



## 確かな先を見つめて

筆者が、「頭のよさとは何か」(2022/3/31)

中野 信子 (著), 和田 秀樹 (著)

を全く購入する気にならないのは、著者らの主要な主張がネットでも紹介されているからではありません。かつては、和田氏の教育に関する本を 20 冊以上も読みましたが、買わなくなった理由を、当塾の HP にある『春夏秋冬 285 号』(2012 年 1 月号) に詳しく書いています。受験参考書

「和田式要領勉強術 数学は暗記だ！」

受かる青チャートの使い方」

(大学受験合格請負シリーズ, 和田秀樹著)

において、和田氏は、比例式は  $k$  と置き、簡単な問題でもそれを使わなかったなら 1 時間かかっても上手く解けない、と主張していました。しかし、筆者は『中学数学基礎』でその問題を 15 秒程度で解けることを示していました。頭の良い人の陥りやすい欠陥です。また、天才と呼ばれる中野氏の頭の良さは万人の知るところです。

多くの場合、頭の良さは、入試偏差値や学力テスト、時には IQ テストなど、結局は「即興力」で評価され、言ってみれば、脳のハードウェアや脳に組み込み済みのファームウェアとしての評価に相当します。

その頭の良い二人が、「コンテンツの学力は役に立たない」、「情報より加工能力や応用能力が大事」、「知識量より、新しいことを思いつけるか」、「勉強法か情報か」、「知らない世界を探索してモノにする」、「学歴の高いバカ」、「『優秀な規格品』人材の時代は終わった」などと主張していました。表現はいろいろありますが、これらは筆者の主張する学力、すなわち「即興力」ではなく現代が要請する主要な能力「知的創造的能力」、と重なる部分がかかなり多くあります。徐々に、現代は、入試偏差値や各種学力テストなどで検定される「即興力」を求めているのではなく、人には AI などだけでは解決できない課題に応える知的創造的能力を要請している、と理解する人が増えてきました。

科学論文(知的創造的実績)の生産性は、その国の科学技術力のみならず、その国の労働生産性と極めて強い相関がありますが、入試偏差値や各種学力テストで検定される「即興力」(例えば PISA のスコア)との相関は殆どありません(「科学立国の危機」(豊田長康著)を読み返して下さい)。

既に解、あるいは解法が明らかになっている課題は、課題が少々複雑であったり、複数のステップを組み合わせた複合的な課題であったりしても、一つ一つの処方記憶にとどめ、当該の課題に組み合わせて適用すれば、解が得られま

す。こうしたことは、もともと AI が得意とする作業です。

人の「知的創造的能力」が欠かせない課題には、従来の合理的な判断ではありえないことや、人の「知」を拡張するなど何らかの「飛躍」が伴うはずで、人は、その人の個性を原動力として、困難にぶつかった時、「コペルニクス転回」を試みます。これは「飛躍」の一例です。データ解析を進めたとき、見かけの「矛盾」が現れたりします。データ解析には、従来では、合理的であると考えられている多くの仮定・暗黙の前提が含まれているからです。ここでも、人の関与が欠かせません。AI は、日々進化しています。何時の日にか、人の知的能力を超える(Singularity: 技術的特異点)日がやって来るかもしれません。初期のころは、2045 年ごろと言われていましたが、多くの予想では、まだまだやって来そうにありません。社会は、人には、堅実に「知的創造的能力」を獲得することを要請しています。これが現在が人に要請する主要な教育・学習の目標となっています。

多くの人は、この国の窮状に少しずつ気づき始めています。しかし、その合理的対処法について、まだ全く手が打たれていません。したがって、当面、まだまだこの国の「基礎科学 → 技術進歩 → 生産性の向上」の正循環が機能することはありません。現在も日々、間違いなくこの国の閉塞・停滞・後退は進行しているのです。

既に何度も記した通り、多くの「頭の良い人」は、自らの所与(頭だけでなく、経済面で)の好条件を活用し、「即興力」を鍛え、「競争と選抜の論理」に勝ち抜き、結局はそれなりに恵まれた人生を送ります。そうした人が多いほど、その社会は、急速に不安定化します。これが、ハーバード大学白熱教室 マイケル・サンデル教授の「実力も運のうち 能力主義は正義か?」(マイケル・サンデル著 鬼澤忍訳 早川書房 2021 年 4 月初版発行)の主要なテーマでした(参照:『春夏秋冬 404 号』)。マイケル・サンデル氏は、米国のように経済が成長している国でも、これは、社会の分断と停滞をもたらすだけだ、と断罪しています。

随分長く経済が停滞・後退を重ね、国の借金のうなぎのぼりの増大と物価高・円安が進行する中で、この国における「即興力」向上と「競争と選抜の論理」の貫徹は、極めて悲惨な結末を迎えるだろうことは、マイケル・サンデル氏を引き合いに出すまでもなく、浅学の筆者にも理解できます。

既に、現実にはこうした状況においても、各児童・生徒・学生とその保護者は、いかなる意思や選択を持ってばよいのか、よく考え、行動を起こすべきときに来ています。

後期高齢者の筆者だけでなく、頭の良い和田氏や中野氏も、「知的創造的能力」に近い教育・学習目標について語り

始めていたのです。教育制度については、「現代が要請する教育を！」の中で、少しだけ書きます。しかし、制度の改革は、遅々として進んでおらず、むしろ、逆向き（「即興力」強化の方向）の傾向が強まっています。

『春夏秋冬』では、殆どマスコミの受け売りですが、これまでも天才的な少年・青年を多数紹介してきました。現代では、ある意味、全ての人がそれぞれ自らが定めた分野でオンリーワンとなり、その創造的実績こそが、その国だけでなく人類の生産や福祉、文化に大きく貢献できるはずで、願わくば、近い将来、その創造的実績は、直ちに人類共通の資産となるようにしたいものです。

しかし、最近では、経済安保とか環境悪化を契機に、「創造的実績」の隠蔽・独占的利用の傾向も強まっています。日本が教育や研究で最先端を走れば、日本や日本人の利益になるだけでなく、「創造的実績」をオープンなリソースとして活用できる平和な世界に近づけることに貢献できる可能性も出てきます。山中伸弥氏らの iPS 細胞に関わる特許の公開は、間違いなく世界の平和に貢献しています。

ロシアのウクライナ侵攻は、平和を維持するには、力が必要であることを改めて示しました。しかし、その力は、軍事力や経済力から、少しずつ「知的リソース」に移行するのではないかと予感します。戦争専用の兵器は、行きつくところまで行ってしまっているからです。

確かな予測の中でしか、目標を語っても意味はありませんが、ますます人には、「知的創造的な能力」が必要とされる時代となっていることに間違いありません。ここから目を背けたあらゆる教育政策は必ず破綻する運命にあります。

---

## 現代が要請する教育を！

---

1 朝日新聞デジタル (2022 年 5 月 17 日) の記事、「老衰」する日本の資本主義

経済学者・諸富徹さんの処方箋

の中で、諸富徹氏は自らの見解を以下の様に表明した。

「世界の産業は、デジタル化やサービス化、グリーン化が進んでいます。経済の価値の中心はモノから情報・サービスへと大きくシフトし、資本主義は『非物質化』という進化を遂げているのです。それなのに、日本は今までにもものづくり信仰が根強く、産業構造の根本的な転換ができていません」

「二酸化炭素 (CO2) を 1 単位排出するごとに、経済成長の指標となる国内総生産 (GDP) をどれだけ生み出したのかを示す『炭素生産性』をみると、日本は先進国で最低水準です。成長率が低いうえ、その割に CO2 排出を減らせていないことを示しています。エネルギーを多く使いながら付加価値が低い、20 世紀型の製造業に依存しているせいです」

「いったん製造業で世界トップに立った記憶からか、自らの技術やものづくりへの過信と、新たに起きていることへの過小評価が激しくなりました。今までの延長線上で『良いもの』を作っていけば、いつか必ず売れる、というわけです。デジタル化でも脱炭素でも、世界でパラダイムシフト (考え方の大転換) が起きているのに気づけず、対応が後手に回ってきた。日本の資本主義は、老衰を起きているのではないのでしょうか」

「環境対策は、従来の商品のように、より美しいものや快適さを求める人間の欲求に応えるものではありません。確かにコストでもあります。しかし、山火事や洪水など、地球温暖化が人間の生存に関わる危機であると

いう兆候が、世界のあちこちで現れるようになりました。環境対策は人類の存続にとって根源的なニーズなんだ、という認識に変わりました」

「そのためエネルギーから交通、住宅、生活様式まで、幅広い社会経済システムが根本的に見直されていきます。再エネなど温暖化対策に役立つ製品やサービスは、技術革新を伴いながら、少なくとも数十年先まで必要とされる。ビジネスとして、ずっと引き合いが出てくるわけです。日本はそこに出遅れたのです」

「日本がずっとデジタル化の入り口でとどまっていたのは、プライバシー問題や、教育・医療にデジタル技術を取り入れることなどをめぐる慎重論が勝っていたからです。」

「経済活動が電子空間に移行する効果は、紙など資源の消費を減らせることだけではありません。例えばゲーム業界では、オンライン化によってリアルタイムで顧客の動きを把握できるようになり、より消費者の好みを反映した商品の開発に生かれます。単なる省エネ化・業務効率化の手段ではなく、顧客とデジタル技術で直接つながることで、新たな価値を創造する。日本の製造業も、サービス化へと大きくかじを切らなければ」

こうした考えは、諸富氏に限らず、ネットで調べると、むしろ現在の主流となっていることが分る。素人の筆者が、経済学者の諸富氏らが示す各種の指標や分析に反論できるはずはない。しかし、アンダーラインをつけたどの主張にも、筆者は納得できない。人は、最低でも 4 次元の時空の中で、生物として生存していかなければならない。生存に適した大気の温度・組成、放射能などに汚染されておらずしかも災害に対応できる大地、最低限の食糧・清浄な水など、いずれも「非物質」ではなく、生命体としての人間の將に物質的な「生存のための条件」を満たすことが前提となる。決して、「経済の価値の中心は、モノから情報・サービスへと大きくシフト」などしていない。

諸富氏は、「経済の価値の中心は、モノから情報・サービスへと大きくシフトし、資本主義は『非物質化』という進化を遂げている」と主張している。しかし、もしそうならば、「資本主義」は不可避免的に滅びる。食糧危機、苛酷化する自然災害、パンデミックなど待たなしに必ず襲ってくる。それらはいずれも「非物質化」によって、解決など絶対にできないからだ。それらに対応する基礎を提供するのは、物理学、化学、地学、生命科学、近年では情報科学などの基礎 (自然) 科学であり、その合理的で適切なやり方をこの社会に持ち込む方法が技術であり、社会科学はそれを支える。

現在の日本が深刻なのは、デジタル化やサービス化など形態ではなく、「先端産業の消滅と言っても良いほどの没落」(古賀茂明氏) である。

資本主義だろうと社会主義だろうと、あるいは付加価値が高かろうと低かろうとに関わらず農業や漁業は必要である。食料安保には最低限の自国の農業が不可欠であり、また最近では、現代の全ての生産に必要な半導体の最低限の自国での生産も不可欠である (しばしば、鉄や半導体は「産業の米」と言われる) ことが分ってきた。そうしたことは、いずれの社会であろうと、本質的には全く変わらない。

2 諸富氏の主張には、以下のようなものも含まれていた。

「製造業は本来、もっと人材や知的財産に投資し、工場もデジタル技術

を駆使した次世代型に革新しておくべきでした。また団塊の世代が抜ける前に、彼らのスキル（技能）を言語化して残しておく必要もありましたが、それも怠った。工場は古くなり、人は減らされ、ノウハウを持ったベテランはいなくなる。それなのに厳しい目標だけは現場に押しつけられる。検査を飛ばさなければ達成できないとなれば不正も起りえます」

「個々の労働者を政府が直接守る仕組みが貧弱なので、企業に補助金や助成金を出して、これまで通り雇い続けてもらうしかなかったのです。これなら失業率は低く抑えられますが、CO2を多く出したり生産性が低いままだったりする企業も温存されます。働き手も、新たなスキルを身につけるでもなく、飼育殺しになっている。コロナの2年間は、ほぼ既存の構造をピン留めしただけでした」

こうしたことは、歴史的事実として、多くの点で同意できるが、諸富氏の主張は、技術（テクノロジー）と技能（スキル）の意識的混用によって、現実の困難に対する正当な解決策を全く見失った主張のように感じられる。技術は、労働手段体系説にしろ意識的適用説にしろ客観的な存在であり、技能は獲得された個人的な能力を指す。「科学 → 技術」は、客観的な因果関係を表現している。そして、現代の多くの技能は、技術の基盤の上に成立している（勿論、そうでないものもある）。

環境対策は間違いなく「人類の存続にとって根源的なニーズ」であるが、食料の生産・獲得、人やモノ・情報の移動手段、快適な住宅、各種活動のための施設の建設・建造は、人類にとってより「根源的なニーズ」である。

諸富氏の「スキル（技能）を言語化する」とは、科学法則に基づいた客観的な技術化であり、ICTだろうとモノづくりだろうと、その多くは最終的には自動化する。

諸富氏の唯一の提案（処方箋）は、デジタル化に対する慎重論を克服し、「日本の製造業も、サービス化へと大きくかじを切れ」と言うものである。

6月7日、岸田内閣は、「新しい資本主義」の実行計画を閣議決定した。その中の産業政策・科学技術政策は、諸富氏の主張と重なる部分が多い。

3 随分回りくどく書いたが、「基礎科学 → 技術進歩 → 生産性の向上」の因果関係を無視したままでの、殆どすべての分野での生産性の向上はあり得ない。

先月号の『春夏秋冬』（410号）では、豊田長康氏が「科学立国の危機」（2019年2月14日発行）の中で、記した

「大学の教育研究力、イノベーションの量と広がり  
を促し経済成長に貢献する正循環モデル」  
に、中等教育・大学学士課程教育の「知的創造的能力の育成」を目指した教育のサイクルを付加することによって、「基礎科学 → 技術進歩」を含む生産性の向上の正循環を完成させることができることを書いた。もう一度、ノーベル生理学・医学賞受賞の本庶佑氏の言葉を記しておこう。

「アカデミアがシーズを生めば、長期的に、しかも桁違いの経済効果を生むことは歴史が証明している。基礎科学の発展こそ、大学における研究の使命である」

国民民主党は4月26日、教育・科学技術予算を増やすため「教育国債」の発行を可能にする財政法改正案を参院に提

出した。また、2017年ごろから、安倍元総理なども「教育の機会均等」の実現のために、不足している財源を補うため、「教育国債」の発行を主張していたようだ。

しかし、いずれも、研究費、時には教育費を倍額すれば、この国の科学技術力は増大し、生産性も著しく向上する、という前提に立っている。これでは何も解決しない。いくら「教育」に投資し、現状の様に（中野氏、和田氏が言う）「学歴の高いバカ」になるための教育を行っても、この国の科学技術レベルは向上しない。現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」に照準を当てた明確な教育戦略を持たなければ、豊田氏の「大学の教育研究力、イノベーションの量と広がり」を促し経済成長に貢献する正循環モデル」は機能しない。本来、教育も研究も、最大の費用は人件費である。下記のようにちょっと工夫すれば、教育・研究の人件費は大幅に削減できる。当然、少なくとも大学学士課程までは、全て無償とできる。当塾の提案を再度要約する。

(1) 「知的創造的能力」育成の教育は、僅かでも「知的創造的実績」を持った教師によってしかできない。中等教育、大学学士課程の教師の教育ノルマを週2日程度以内に制限し、残りの全ての時間を研究・開発的労働に従事させる。身分保障・生活保障は、教育ノルマだけで行う。

(2) 「知的創造的能力」の重要な要素の一つは、基礎科学を完璧な完成したもとしてではなく、進歩・発展の歴史（論理）の中で理解すること、二つ目には、各自の創造性の源泉は各自を特徴づける多様性・個性にある。同じことを学んでも、同じ現実に接しても、他の人とは異なる受け止め・理解ができる。自らの持つ多様性は感性とも言われ、それが合理性と結合したとき、創造性に発展することがある。

(3) 母語や地域は多様性の宝庫である。初等・中等教育は自力で通える距離に、大学学士課程の大学は自宅から通える距離に、当面理学教育においては（いずれ社会科学においても）それぞれの意欲と能力に応じた最適の教育コース・カリキュラムを開設する必要がある。

中等教育においても、半年前にはシラバスや講義要綱（参照：当塾のHPの「電磁気学メモ」「電磁気学講義詳細」）を公開し、受講選択の指導はあっても、最終的には受講者の責任において受講する、という形式にすればよい。「即興力」を検定する各種入学テスト、各種学力テストは、即刻全廃するべきだ。

(4) 現代の学校は非常に多くの、しかも重要な任務を持っている。教育レベルを向上させるためには、教師の任務を「知的創造的能力の育成」のみに絞るべきだ。高校までの部活は、クーポンなどを生徒に配布し民間に委託し、学校教育から解放すべきだ。

(5) 直ちに、一部のカリキュラムは、公・私、中・高・大の壁を越えて、多様な生徒・学生の要望に応えられるよう改革すべきだ。

現在の日本には、既に超一流の科学者・技術開発者は数少なくなっているかもしれないが、実績のある優秀な科学者・技術者は無数にいる。彼らに、一貫した「知的創造的能力」の育成を託し、その一方で、彼らの事務的負担を削減すれば、彼ら自身にもさらなる創造的実績を期待できるはずだ。工夫すれば、新たな人件費は殆どかからない。ビッグサイエンスには、莫大な資金が必要となるが、せいぜい国家に一組の、あるいは国際的共同の施設・設備を有効活用すれば、研究開発費を2倍にしなければ目標を達成できない、と言うほどのものではない。すなわち、研究開発で最もかかる人

件費を、創造性教育の基盤となる各種人件費で賄えば、一貫した創造性教育と高度な科学技術研究・開発のサイクルは十分機能する。

中等教育・大学学士課程教育(そこでの主要な教育内容は基礎科学教育)においては、社会は、人それぞれが、自らの個性・能力・ペースにしたがって、自らが希望する教育が受けられるよう体制を整えなければならない。平和な社会こそ、人それぞれが獲得した「知的創造的能力」を活用し、意義深い研究・開発や労働の生産性の向上に寄与できるし、研究・開発を苦役ではなく、多くの人の生きがいに転化できる。

## 創造性教育を！

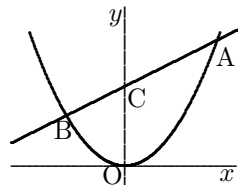
1 一例として、グラフ  $y = \frac{1}{2}x^2, y = x + 2$  の交点の座標を求めるとする。

交点の  $x$  座標は、 $\frac{1}{2}x^2 = x + 2,$

$$x^2 - 2x - 6 = 0, x = 1 \pm \sqrt{7}$$

よって、 $A(1 + \sqrt{7}, 3 + \sqrt{7}),$

$$B(1 - \sqrt{7}, 3 - \sqrt{7}).$$



これは、中3の2学期を終えれば、誰でもできる。確かに交点が存在し、その座標を求めることもできた。

しかし、一般の5次以上の関数のグラフを含む、グラフの交点を式で(陽に)表すことはできない。一般の5次以上の多項式からなる方程式は解の公式が作れないからだ。5次以上の多項式がかかわるグラフの交点については、見た目には交点があるように見えても、中学生は、確かに交点があると主張する根拠となる理論を持っていないのだ。

数学は、全ての主張を“ことば”で行う。各種の図・グラフ・絵などを補助手段として利用するが、その根拠は、“ことば”で明確にしておかねばならない。グラフで交点があるように見えても、数学では、確かに交点である、と証明しなければならない。

以下では、高校において、こうした課題に十分応える教育を行う必要性を訴える。学力の進捗は、生徒それぞれ多様であり、現代の主要な教育目標「知的創造的な能力」に応えるためには、それぞれの生徒の能力と意欲に十分に定めるカリキュラムを提供しなければならないはずだ。

2 中学数学では、例えば  $\sqrt{3}, 2 + \sqrt{2}$  などは無理数であることを証明するが、平方根を含まない無理数について、それが無理数である証明は一例たりともない。これは片手落ちだ。平方根を含まない無理数は、無数に存在する。

『中学数学基礎』では、ネピア数は、級数で表すことができ、その級数は、定理「有界な単調増加数列は収束する」を用いて収束することを証明している。そのうえで、ネピア数が無理数であることを証明している。

一般に、数列の収束については、『春夏秋冬 362号』(2018年6月号)で書いたような扱いをする。以下は、それにかかわる部分の再録である。

数列  $\{a_n\}$  は、 $n$  が大きくなるときに  $|a_n - \alpha|$  が限りなく小さくなる

( $\lim_{n \rightarrow \infty} |a_n - \alpha| = 0$ ) とき  $\alpha$  に収束するといひ、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$$

と記す。収束しない時に、数列は発散すると言う。

これを言い換えたのが、次の  $\epsilon - \delta$  式の収束の定義である。

任意の数  $\epsilon > 0$  に対して次の条件を満たす正整数  $N(\epsilon)$  が存在するとき、数列  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束する。  
 〈条件〉  $m > N$  である全ての  $a_m$  に対して、 $|a_m - \alpha| < \epsilon$

これが、実数(複素数でも同じ)の連続性に依拠した論理的に正当な定義であることはここでは述べず、その効用を述べる。

以下、「数学の視点」上野健爾著 東京書籍 に従って、展開する。

まず、上野氏が指摘する次の例がある。

[定理] 数列  $\{a_n\}$  が  $\alpha$  に収束すれば、

$$b_n = \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}, n = 1, 2, \dots$$

で定まる数列  $\{b_n\}$  も  $\alpha$  に収束する。

これは、以下のような  $\epsilon - \delta$  論法を使って、初めて証明される、と上野氏は書いている。

数列  $\{a_n\}$  が収束するので任意の  $\epsilon > 0$  に対して

$$n > m_1 \text{ であれば、} |a_n - \alpha| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立つように  $m_1$  を見出すことができる。このとき

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m_1}}{n} = 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{m_1 \alpha}{n} = 0$$

であるので、上の  $\epsilon$  に対して

$$n > m_2 \text{ であれば、} \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m_1}}{n} \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

$$n > m_3 \text{ であれば、} \left| \frac{m_1 \alpha}{n} \right| < \frac{\epsilon}{3}$$

が成り立つように  $m_2, m_3$  を見出すことができる。  $N$  を  $m_1, m_2, m_3$  のうち最大の整数とすると、 $n > N$  のとき、

$$\begin{aligned} |b_n - \alpha| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m_1} - m_1 \alpha + (a_{m_1+1} - \alpha) + \dots + (a_n - \alpha)}{n} \right| \\ &\leq \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_{m_1}}{n} \right| + \left| \frac{m_1 \alpha}{n} \right| + \left| \frac{a_{m_1+1} - \alpha}{n} \right| + \dots + \left| \frac{a_n - \alpha}{n} \right| \\ &< \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{n - m_1}{n} \cdot \frac{\epsilon}{3} < \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} + \frac{\epsilon}{3} = \epsilon \end{aligned}$$

が成立する。任意の  $\epsilon$  に対して  $N$  を見つけることができたので、 $\{b_n\}$  は  $\alpha$  に収束する。

以上より  $\epsilon - \delta$  論法を使えば確かに簡潔に証明できたが、上野氏が述べるように  $\epsilon - \delta$  論法を使わなければ証明できない、とまでは言えるかどうか、筆者にはわからない。

$\epsilon - \delta$  論法を使わなければうまく証明できないものは多数ある。例えば、高校数学では、次のような性質を利用する。

数列  $\{a_n\}$ , 数列  $\{b_n\}$  が収束して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \text{ とすると、}$$

$$(1) \lim_{n \rightarrow \infty} (ka_n) = k \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = k\alpha \text{ ただし } k \text{ は定数}$$

$$(2) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \pm \beta$$

$$(3) \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \alpha \beta$$

$$(4) \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} a_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} b_n} = \frac{\alpha}{\beta} \quad (\beta \neq 0)$$

即ち、高校数学にとって、これは定理である。しかし、いざこれを証明しようとする、なかなかうまく証明できないことに気づく。

なぜ証明が困難なのか、考えられたことがあるだろうか。広い意味で、「数学」で言う“演算”または“計算”とは、定義と公理に従って推論することだ。定理の証明は、その代表的な推論である。数学における“演算”や“計算”は、この広い意味で考える。「収束」を推論が可能ないように、言い換えれば、演算で推論できるように、定義しておかねばならない。とこ

ろが、「番号  $n$  を限りなく大きくするとき、 $a_n$  が限りなくある数  $\alpha$  に近づけば、数列  $\{a_n\}$  は  $\alpha$  に収束する」のままでは、演算を行うには不十分で、推論が進まない。そこで工夫されたのが、 $\epsilon - \delta$  式の収束の定義である。

$\epsilon - \delta$  式の極限の定理は、限りなく  $n$  を大きくすれば、限りなく  $\alpha$  に近づく、ということ数を数についての他の定義と公理・定理（連続性の公理から出てくる）を用いて表現している。したがって計算（推論）ができる。これに従えば、たとえば (2) は次のように証明できる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \text{ とする。}$$

任意の  $\epsilon$  に対して、 $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$  とすると、

$$\text{整数 } N_a \text{ が存在して、 } n > N_a \text{ ならば、 } |a_n - \alpha| < \epsilon'$$

$$\text{整数 } N_b \text{ が存在して、 } n > N_b \text{ ならば、 } |b_n - \beta| < \epsilon'$$

となる。 $N_a, N_b$  の大きい方を  $N$  とすると、

任意の  $\epsilon$  に対して、 $\epsilon' = \frac{1}{2}\epsilon$  とすると、整数  $N$  が存在して、

$$n > N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \epsilon', |b_n - \beta| < \epsilon'$$

となる。したがって、

任意の  $\epsilon$  に対して、整数  $N$  が存在して、 $n > N$  ならば

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \epsilon' + \epsilon' = \epsilon$$

したがって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

また、(3) も次のように証明できる。

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha, \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta \text{ とする。}$$

(2) と同じ様にして、任意の  $\epsilon$  に対して、 $\epsilon' = \frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|}$  とすると、

$$\text{整数 } N \text{ が存在して、 } n > N \text{ ならば、 } |a_n - \alpha| < \epsilon', |b_n - \beta| < \epsilon'$$

となる。 $\epsilon$  は十分小さいから、 $\frac{\epsilon}{1 + |\alpha| + |\beta|} < 1$  としてよい。したがって、

$$|b_n| - |\beta| \leq |b_n - \beta| < 1, |b_n| < 1 + |\beta|$$

したがって、

任意の  $\epsilon$  に対して、整数  $N$  が存在して、 $n > N$  ならば

$$|a_n b_n - \alpha \beta| = |(a_n - \alpha)b_n + \alpha(b_n - \beta)|$$

$$\leq |a_n - \alpha| \cdot |b_n| + |\alpha| \cdot |b_n - \beta|$$

$$< \epsilon'(1 + |\beta|) + |\alpha|\epsilon' = \epsilon$$

よって、 $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n b_n) = \alpha \beta = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$

(4) は数列  $\{\frac{1}{b_n}\}$  の収束を証明しておけば、(3) と同じである。

これらの証明は、 $\epsilon - \delta$  式の収束の定義を理解しておれば、誰でも十分理解できる。技巧的な表現が必要だから、自分でこれらをスマートに書き下すには、少々の訓練を要するが、上の証明を見て十分納得できれば、十分理解できた、と言える。そして、安心して、上の定理を利用できる。

(以上のことは、今やネットで調べれば、どこにでも書いてある。) 繰り返すが、 $\epsilon - \delta$  式の収束の定義は、実数の連続性に根拠を持っている。したがって、一貫した展開では、まず実数の連続性についての公理（デデキントの切断をはじめいろいろな表現がある）を定め、級数の収束性の議論は、そこから導かねばならない。 $\epsilon - \delta$  式の収束の定義は、実数の連続性の 1 つの結論でもあるのだ。その辺の事情の厳密な展開は、よく知られたものであるが、高校数学としては、話がかかり長い。

高校数学としては、「実数のコーシー列は収束する」を実数の連続性の出発点とすれば、どこにも不都合は生じない。

筆者は、およそ 60 年前、大学 1 年の秋深まったころ、古本屋で高木貞二著「解析概論」を見つけ、こうした実数の連続性にかかわる問題を学習し始めた。しかし、その本は戦前に出版されたものであり、漢字カタカナ交じり文で、読みにくかった。結局、平仮名表記の本を購入した。しかし、測度・ルベーグ積分はよく理解しないままに終わった。

3 続いて、『春夏秋冬 362 号』では、数の連続性の問題を取り上げている、

代数学の基本定理

複素数を係数を持つ方程式  
 $a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$   
 は複素数の根を少なくとも 1 つもつ。

これを認めると、

代数学の基本定理の系

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$   
 は重複度をこめて  $n$  個の根を複素数内にもつ。

また複素数を係数とする  $n$  次多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$$

は一次式の積に因数分解できる。

$$f(x) = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$$

代数学の基本定理の系の証明

代数学の基本定理より、

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

は、複素数の根  $\alpha_1$  をもつ。因数定理より、

$$f(x) = (x - \alpha_1)f_1(x)$$

と因数分解できる。 $f_1(x)$  は  $n - 1$  次式である。再度代数学の基本定理を用いて、

$$f_1(x) = (x - \alpha_2)f_2(x)$$

この操作を続けて、 $f(x)$  は  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$  で割り切れる。 $f(x)$  と  $(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_n)$  はともに  $n$  次式だから、 $n$  次の係数が等しい。以上

高校生に一つ注意しておいてもらいたいことがある。

多項式  $P(x)$  において、 $P(a) = 0$  を満たすだけなら、 $P(x) = Q(x)|x - a|$  や、 $P(x) = Q(x)\sqrt{x - a}$  もあり得る。しかし、 $|x - a|$  は整式ではなく、したがって、 $Q(x)$  も整式ではない。因数定理は、あくまで多項式の割り算の議論から出てくるもので、割る式が多項式であることを前提とした議論であることを忘れてはならない。

高校生もよく知っている次の定理が成り立つ。

定理

実数係数の方程式  $f(x) = 0$  が  $\alpha$  を根に持てば、 $\alpha$  の複素共役  $\bar{\alpha}$  も  $f(x) = 0$  の根である。

定理の証明

$$f(\alpha) = a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n = 0$$

が成り立つ。 $a_0, a_1, \dots, a_n$  は実数だから、

$$0 = \overline{f(\alpha)} = \overline{a_0 + a_1\alpha + a_2\alpha^2 + \dots + a_n\alpha^n}$$

$$= a_0 + a_1\bar{\alpha} + a_2(\bar{\alpha})^2 + \dots + a_n(\bar{\alpha})^n$$

が成り立つ。よって、 $\bar{\alpha}$  も  $f(x) = 0$  の根である。

これから、日常的に使う次の定理が得られる。

ガウスの定理

実数係数の  $n$  次多項式  $f(x)$  は実数係数の 1 次式と既約 (実数の範囲で因数分解できない) 2 次式との積に因数分解できる。

式で書けば、

$$f(x) = a(x - \alpha_1)(x - \alpha_2) \dots (x - \alpha_m)q_1(x)q_2(x) \dots q_\ell(x)$$

$$a \neq 0, q_1(x), q_2(x), \dots, q_\ell(x) \text{ は既約 2 次式}$$

その他多くの定理や計算が、代数学の基本定理を基礎に出てくる。

以下は、現代数学への入門「代数学入門」(上野健爾著 岩波書店 2004 年第 1 刷) に従う。

初めに、代数学の基本定理の準備作業を行う。

次の連続関数の性質を利用する。

1.  $|f(z)|$  は複素数  $z$  の (あるいは  $z = u + iv$  とおくと, 2 変数  $u, v$  の) 関数として連続である。

2.  $|z| \leq R$  (あるいは  $u^2 + v^2 \leq R^2$ ) で連続な関数は最小値を持つ。

まず, 次の [補題] を証明する。

[補題] 複素数  $\alpha \neq 0$  と複素数係数の  $n - k$  次多項式  $h(x)$  より定まる  $n$  次多項式  $g(x) = 1 + \alpha x^k + x^k h(x)$  を考える。 $k \geq 1$  かつ  $h(0) = 0$  であれば,  $g(x_0) < 1$  を満足する  $x_0$  が 0 の近くに存在する。

#### 補題の証明

$-1/\alpha$  の  $k$  乗根の 1 つを  $b$  とする。すなわち,  $b^k = -1/\alpha$  が成り立つとする。このとき,  $0 \leq t < 1$  を満足する実数  $t$  に対して,

$$\begin{aligned} |g(bt)| &\leq |1 - t^k + b^k t^k h(bt)| \\ &\leq |1 - t^k| + t^k |b^k h(bt)| \\ &= (1 - t^k) + t^k |b^k h(bt)| \end{aligned}$$

がなりたつ。 $h(0) = 0$  であり,  $|h(t)|$  は  $t = 0$  の近くで連続なので,  $\delta > 0$  を十分小さく選ぶと,  $0 \leq t < \delta$  では

$$|b^k h(bt)| < 1/2$$

が成り立つようにできる。したがって,  $0 \leq t < \delta$  では,

$$|g(bt)| \leq 1 - t^k + \frac{1}{2} t^k = 1 - \frac{1}{2} t^k$$

が成り立つ。

$$x_0 = bt, \quad 0 < t < \delta$$

ととれば,

$$|g(x_0)| < 1$$

いよいよ代数学の基本定理の証明だ。

#### 代数学の基本定理の証明

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n, \quad a_n \neq 0$$

の係数を考え,  $|a_0|/|a_n|, |a_1|/|a_n|, \dots, |a_{n-1}|/|a_n|, 1$  のうち最大のものを  $M$  とおく。また正の整数  $R > 2$  を

$$\frac{nM}{R} < \frac{1}{2}$$

が成り立つようにとる。すると,  $|x| > R$  の部分では

$$\begin{aligned} |f(x)| &= \left| a_n x^n \left( \frac{a_0}{a_n x^n} + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \cdots + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + 1 \right) \right| \\ &\geq |a_n x^n| \left( 1 - \frac{|a_0|}{|a_n x^n|} - \frac{|a_1|}{|a_n x^{n-1}|} - \cdots - \frac{|a_{n-1}|}{|a_n x|} \right) \\ &> R^n |a_n| \left( 1 - \frac{M}{R^n} - \frac{M}{R^{n-1}} - \cdots - \frac{M}{R} \right) \\ &> R^n |a_n| \left( 1 - \frac{nM}{R} \right) > \frac{1}{2} R^n |a_n| > |a_n| \end{aligned}$$

がなりたち,  $f(x)$  は 0 にならない。

一方,  $|x| \leq R$  では, 連続の仮定より  $|f(x)|$  はある複素数  $x = a$  で最小値を持つ。必要ならば,  $x$  を  $x + a$  に置き換えることによって, ( $g(x) = f(x + a)$  を考えることになる),  $a = 0$  であると仮定しても一般性を失わない。したがって,  $|f(0)| = |a_0|$  が最小値であるとしてよい。もし  $a_0 = 0$  であれば,  $x = 0$  が根であるので, この場合は定理は正しいから,  $a_0 \neq 0$  と仮定してよいことが分る。即ち,  $f(x)$  は

$$f(x) = 1 + a_k x^k + x^k (a_{k+1} x + \cdots + a_n x^{n-k}), \quad a_k \neq 0, k \geq 1$$

の形をしており,  $1$  が  $|x| \leq R$  での  $|f(x)|$  の最小値であると仮定してよいことが分る。[補題] を  $f(x)$  に適用すると,  $|f(x_0)| < 1$  を満足する  $x_0$  が存在する。これは  $|f(0)| = 1$  が  $|f(x)|$  の最小値であることに反する。し

たがって,  $|f(x)|$  は  $|x| \leq R$  で最小値 0 をとる。すなわち  $f(x) = 0$  は根を持つ。以上

代数学の基本定理の証明には, 実数の連続性と連続関数の性質を仮定すると, どこにも理解困難なところはない。むしろ, 高校 3 年生が実数の連続性の理解の必要性を認識する重要な契機を与える。

高校の教科書には, 「付録」という形が適切だと思うが, 「代数学の基本定理」の証明を必ず書いておいて頂きたい。多くの高校生がこの定理の証明を読むかどうかはわからないが, 数学に興味がある生徒ならば, 必ず読むと予想する。そして, 実数の連続性 (公理) を自分で調べ始めるのではないだろうか。

**4** 結局, **1** で提起した 5 次以上の多項式からなる関数を含むグラフの交点は, 実数 (あるいは複素数) の連続性の公理に基づく代数方程式の基本定理による解の存在の定理によって, 存在が保証された。

上の議論は, 多項式からなる関数に限定した議論だが, 任意の微分可能な 2 つの実関数のグラフの交点に近づく数列は (たとえば, ニュートン法によって) 簡単に作成でき, その極限として (数の連続性の公理より), 交点の存在を証明することができる。微分可能性は, 連続性より強い仮定だからだ。

以上の議論より, できるだけ多くの高校生には,  $\epsilon - \delta$  式の収束の定義と代数学の基本定理の証明を理解していただきたいものだ。

同様な議論は無数にある。例えば, 現在の理系の大学 1 年でのカリキュラムに含まれる基礎力学, 基礎熱力学, 基礎電磁気学の講義では, 基礎的な微積や線形代数の説明に非常に多くの時間を取られる。これ抜きには, 入門的な議論さえ不可能だからである。

基礎物理学の基礎知識なくては, 基礎化学や基礎地学の理解は不可能である。基礎生物学は, 基礎化学の知識なくして, 全く理解不能となる。現代の (科学の) 学習の主要な目標は, 既に解明済みのことを覚えておいて楽しむためではなく, 自らが「知的創造的実績」に貢献できる能力を身に付けることだ。

一例をあげる。我々が生きている時空は, 最低でも 4 次元である。したがって, 最低でも, 偏微分の基礎知識なくして, 基礎科学の学習などありえない。高校の段階で, できるだけ多くの生徒に偏微分の教育をやっておかねばならない。でなければ, 例えば「電波がなぜ真空中を伝播するのか」さえ理解しない機械系の技術者が大量に現れることになる。

現在が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」に向かう教育にとって, 最早, 中等教育の教育レベルを画一的に文科省が決定し, 画一的な「即興力テスト」で生徒を振り分ける現在の教育制度は, 完全に破綻していると言わざるを得ない。この国の科学技術レベルの低下を阻止するには, 中等教育及び大学学士課程教育の抜本的改革が不可欠である。地域, 年齢, 貧富その他のあらゆる状況に左右されることなく, 個人の能力と意欲に応じた基礎科学教育を無償で受けられる社会の早期の実現が望まれる。