当然のことながら、基礎科学の学習段階(少なくとも大学学士課程まで)では、学習の対象はかなり広く設定しておかねばならない。いわゆる「リベラルアーツ」と重なる部分が多いのではないかと考えている。

5 どれだけ多くの国民が、知的創造的活動で実績を出し、この国の生産性の向上、この国の民生の向上に貢献できるかに、単純な規則性があるとは考えられないが、これまで書いてきた事柄については、その必要条件として、なくてはならないものであるはずだ。

改めて主張するが、この国に残されたこの国の復興・再生・発展には、教育の抜本的改革、特に現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力の育成」に真摯に取り組む教育を実現するしか道はない。教育改革は、主要には教育内容の改革である。教育は入試や偏差値が表す「即興力」を目指すのではなく、それぞれの創造性が発揮できるような人に育てなければならない。個人が獲得した「知的創造的能力」は、ある程度の条件さえ整えば、この社会に数々の飛躍をもたらす。新しい価値を生み出す力もある。できることから、直ちに取り組むべきだ。

筆者は、生涯ただの一度も正規の雇用を受けたことがない。数社の企業や大学から、内定の連絡を受けたことがあり、理由はそれぞれ異なるが、筆者の判断で反故にした。結果として、僅かの論文も、そのほとんどは、残念ながら共著の形をとらざるをえなかった。

しかし、筆者がかかわった理学と工学の分野では、浅学の筆者でさえ、面白い課題、単独で解決できそうな課題は無数にあった。創造的な仕事には、不確実性が付き物だが、その実現には、時間的余裕と僅かだが資金が欠かせなかったのだ。

当塾のHPには、筆者の主な論文リストを示している。一つだけ単独で書いたものがあるが、それは筆者がただ一度、3年間、大学の非常勤ではなく「嘱託」の身分であった時のものだ。その中には、世界初の解析法や誰も気づかなかつたいくつかの関係式も導いている。4つの大企業は、その途上で開発したソフトを導入し、実績も上げている。21年もあとになって他の学会誌で引用もされた。現実には、理論的な研究であっても、肩書・各種の費用は必要となる。筆者は、理論物理学から30歳で工学の一分野、熱機関の研究に転向したときも、詳細は書けないが名前だけの京大の大学院の研究生とならざるを得ず、2年間授業料も払った。筆者は、学園紛争・貢献度をめぐるトラブル・その他(個別の学会は、必ずしも常に真理・正義を代表しない)で理学や工学の博士の学位を取得せず、ポストも得ず、孤立と

貧困に喘いでいたが、信頼のできる複数の友人が折れそうな筆者の心を支えてくれた。そうした経験を通して、中等教育の「科学教育」の教師には、学位や免許ではなく「知的創造的能力」の実績のある人を採用し、教育ノルマを週2日ぐらいに限定し、残りの時間は自らが定めた科学の frontline に全力を投入する、というアイデアを提唱することとなった。この国の「知的創造的実績」は飛躍的に伸び、この国の民生と安全保障に大きく寄与できる。

『春夏秋冬』では、過去、数々の提案を行ってきた。残念ながら、未だ、適切な反応は見られない。連日のごとく、各種の「即興力」対策の宣伝が行われている。そんなことを続けているでは、毎日12時間を超える拘束をかける中等教育を行っているいくつかの国には、何をやっても負けるに決まっている。科学教育は、科学的にやらねばならない。

三角比・三角関数

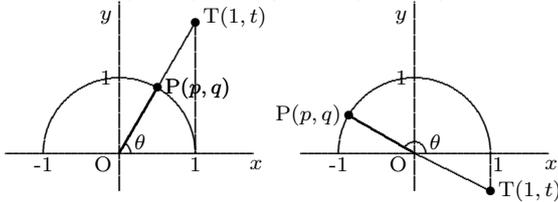
このメモを、中学の学習を完結するために追加すべきものとする。過去の当塾の中学生の一部は、高校数学の一部である三角比・三角関数を学習してきたが、それは、市販の教材をテキストに用いていた。しかし多くの生徒が「知的創造的能力」を身に付けねばなくなりつつある現代、今や、三角比・三角関数は、『春夏秋冬 407号』で書いた通り、中学数学・理科の学習に欠かせなくなりつつある。以下の内容は、『中学数学発展』(非公開)の一部である。

1 三角比と三角形

多角形の頂点の角の大きさは、頂点の記号 A, B, \dots など、一般には、ギリシャ文字、主に α, β, θ など、単位は度数法を用いる。 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の時、三角比は単位円を用いて、以下のように定義する。

$$\sin \theta = q, \quad \cos \theta = p, \quad \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta} = t \quad (\theta \neq 90^\circ)$$

それぞれを正弦(サイン)、余弦(コサイン)、正接(タンジェント)という。



$$0^\circ \leq \theta < 90^\circ$$

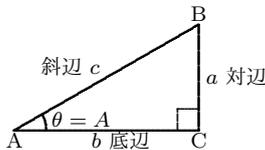
$$90^\circ < \theta \leq 180^\circ$$

この定義は、 $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の場合、直角三角形を用いた定義と一致する。

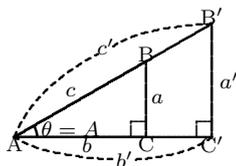
$$\sin A = \frac{\text{対辺}}{\text{斜辺}} = \frac{a}{c}, \quad a = c \sin A$$

$$\cos A = \frac{\text{底辺}}{\text{斜辺}} = \frac{a}{c}, \quad a = c \cos A$$

$$\tan A = \frac{\text{対辺}}{\text{底辺}} = \frac{a}{b}, \quad a = b \tan A$$



図において、 $\triangle ABC \sim \triangle AB'C'$ だから $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}, \frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}, \frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$ したがって、三角比は、直角三角形の $\angle A$ のみに依存する。



図形の学習からすでに知っている代表的な角度に対する三角比は下表にある。他の任意の角に対する値は以下の公式を用いて角度が $0^\circ < \theta < 90^\circ$ の三角比で表せる。近似値は電卓(スマホ)で簡単に求めることができる。学習が進めば、その近似値も、必要な精度で求める事ができる。

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
45°	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

図より、 $\sin(90^\circ - A) = \cos A, \quad \cos(90^\circ - A) = \sin A$ が得られる。一般に、 $0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ$ について、

$$\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta$$

$$\tan(90^\circ \pm \theta) = \mp \frac{1}{\tan \theta}$$

となる。また、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ について、

$$\sin(180^\circ - \theta) = \sin \theta, \quad \cos(180^\circ - \theta) = -\cos \theta$$

$$\tan(180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

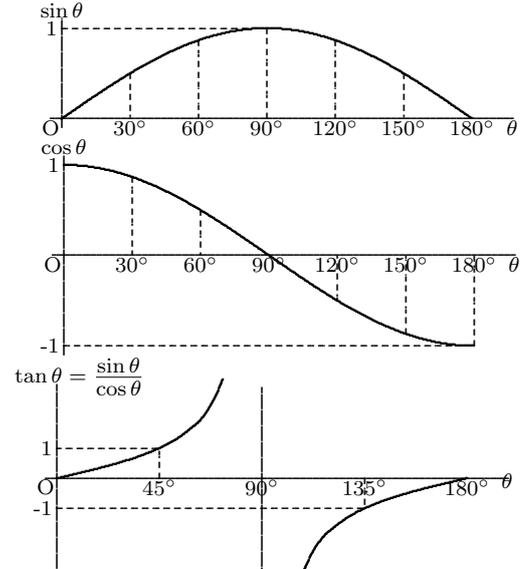
となる。

三平方の定理より、 $q^2 + p^2 = 1$ だから、定義から、

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \quad 1 + \tan^2 \theta = \frac{1}{\cos^2 \theta}$$

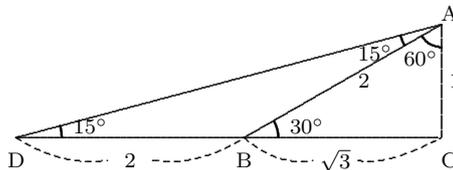
が得られる。ここで、 $\sin^2 \theta = (\sin \theta)^2$ のことである。

三角比のグラフを示しておく。



[例題1] 15° の正弦・余弦・正接を求めよ。

図より、 $AD^2 = CA^2 + CD^2 = 1^2 + (2 + \sqrt{3})^2 = 8 + 4\sqrt{3}$ によって $AD = \sqrt{6} + \sqrt{2}$



$$\sin 15^\circ = \frac{1}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 15^\circ = \frac{2 + \sqrt{3}}{\sqrt{6} + \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 15^\circ = \frac{1}{2 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}$$

これらは、後で学ぶ「半角の公式」を用いても計算できる。

[例題2] 次の角の正弦・余弦・正接を求めよ。

(1) 75° (2) 22.5°

$$(1) \sin 75^\circ = \sin(90^\circ - 15^\circ) = \cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$$

$$\cos 75^\circ = \cos(90^\circ - 15^\circ) = \sin 15^\circ = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

$$\tan 75^\circ = \tan(90^\circ - 15^\circ) = \frac{1}{\tan 15^\circ} = 2 + \sqrt{3}$$

(2) 図で $\angle DAC = 22.5^\circ$. $AB:AC = BD:DC$ より

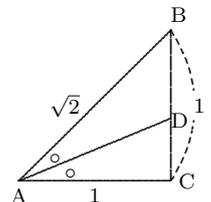
$$CD = \frac{1}{\sqrt{2} + 1} = \sqrt{2} - 1 \quad AD = \sqrt{(\sqrt{2} - 1)^2 + 1^2} = \sqrt{4 - 2\sqrt{2}}$$

よって、

$$\sin 22.5^\circ = \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}} = \frac{1}{\sqrt{4 + 2\sqrt{2}}}$$

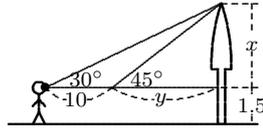
$$\cos 22.5^\circ = \frac{1}{\sqrt{4 - 2\sqrt{2}}}$$

$$\tan 22.5^\circ = \frac{1}{1 + \sqrt{2}}$$



ここでは省略するが、「半角の公式」を用いても計算できる。

[例題 3] 目の高さまでが 1.5m の人が木の梢を見ると仰角は 30° であったが、10m だけ近づくと仰角は 45° になった。木の高さは何 m か。



図のように x, y を定義すると、連立方程式

$$\begin{cases} (100 + y) \tan 30^\circ = x \\ y \tan 45^\circ = x \end{cases} \text{ が成り立つ。}$$

$$\tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}, \tan 45^\circ = 1 \text{ を用いて, } x = 5(\sqrt{3} + 1)$$

よって、木の高さは $(5\sqrt{3} + 6.5)\text{m}$ (約 15.16m)

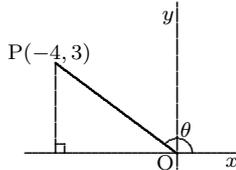
[例題 4] $\tan \theta = -\frac{3}{4}$, $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、 $\sin \theta, \cos \theta$ の値を求めよ。

$\tan \theta < 0$ より、 $\tan \theta$ のグラフ、あるいは右の図より、 $90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ 、したがって、 $\cos \theta < 0$

$$\frac{1}{\cos^2 \theta} = 1 + \tan^2 \theta = 1 + \left(-\frac{3}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{4}\right)^2, \quad \frac{1}{\cos \theta} = -\frac{5}{4}$$

$$\text{よって, } \cos \theta = -\frac{4}{5}$$

$$\text{また, } \sin \theta = \tan \theta \cdot \cos \theta = \left(-\frac{3}{4}\right) \left(-\frac{4}{5}\right) = \frac{3}{5}$$



[演習 1] $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の $\sin \theta, \cos \theta, \tan \theta$ の一つが与えられたとき、他の三角比を求めよ。

- | | |
|--|--|
| (1) $\sin \theta = \frac{3}{5}$ | (2) $\cos \theta = \frac{1}{3}$ |
| $(\cos \theta = \pm \frac{4}{5}, \tan \theta = \frac{3}{4})$ | $(\sin \theta = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \tan \theta = 2\sqrt{2})$ |
| (3) $\tan \theta = \frac{3}{4}$ | (4) $\cos \theta = -\frac{1}{2}$ |
| $(\sin \theta = \frac{3}{5}, \cos \theta = -\frac{4}{5})$ | $(\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}, \tan \theta = -\sqrt{3})$ |
| (5) $\tan \theta = -2$ | |
| $(\sin \theta = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \tan \theta = -\frac{\sqrt{5}}{5})$ | |

[演習 2] $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ のとき、次の方程式 (三角方程式) を解け。

- | | | |
|--|--|---------------------------------|
| (1) $\sin \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | (2) $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ | (3) $\tan \theta = -1$ |
| $(\theta = 60^\circ, 120^\circ)$ | $(\theta = 30^\circ)$ | $(\theta = 135^\circ)$ |
| (4) $\sqrt{2} \sin \theta = 1$ | (5) $2 \cos \theta + 1 = 0$ | (6) $\sqrt{3} \tan \theta = -1$ |
| $(\theta = 45^\circ, 235^\circ)$ | $(\theta = 120^\circ)$ | $(\theta = 150^\circ)$ |

2 余弦定理と正弦定理

余弦定理

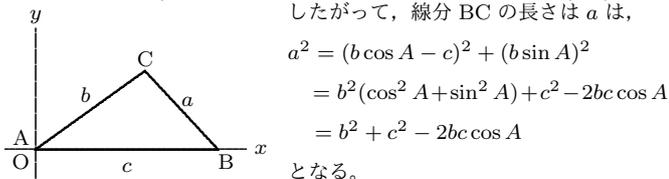
$\triangle ABC$ の三辺の長さを a, b, c とすると、

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

が成り立つ。これを余弦定理という。まずこれを証明する。

三角形の頂点 A を原点とし、直線 AB が x 軸の正の部分になるように座標を導入する。

点 C の座標は $(b \cos A, b \sin A)$ である。また点 B の座標は、 $(c, 0)$ である。したがって、線分 BC の長さは a は、



$$\begin{aligned} a^2 &= (b \cos A - c)^2 + (b \sin A)^2 \\ &= b^2(\cos^2 A + \sin^2 A) + c^2 - 2bc \cos A \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \end{aligned} \text{ となる。}$$

正弦定理

$\triangle ABC$ の外接円の中心を点 O とし、B を通る直径を BP、その長さを $2R$ 、辺 BC の長さを a とすると、

$$\frac{a}{\sin A} = 2R \quad \left(= \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} \right)$$

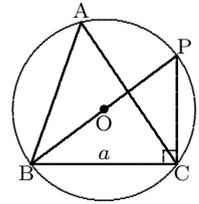
となる。これを正弦定理という。

証明は極めて簡単で、

$$\angle BAC = \angle BPC, \angle PCB = 90^\circ \text{ より,}$$

$$\sin \angle BPC = \frac{a}{2R}$$

$$\text{よって, } \frac{a}{\sin A} = 2R$$



3 一般角への拡張

これまでは、角度 θ は、 $0^\circ < \theta < 180^\circ$ に制限していたが、この制限を全て取り払う。

一般角の導入

まず、三角比の定義を、 $0^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ の制限を $-180^\circ \leq \theta \leq 180^\circ$ に拡張してもこれまでの議論で、どこにも不都合はない。したがって、

$$\sin(-\theta) = -\sin \theta, \quad \cos(-\theta) = \cos \theta$$

一つの角を α° ($-180^\circ < \alpha^\circ < 180^\circ$) とするとき、

$$\theta = \alpha^\circ + 360^\circ \times n \quad (n \text{ は整数})$$

で表される角度 θ を、一般角という。したがって、逆に、任意の一般角 θ について、

$$\sin(\theta + 360^\circ \times n) = \sin \theta, \quad \cos(\theta + 360^\circ \times n) = \cos \theta,$$

が成り立つ。

同様に、

$$\sin(180^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta, \quad \cos(180^\circ \pm \theta) = -\cos \theta$$

$$\sin(90^\circ \pm \theta) = \cos \theta, \quad \cos(90^\circ \pm \theta) = \mp \sin \theta$$

以上の三角関数の周期性・対称性をまとめる。

$$\begin{aligned} \sin(\theta + 360^\circ \times n) &= \sin \theta, & \cos(\theta + 360^\circ \times n) &= \cos \theta \\ \sin(-\theta) &= -\sin \theta, & \cos(-\theta) &= \cos \theta \\ \sin(180^\circ \pm \theta) &= \mp \sin \theta, & \cos(180^\circ \pm \theta) &= -\cos \theta \\ \sin(90^\circ \pm \theta) &= \cos \theta, & \cos(90^\circ \pm \theta) &= \mp \sin \theta \end{aligned}$$

4 三角関数の加法定理

加法定理の導出

$\triangle OAB$ に余弦定理を適用する。

$$AB^2 = OA^2 + OB^2 - 2OA \cdot OB \cos(\alpha - \beta)$$

が成り立つ。OA=OB=1 だから

$$AB^2 = 2 - 2 \cos(\alpha - \beta)$$

A($\cos \alpha, \sin \alpha$), ($\cos \beta, \sin \beta$) より、点 A, B 間の距離 AB は、

$$\begin{aligned} AB^2 &= (\cos \alpha - \cos \beta)^2 + (\sin \alpha - \sin \beta)^2 \\ &= (\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha) + (\cos^2 \beta + \sin^2 \beta) - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \\ &= 2 - 2(\cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta) \end{aligned}$$

である。したがって、

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos \alpha \cos \beta + \sin \alpha \sin \beta.$$

加法定理はカギとなる定理だから、別の証明も行っておく。それはトレミーの定理を用いる (トレミーの定理を知らない人は、『中学数学基礎』を参照されたい。当塾の HP にある)。

四角形 ABCD は、直径が AC = 1 の円 O に内接するとするとし、図のように、 $0 < \alpha, \beta < 90^\circ$ とする。

$\angle ADC = \angle ABC = 90^\circ$, AC = 1 より、

$$AD = \cos \alpha, \quad DC = \sin \alpha,$$

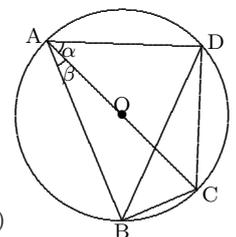
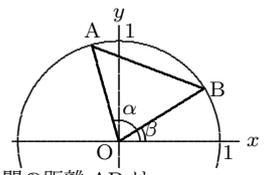
$$AB = \cos \beta, \quad BC = \sin \beta$$

$$\text{正弦定理} \quad DB = \sin(\alpha + \beta),$$

をトレミー定理 $AD \cdot BC + AB \cdot DC = AC \cdot BD$

に代入して、 $\cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta = \sin(\alpha + \beta)$

余弦定理を用いる方法では、 $0^\circ < \alpha < 180^\circ, 0^\circ < \beta < 180^\circ, \alpha > \beta$



の条件の下で行った。これを拡張する。

$\alpha < \beta$ ならば、

$$\cos(\alpha - \beta) = \cos(\beta - \alpha) = \cos \beta \cos \alpha + \sin \beta \sin \alpha$$

となり、成立する。

$\beta' = 180^\circ - \beta$ とおくと、 $0^\circ < \beta' < 180^\circ$ 。したがって、

$$\begin{aligned} \cos(\alpha + \beta) &= \cos\{\alpha + (180^\circ - \beta')\} = \cos\{(\alpha - \beta') + 180^\circ\} \\ &= -\cos(\alpha - \beta') = -(\cos \alpha \cos \beta' + \sin \alpha \sin \beta') \\ &= -\{\cos \alpha (-\cos \beta) + \sin \alpha (+\sin \beta)\} \\ &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

$-180^\circ < \beta < 0$ については、 $\beta' = \beta + 180^\circ$ とおいて、同様の計算をすると、上式が成り立つ。 α の $-180^\circ < \alpha < 0$ への拡張も同様に行え、上式は、 $-180 < \alpha, \beta < 180^\circ$ について成り立ち、結局全ての α, β について成り立つ。

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \cos\{90^\circ - (\alpha + \beta)\} = \cos\{(90^\circ - \alpha) - \beta\} \\ &= \cos(90^\circ - \alpha) \cos(-\beta) - \sin(90^\circ - \alpha) \sin(-\beta) \\ &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

以上をまとめると、

$$\begin{aligned} \sin(\alpha + \beta) &= \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta \\ \cos(\alpha + \beta) &= \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta \end{aligned}$$

(1) 高校で学ぶ三角関数うのエッセンスは以上が全てだ。ここでは、角度を度数法 (例えば 30°) で表してきたが、微積をはじめ数学的解析には、弧度法 (単位はラジアン) で表さねば非常に式が複雑となる。高校では、全てラジアンで表現することになる。

自然の法則、例えば『中学理科基礎』で書いている運動法則を表現するには、角度は弧度法を前提としている。

(2) 複素数を学んだあとならば、一般角についての加法定理を証明する最も簡単な方法は、一般の実数 x, y についての Euler の公式と指数法則

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x \quad e^{i(x+y)} = e^{ix} e^{iy}$$

を使えばよい。さらに、この式 (定義と見なす) と複素共役、 $e^{\frac{\pi}{2}i} = i$ 、 $e^{\pi i} = -1$ 、 $e^{2\pi i} = 1$ などを用いると、三角関数の周期性・対称性は、全て導くことができる。現実が要請する学力レベルの高校 (3年) 生には、いい演習問題となる。さらに三角関数に関心のある人は、筆者の大学講義ノート「フーリエ解析と偏微分方程式」(当塾の HP にある) を参照頂きたい。

(3) 2倍角の公式、3倍角の公式、半角の公式は加法定理から簡単に証明でき、応用上非常に役立つ。例えば、3倍角の公式は、「ユークリッド幾何学では、角の三等分はできない」ことの証明に用いることができる。

5 グラフの回転

いよいよ結論である。

点 $A(x_1, y_1)$ を原点の周りに θ だけ回転した点を点 $B(x_2, y_2)$ とする。点 A, 点 B を極形式で表す。

$$\begin{aligned} x_1 &= r \cos \alpha, \quad y_1 = r \sin \alpha \\ x_2 &= r \cos(\alpha + \theta) \\ &= r \cos \alpha \cos \theta - r \sin \alpha \sin \theta \\ &= x_1 \cos \theta - y_1 \sin \theta \\ y_2 &= r \sin(\alpha + \theta) \\ &= r \sin \alpha \cos \theta + r \cos \alpha \sin \theta \\ &= x_1 \sin \theta + y_1 \cos \theta \end{aligned}$$

これを x_1, y_1 について解くと

$$x_1 = x_2 \cos \theta + y_2 \sin \theta, \quad y_1 = -x_2 \sin \theta + y_2 \cos \theta$$

したがって、 $f(x, y) = 0$ のグラフを原点の周りに θ だけ回転したグラフの方程式は、

$$f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) = 0$$

となる。

平面上の任意の点の周りの回転は、まず、グラフをその点を原点に平行移動し、そこでの回転を行い、その後、その点まで平行移動でもどす、という手続きを行うことによって、常に可能となる。

『春夏秋冬 407 号』で扱ったグラフの回転に上の議論を適用して頂きたい。

(1) [問題] $f(x, y) = 0$ のグラフを原点のまわりに反時計回りに 30° 回転したグラフの方程式は $f(\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y), \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y)) = 0$ である。

(2) 反比例 $y = \frac{6}{x}$ のグラフを原点を中心に 45° だけ反時計回りに回転すると、双曲線 $-x^2 + y^2 = 12$ となる。

(3) 逆に、直角双曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ を 45° 回転したグラフの式は

$$xy = \frac{a^2}{2} \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{a^2}{2x}$$

以上によって、少なくとも平面内での合同変換、相似変換は全て数式で表現できるようになった。

たったこれだけのことだ。以上のことをすべてではなくとも大筋で理解できるようになる公立中学生はかなりいると考えられる。過去には、当塾の複数の中学生で、高校の2年生に提供される標準的な数学 (テキストは、高校の検定教科書と「チャート式」を使った) をクリアした生徒もいた。

近い将来、意欲と能力において優れたすべての生徒は、中3段階で、図形の合同変換、相似変換を式で表現できる教育が受けられるようにならねばならない。科学史 (科学の発展の実体) を基礎に、目標 (創造性教育) を明確にした一貫した教育は、多くの生徒の成長に大きく寄与すると確信するからだ。

現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の育成は、全ての人に、あるいは年齢的に画一的に教育する、ということを否定している。「知的創造的能力」の基礎となる基礎科学教育は、それぞれの教育を受ける側の条件に最適な教育を行わねば、その実績を保障することはできない。

中等教育においても、多様なカリキュラムを準備し、事前 (約半年前まで) にカリキュラムの詳細なシラバスを公開し、どの授業を受講するか判断は、受講指導 (や進路指導) は欠かせないとしても、最終的には、本人の責任において受講できるようにすべきである。「即興力」で人を分別するなど決して許さるることではない。

そのためには、地域に、中等教育 (中学・高校) は徒歩・自転車など自力で通える範囲に、大学 (学士課程) は自宅から通える範囲に、それぞれの生徒・学生が自らの意志で選択したカリキュラムを選べるように学校を設定すべきである。基礎教育は、地域が主体でなければならない。「知的創造的能力」の育成に向けて、教育の在り方を全面的に改革しなければならない。日本の再生はこの道しか残されていない。

「競争と選抜」の現在の教育制度は、「知的創造的能力」の育成の教育と相いれない。