



## かなり切迫しています

関西学院大学は、全てのカリキュラムを対面授業で行うことを決定したそうです。

現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の育成に向けての教育は、「確立した合理的処理法を修得し、限られた時間内で課題に応える」、即ち「即興力」養成の教育とは全く異質のものです。「即興力」養成、受験偏差値向上などを目標とした教育は、多分に「技能訓練」の様相を呈し、多くの場合、「知的創造的能力」向上の教育・学習とは対立関係にあります。

「知的創造的能力」向上の教育・学習では、どうしてこんな原理・理論が成立したのか、その必然性を科学史から学ぶこと自身が学習の重要なテーマの一つになります。さらに、どんな努力が、こんな斬新なあるいは飛躍的な理論に到達させたのか、も学ばねばなりません。自らが、科学技術の飛躍的発展の担い手になるかもしれないことを前提に学習するからです。

現代の学習の主要な目標は、確立した原理・理論を修得して、作為的(あるいは疑似的)に設定した課題に「即興的」に応えることよりも、現在の確立した原理・理論をさらに発展させるために行うものに変化しています。知的作業であっても、ルーチンワークで即興的に対処できる課題は、多くの場合、徐々にではありますが、日一日とAIやAIを装備したロボットのみで処理できるようになりつつあるからです。分野にもよりますが、大学学士課程までの主要な教育目標は、現代の基礎科学を歴史的で、しかもさらに発展させるものとして学習することです。

創造性教育は、自らの知的個性の覚醒の教育でもありません。同じ現実(事実)、理論、情報に接しても、各個人の感性は、他の人と異なる反応を示すことがあります。他の人の反応に接することは、自らの個性の開発・醸成に大きく貢献します。科学教育においてもディベートは極めて重要な役割を持っているのです。さらに、「春夏秋冬410号」では、本来、科学教育では、「実験・製作(飼育・培養)・観察(計測)・資料の整理などが、授業の過半を占めなければ、知的創造的能力の育成とは絶対にならない」と書いていました。

科学的認識の向上、「知的創造的能力」の獲得は、「教室」と言う一つのコミュニティ(地域社会は、一般的な視点では最も重要なコミュニティです)を通じて大きく進みます。創造性教育にとって、オンライン教育は、創造性の重要な源泉であるコミュニティの持つ多様性とのかわりを軽視する、あくまで補助的な教育であるに過ぎません。関西学院大学は、理由如何に関わらず、賢明な決断をしたと言えます。

未だに、「学力診断テスト」を公言する学習塾が多くあり

ます。彼らは、現代が主要に要請する教育目標「知的創造的能力」について一顧だにしません。受験偏差値向上の取り組みが、その児童・生徒・学生の「知的創造的能力」の伸長に重大な障害をもたらすことに、何の警戒心も持ち合わせていません。彼らの殆どには、各種入試が「必要悪」ではなく、「知的創造的能力」の重大な障害物であるとの認識が全くありません。知的創造的実績を持ったことがないから、理解できないのです。そうした人たちにとって、オンライン教育は、魅力ある教育であると映ります。

しかし、この国はそれなりの学歴社会(日本は既に高学歴社会ではなくなっています)ですから、どこにも、少数のそれなりの「知的創造的実績」を持った人がいます。そうした人がオンライン教育を推進しているとすれば、悪意に満ちたプロパガンダを行っていることとなります。ある程度オンライン教育も、教育の機会均等に貢献する手法のはずですが、それを特定の生徒に施し、「(即興力)検定である)入試などにおいて、獲得された即興力を発揮することを狙ったこととなります。「各種入試は即刻廃止する」しかこの国の発展の道は存在しないにも拘らず、各種入試などでのみアドバンテージを発揮する教育は、悪意に満ちていると言わざるを得ません。

抜本的な教育改革を断行しなければ、日本の「一流大学の論文生産性」は不可避免的に低下し、この国の科学技術は停滞し、労働の生産性は、ますます後進国レベルになっていきます(「現代の教育を！」の中で、再度検討します)。改革のムードは、少しずつ現れてきていますが、後述するように、上手くいっても、「衰退しつつある日本の研究活動の復活」の結果が現れるには、「何年もかか」と言われています。

当塾は、教育改革の基本方針を提案しています。社会が、これを全面的に受け入れるだけでも、何年もかかります。多くの人が、その時を待つだけならば、この国は、間違いなく破綻します。既に、読者自身が、行動を起こす時です。頑張りましょう。

## 現代の教育を！

1 毎日新聞を始めとして各種の報道機関は、6月9日以降一斉に、英国の大学評価機関「クアクアレリ・シモンズ(QS)」が、2023年版の世界大学ランキングを発表したことを報じた。

日本からは50大学がランキング入りし、東京大が最高の23位だった。100位以内には5大学が入った。QSは世界的に有名な二つの大学ランキ

ングの一つで、他にタイムズ・ハイヤー・エデュケーション (THE) がある。QS は、15 万人以上の学術関係者からの評判や研究の影響力を示す教員 1 人当たりの論文被引用数、学生 1 人当たりの教員比率など六つの指標に基づいて順位を決める。23 年版は世界 1418 の大学をランキングした。

日本からは東大が最高位で 2 年連続の 23 位。100 位以内では、京都大 36 位▽東京工業大 55 位▽大阪大 68 位▽東北大 79 位——の 4 大学が続いた。100~200 位には、名古屋大 112 位▽九州大 135 位▽北海道大 141 位▽慶応大 197 位——の 4 大学が入った。

22 年と比べると、日本でランクインした 50 校のうち 19 校が順位を下げた。一方、順位を上げたのは 11 校で、維持したのは 18 校だった。最高位だった東大は順位を維持したが、教員 1 人当たりの論文被引用数が前年から順位を 25 位落とし、128 位と低迷した。QS は東大について「指標の大半で優秀な成績を収めている」と評価した上で、トップ大学の研究の影響力が落ちている点を指摘した。

重要なことは、QS のベン・ソウター上級副社長は「我々のデータは、日本のランキングの下落の主な原因が研究業績の低下であることを示している。過去 20 年にわたる日本の知的資本への過小投資の結果で、博士号取得者を増やし続ける中国と(減少が続く)日本とは一線を画している」と分析した。

さらに日本政府が大学を支援するために設置した 10 兆円規模の大学ファンドについても触れ、「衰退しつつある日本の研究活動の復活に向けた有望な一歩だが、その成果がランキングに表れるまでには何年もかかる」とした。

こうした現実、即ち「日本のランキングの下落の主な原因が研究業績の低下にある」ことは、当塾が常に引用してきた、そして、間もなく発表されるだろうタイムズ・ハイヤー・エデュケーション (THE) のデータとほぼ同様の傾向を示しているはずだ。「日本の大学の研究業績の低下 → 日本の大学のランキングの低下」は疑う余地のない現実である。

諄いが、もう一度、ノーベル生理学・医学賞受賞の本庶佑氏の言葉を記しておこう。

「アカデミアがシーズを生めば、長期的に、しかも桁違いの経済効果を生むことは歴史が証明している。基礎科学の発展こそ、大学における研究の使命である。」

それでは次に、「過去 20 年にわたる日本の知的資本への過小投資 → 日本の大学の研究業績の低下」の因果関係は明確なのか、改めて問うてみよう。

知的資本とは、「企業の無形資産によって生み出された、株主資本の簿価に対する市場価値の超過部分のこと」、または「知識、ノウハウに基づき超過収益力を生み出す能力のこと」を言うそうだ。

ここで使われている「知的資本」とは、「知的資産」に近いものだと思われる。経産省の HP には、「知的資産とは、人材、技術、組織力、顧客とのネットワーク、ブランド等の目に見えない資産のことで、企業の競争力の源泉となるものです。」とある。

要するにベン・ソウター氏は、大学の研究開発への投資が少なかったから、日本の大学の研究業績の低下が起こったのだ、と主張している。本庶氏の言葉と合わせれば、大学への研究開発の投資を倍加すれば、この国の未来は明るい、となる。本当にそう確信しているのだろうか。

『春夏秋冬』では、例え大学の研究開発に 2 倍の投資を行ったとしても、大学の「知的創造的能力」を倍加すること

はできないと主張してきた。大学の研究開発力を支える人材はどこから生れてくるのか、即ち大学の「知的創造的能力」の担い手を育成するサイクル、すなわち、その目標に向かう中等教育、大学学士課程教育を含む教育のサイクルが有効に機能しなければ、「アカデミアがシーズを生む」ことはできないと主張してきた。

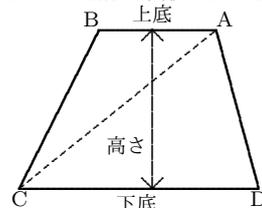
小学 5・6 年生、中等教育、大学学士課程の教育において、「即興力」を基礎とした選抜テストに向けての教育は、あらゆる意味で、「知的創造的能力」の育成の障害物となっている。

如何なる経済政策ましても金融政策を強行しても、現状の中等教育・大学学士課程教育を放置したままでは、この国の長期的な科学技術力の向上も、生産性の向上もあり得ない。当塾は、一貫してそう主張してきた。

2 朝日新聞「EduA」(22 年 6 月号)に「算数・数学 学びのヒント」として、桜美林大 リベラルアーツ学群教授 芳沢光雄氏の短文が掲載された。

38 × 67 の計算法、その仕組みを説明した後に、以下の文が続く。

図形に関しても、同じような例があります。下図は台形で、よく知られているように台形の面積の公式は次の式で表せます。



$$(上底 + 下底) \times 高さ \div 2$$

台形の面積の公式に関しても、公式だけを覚えている人もいれば、以下の様に理解している人もいます。

$$\text{三角形 ABC の面積} = 上底 \times 高さ \div 2$$

$$\text{三角形 ACD の面積} = 下底 \times 高さ \div 2 \quad \text{なので、}$$

$$\begin{aligned} \text{台形 ABCD の面積} &= \text{三角形 ABC の面積} + \text{三角形 ACD の面積} \\ &= 上底 \times 高さ \div 2 + 下底 \times 高さ \div 2 \\ &= (上底 + 下底) \times 高さ \div 2 \end{aligned}$$

2 桁同士の掛け算の計算方法だけを覚えた人も、台形の面積公式だけを覚えた人も「分かった」と言います。しかし、計算の仕組みや面積の求め方の理由も理解して「分かった」と言うことが大切で、応用力や発想力が身に付くのです。

算数や数学に関する教育では「算数や数学が得意な人は別として、苦手な人はやり方や公式だけを暗記して、マークシート形式のような問題の答えを当てればよいだろう」という意識が広がっていました。

暗記だけで理解しないことのマイナス面が顕著になったため、私はここ数年、算数や数学を 理解して学ぶ ことの意義を拙著やネット記事などで訴えてきました。前後して、文部科学省が入試での記述問題の導入を進めてきたこともあり、算数から高校数学では、「理解を大切にしよう」という考えが浸透してきた感があります。・・・

筆者には、芳沢氏の思いは十分に理解できるだけでなく、数学・数学教育のプロである氏の主張に異を唱える立場にはない。しかし、これだけでは、現代の教育の問題性は、十分には浮かび上がってこない。

上記の議論は、「三角形 ABC の面積 = 底辺 × 高さ ÷ 2」を根拠に進められている。しかし、『春夏秋冬 310 号』を見て頂きたい。肝腎の三角形の

面積の公式は、ユークリッド幾何学では、三角形の合同条件、平行四辺形の性質、要するに等積移動の議論を踏まえた議論を経て、得られることを説明している。即ち、ユークリッド幾何学では、合同な図形は、移動によって重ね合わせることができるから、図形の面積は等しいとする。したがって、

二つの図形の面積が等しいとは、二つの図形が合同か、二つの図形が幾組かの合同な図形の異なる組み合わせで成り立っている

ことを意味しているのだ。

ユークリッド幾何学における面積の議論は、すべてここから始まる。三角形の面積が「三角形 ABC の面積 = 上底 × 高さ ÷ 2」と見なすためには、科学の歴史的発展の一里塚としての「ユークリッド幾何学」の基本的な成り立ちを明確に理解しておかねばならない。

これは、単なる一例である。あらゆるところで、「即興力」をより身に付けたものが、科学技術をより発展させることができる、と言う妄信が蔓延っている。

芳沢氏の主張「理解して学ぶ」は、各種の入試や学力テストに対応する「即興力」を身に付けるためではなく、科学を歴史的産物として、あるいは科学を「発展させるもの」として学ぶことに通じる。即ち、我々は、科学を「確立した処方体系」として学ぶのではなく、「知的創造的能力の獲得」を目指して学ぶのである。

芳沢氏は、「新体系・中学数学の教科書 上、下」、「新体系・高校数学の教科書 上、下」を書いておられる。通読した。多くの点で同意できるが、当塾といくつかの点で、違う考えも含まれている。後刻、コメントしたい。

一方、「中学 3 年で、あるいは高校 2 年 3 年で、すでに身に着けている基礎科目、数学や英語などの基礎能力を、実社会の問題に当てはめる「応用問題」「文章題」を系統だっただけで、3 年もすれば世代が変わってしまうでしょう。」と考える超多才な人(伊東乾氏)もいる。それらの課題設定、数学的分析と数学的定式化、解法の開発と十分時間をかけて取り組み、確かな成果は得られるだろうが、しかし、入試が続く限り、「即興力」育成の単なるトレーニングとなり、創造性への綿密な仕掛けを欠く。特に、「英語の基礎能力」とは何か、まさか、「英語四技能」まで墮落しているのではないのか。特定の技能教育は、必要不可欠な人のみに行えばよいはずだ。筆者は 40 年ほど前(1983 年秋)、米国の学会で、45 分の論文講演と質疑応答を処理したが、今は英語を話せない。

3 芳沢氏の論述は、もちろん不十分さを感じるが、大きな方向性として、当塾が主張している現代が要請する主要な教育・学習の目標「知的創造的能力」と多くの面で重なる部分がある。芳沢氏は、入試やいわゆる学力テストに対応する「即興力」を目標に教育・学習を進めるのではなく、「理解して学ぶ」ことを基礎に学習することを勧めている。目標が変われば、そこで獲得される能力にも大きな変化が現れるはずだ。大いに期待したい。

『春夏秋冬 411 号』では、正真正銘「頭の良い」中野信子氏・和田秀樹氏も、筆者の主張と重なる部分が多くなってきていることを書いた。

従来の入試を前提とする教育の目標は、突き詰めれば、「処方(技法)、公式などをできるだけ記憶のタンスの中に詰め込んでおき、それらを組み合わせ、即興的に課題を処理する」

となる。過去の和田秀樹の「暗記数学」もその一つだった。

そうしたものが現代は、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の前に、ガタガタと崩れていく過程にある。そして、徐々に、さらに部分的にはあるが、「知的創造的能力」に向けての教育・学習の提起がなされるようになってきた。再度、当塾の提案を記す。

(1) 「知的創造的能力」育成の教育は、僅かでも「知的創造的実績」を持った教師によってしかできない。中等教育、大学学士課程の教師の教育ノルマを週 2 日程度以内に制限し、残りの全ての時間を研究・開発的労働に従事させる。身分保障・生活保障は、教育ノルマだけで行う。

(2) 「知的創造的能力」の重要な要素の一つは、基礎科学を完璧な完成したもとしてではなく、進歩・発展の歴史(論理)の中で理解すること、二つ目には、各自の創造性の源泉は各自を特徴づける多様性・個性にある。同じことを学んでも、同じ現実にも接しても、他の人とは異なる受け止め・理解ができる。自らの持つ多様性は感性とも言われ、それが合理性と結合したとき、創造性に発展することがある。

(3) 母語や地域は多様性の宝庫である。初等・中等教育は自力で通える距離に、大学学士課程の大学は自宅から通える距離に、当面理学教育においては(いずれ社会科学においても)それぞれの意欲と能力に応じた最適の教育コース・カリキュラムを開設する必要がある。

中等教育においても、半年前にはシラバスや講義要綱(参照:当塾の HP の「電磁気学メモ」「電磁気学講義詳細」)を公開し、受講選択の指導はあっても、最終的には受講者の責任において受講する、という形式にすればよい。「即興力」を検定する各種入学テスト、各種学力テストは、即刻全廃だ。

(4) 現代の学校は非常に多くの、しかも重要な任務を持っている。それぞれには、それぞれの専門家を配すべきだ。教育レベルを向上させるためには、教師の任務を「知的創造的能力の育成」のみに絞るべきだ。高校までの部活は、民間委託を模索し、学校教育から解放すべきだ。

(5) 直ちに、一部のカリキュラムは、公・私、中・高・大の壁を越えて、多様な生徒・学生の要望に応えられるよう改革すべきだ。

誰もが認識している通り、改革が遅れば遅れるほど、この国の閉塞・停滞・後退からの脱却は困難となる。

誰もが同意している通り、経済政策、ましてや金融政策で、この国の抱えている困難を克服することなどできない。

ロシアのウクライナへの侵攻は、エネルギーや食料の安全保障の問題までクローズアップした。節約や生活レベルを落とせば、何とかなる、と言う時代ではなくなっている。どこまでの兵器をもてば、安全保障は大丈夫だ、と言える時代でもない。明確に、科学技術的分野で、その指導的役割を持ち続けることなくしては、その国の安全保障は極めて不安定なものとなる。基礎科学の振興こそ、最大の安全保障だ。

市民の意識が明確に定まれば、比較的容易に、「即興力」教育のエネルギーとコストを「知的創造的能力」の育成に振り向けることができるはずだ。

---

## 創造性教育を！

---

1 『中学数学基礎 2023 年版』には、不定方程式  $3256p + 3608q = 2024$  (2024 年 2 月, 3 月の入試対策) を掲載し、一般解は  $p = 41n + 25, q = -37n - 22, n: 整数$

であることを示している。これは、比較的簡単な解法(後で、示す)でも解ける。即ち、学習目標のレベルを少し落としておいたのだ。さらに、この問題の解を知りたいだけならば、計算知能“WolframAlpha”に、

「solve indeterminate equation  $3256p + 3608q = 2024$ 」と入力すれば、ただちに一般解を答えてくれる。そして、こうした課題の「構造」を理解するため、自力で一般解を求めようとして書いている。

当然のことながら、2024 が 3256 と 3608 の最大公約数(88)の倍数でなければ、整数解  $p, q$  は存在しないはずだから、方程式の両辺を 88 で割った方程式

$$37p + 41q = 23, \quad (37 \text{ と } 41 \text{ は互いに素})$$

は元の方程式と同値である。比較的簡単な解法で解けるのは、係数 37, 41 が比較的小さい自然数だからである。

一方、このテキストを利用するところには、既に時効の

$$4097p + 3791q = 2023 \quad (2023 \text{ 年 } 2 \text{ 月, } 3 \text{ 月の入試対策})$$

に対して、同様の処理を行うと、 $241p + 223q = 119$  となり、右辺が 2024 の問題に比べ、簡単な解法では、かなりの時間を要することになる。

こうした議論は、一般的には、ベズーの等式「整数  $A, B$  の最大公約数を  $G$  とすると、整数  $p, q$  が存在して、 $pA + qB = G$  とすることができる」に基づいて行うことができる。直ぐ後で示すように、「ベズーの等式」の証明は「ユークリッドの互除法」で行うことができる(『中学数学基礎』では、“非構成的な証明”も示している)。

また、『中学数学基礎』に掲載している小学生の問題

$$\frac{5}{1147} - \frac{6}{1517}$$

の類題が、しばしば中学入試に出題される。しかし、有効に通分するためには、分母の最大公約数を知らねばならないが、そのための処方「ユークリッドの互除法」を知っておけば、これは小学生にも平易な問題となる。

何れにしても、多くの整数計算では、「ユークリッドの互除法」がキーとなる。ここでは、『中学数学基礎』を基に、上記の課題を議論する。

2 殆どの中学生や高校生は「ユークリッドの互除法」を知っているが、驚くことに、現在の高校数学の検定教科書にも、「ユークリッドの互除法」の原理は説明されているが、証明は書かれていない。したがって、定理「ベズーの等式」の証明さえ行われていない。証明もしないで、定理を利用することが許されるのは、小学校の算数の間だけだ。数学は、論証を軸とした科学であり、それゆえ、他の科学の言葉としての役割も果たせるのだ。

一連の議論のためには、まず整数の割り算を明確に定義しておかねばならない。

### 整数の割り算

自然数  $A, B$  に対して、整数  $q$  を商、整数  $r$  を余りとする。

$$A \div B = q \text{ 余り } r \iff A = qB + r, (0 \leq r < B)$$

一般の整数の割り算は、 $A = qB + r, (0 \leq r < |B|)$  と定義される。議論をほんの少し簡単にするため、整数を 0 と自然数(非負の整数)に制限する。

まずはじめに、割り算の存在と一意性を証明する。

$A < B$  ならば、 $q = 0, r = A$  がこれを満たす。

$A \geq B > 0$  ならば、 $q = 1, 2, 3, \dots$  と増加していくと、 $r$  は  $r_1 = A - B \geq 0, r_2 = A - 2B, r_3 = A - 3B, \dots$  とだんだん減少し、いくらでも  $r$  を小さくできる。従っていずれかの  $q$  で負になる。 $r_q = A - qB \geq 0, r_{q+1} = A - (q+1)B < 0$  とすると、この  $r_q$  は  $0 \leq r_q < B$  をみたす。よって、割り算における  $q, r$  が確かに存在する。

もし 2 つの割り算  $A = qB + r, (0 \leq r < B)$  と  $A = q'B + r', (0 \leq r' < B)$  が存在していたならば、 $(q - q')B = r' - r$  となるが、 $r' - r < B - r \leq B$  だから、 $q - q' < 1$  でなければならない。同様に  $q' - q < 1$ 、よって  $q = q'$ 。従って、 $r = r'$  となる。以上で、割り算は一意的となる。

『中学数学基礎』には、その他の後の議論のための必要なことも書いている。

以下の 2 つの定理を証明している。

「2 つの整数のすべての公倍数は最小公倍数の倍数である。」

「2 つの整数のすべての公約数は最大公約数の約数である。」

また、『中学数学基礎』には、小学生も知っている「ユークリッドの互除法」の例も示している。

例 1 $A = 84, B = 35$	例 2 $A = 221, B = 130$
2   84   35   2	1   221   130   1
70   28	130   91
2   14   7	2   91   39   3
14	78   13
0	13   0

ユークリッドの互除法は以下のように証明できる。(記号法は「代数学入門」上野健爾著に従う)

自然数  $A, B (A > B)$  としておく)にたいして、一意的に

$$A = q_0B + r_0, (0 \leq r_0 < B) \quad \text{が成り立つ。}$$

$r_0 = 0$  ならば、 $A$  は  $B$  の倍数であり、最大公約数は  $B$  である。

$$r_0 \neq 0 \text{ ならば、} B = q_1r_0 + r_1, (0 \leq r_1 < r_0)$$

$r_1 = 0$  ならば、 $B$  は  $r_0$  の倍数であり、 $A$  も  $r_0$  の倍数であるだけでなく、 $r_0$  は  $A, B$  の最大公約数でもある。

なぜなら、最大公約数を  $G$  とすると、 $G$  は  $r_0$  の約数であり、また  $r_0$  は  $A$  と  $B$  の公約数であるから、 $r_0$  は  $G$  の約数である。

したがって  $r_0 = G$  となる。

$$r_1 \neq 0 \text{ ならば、} r_0 = q_2r_1 + r_2, (0 \leq r_2 < r_1)$$

これを続けて、

$$A = q_0B + r_0, (0 < r_0 < B)$$

$$B = q_1r_0 + r_1, (0 < r_1 < r_0)$$

$$r_0 = q_2r_1 + r_2, (0 < r_2 < r_1)$$

$$r_1 = q_3r_2 + r_3, (0 < r_3 < r_2)$$

… … …

$$r_{k-3} = q_{k-1}r_{k-2} + r_{k-1}, (0 < r_{k-1} < r_{k-2})$$

$$r_{k-2} = q_k r_{k-1} + r_k, (0 < r_k < r_{k-1})$$

$$r_{k-1} = q_{k+1} r_k$$

となるところで終了する。

計算の一段ごとに  $r_i$  は少なくとも 1 ずつ小さくなるから、 $k$  は必ず有限である(およそ何回以内の操作で終了するか、の理論もある)。

下方の式から順次見ていくと、 $r_{k-1}$  は  $r_k$  の倍数、 $r_{k-2}$  も  $r_k$  の倍数、…、 $r_0$  も  $r_k$  の倍数、 $B$  も  $A$  も  $r_k$  の倍数となる。したがって、 $r_k$  は  $A,$

$B$  の最大公約数  $G$  の約数である。一方、上から順次見ていくと、最大公約数  $G$  は  $r_0$  の約数であり、 $r_1$  の約数、 $\dots$ 、 $r_k$  の約数となる。したがって  $G = r_k$  である。

ユークリッドの互除法の証明の過程で、次の重要な定理とその証明が見えてくる。

### ベズーの等式

整数  $A, B$  の最大公約数を  $G$  とすると、整数  $p, q$  が存在して、 $pA + qB = G$  とすることができる。

互除法の証明で、下から 2 番目の式で  $r_k$  を  $r_{k-1}, r_{k-2}$  で表し、その  $r_{k-1}$  に下から 3 番目の式から  $r_{k-2}, r_{k-3}$  だけで表した式を代入し、 $r_k$  を  $r_{k-2}, r_{k-3}$  だけで表す。順次これを行って、 $r_k$  は  $B$  と  $A$  だけの一次結合で表すことができ、しかも、係数は全て整数となる。よって、 $G = r_k = pA + qB$ 、 $p, q$  は整数。

こうした証明を「構造的な証明」という。「非構造的な証明」にも関心のある人は、『中学数学基礎』を参照されたい。23 年版から一部変更している。

『中学数学基礎』には、ベズーの等式に関わる他のいくつかの性質も議論している。参照されたい。

3 これを用いて、『中学数学基礎』に掲載している以下の問題に答えておこう。

すでに記した通り、これは、2024 年 2 月、3 月入試対策の問題より、時間のかかる問題である。

次の条件を満たす整数の組  $(p, q)$  を求めよ。

$$4097p + 3791q = 2023 \quad (2023 \text{ 年 } 2 \text{ 月, } 3 \text{ 月入試対策})$$

$$(一般解 \ p = 223n + 19, \ q = -241n - 20, \ n : \text{整数})$$

解が存在するためには、2023 は、4097 と 3791 の最大公約数 (17) の倍数でなければならない (17 は互除法で簡単に求まる)。したがって、問題は、

$$241p + 223q = 119$$

と同値となる。これを解いておこう。

まず  $241p + 223q = 1$  を解く。

$A = 241, B = 223$  にユークリッドの互除法を適用する。

$A = 241, B = 223$  の最大公約数を求めてみる。

(1)	$A = q_0B + r_0$	$241 = 1 \times 223 + 18$
(2)	$B = q_1r_0 + r_1$	$223 = 12 \times 18 + 7$
(3)	$r_0 = q_2r_1 + r_2$	$18 = 2 \times 7 + 4$
(4)	$r_1 = q_3r_2 + r_3$	$7 = 1 \times 4 + 3$
(5)	$r_2 = q_4r_3 + r_4$	$4 = 1 \times 3 + 1$

これより、逆向きの (5) から (1) の順序で、 $q_k$  の値を代入しながら進むと、

$$\begin{aligned} 1 &= r_4 = r_2 - q_4r_3 = r_2 - 1(r_1 - q_3r_2) = \dots \\ &= 62A + (-67)B \end{aligned}$$

即ち、 $62A + (-67)B = 1$  が得られた。よって、

$$A \times (119 \times 62) + B \times (-119 \times 67) = 119$$

$$A \times 7378 + B \times (-7973) = 119$$

$$A \times (7378 - 33 \times 223) + B \times (-7973 + 33 \times 241) = 119$$

$$A \times 19 + B \times (-20) = 119$$

任意の整数  $n$  に対して、

$$A \times (223n + 19) + B \times (-241n - 20) = 119$$

よって、一般解は

$$p = 223n + 19, \quad q = -241n - 20, \quad n \text{ は整数。}$$

各自、計算知能 “WolframAlpha” に、

$$\text{solve indeterminate equation } 4097p + 3791q = 2023$$

と入力して確かめておこう。

4 『中学数学基礎』での、かつての大阪府の入試問題の議論をコピーする。

つぎの等式が成り立つような、整数の組  $(a, b)$  を求めよ。ただし、 $a$  は 34 より大きい自然数、 $b$  は 32 より小さい自然数である。

$$20a + 33b = 1085 \quad (15 \text{ 大阪後期改})$$

20, 33 は互いに素より、 $20p + 33q = 1$  を互除法で解いて、 $p = 5, q = -3$  をえる。したがって、 $20a + 33b = 1085$  の 1 つの解は、 $a = 5 \times 1085 = 5425, b = -3 \times 1085 = -3255$  となる。 $a$  は  $a - 33k, b$  は  $b + 20k$  だけずらして、 $a, b$  の範囲の条件に合うように整数  $k$  を選ぶ。 $a > 0$  の範囲で最小となる  $a$  のとき、 $k = 164$  で、 $a = 13, b = 25$  となるが、これは、 $a > 32$  に反する。 $k = 163$  である。よって、 $20 \times 46 + 33 \times 5 = 1085$  となる。 $a = 46, b = 5$ 。

もちろん、上の例題は、もっと簡単に解ける。20 と 1085 の最大公約数が 5 だから、 $33b$  は 5 の倍数、したがって、 $b$  も 5 の倍数で、 $b = 5b' < 32$  とおく。問題は、 $4a + 33b' = 217, b' \leq 6, a > 34$  となる。 $b'$  は奇数だから、 $b' = 5, 3, 1$  のいずれかで、 $b' = 1$ 、よって、 $a = 46, b = 5$  となる。

さらに、整数の性質など殆ど勉強しなくても、 $a = \frac{1085 - 33b}{20} > 34$  より、 $b \leq 12$  だから、 $b = 1, 2, \dots, 12$  を順次代入して、 $b = 5, a = 46$  を得ることもできる。

上記の大阪後期の入試問題は、最後の解法を想定したものだろう。しかし、その解法は、極めて簡単な場合に有効なだけで、それは課題の構造とは無関係の特殊な解法によって解ける場合だった。

大阪後期の問題を、 $a, b$  を整数とし、他の条件はすべて除いておいて、“WolframAlpha” で解くと、

$$\text{一般解 } a = 33n + 13, \ b = 25 - 20n \text{ が得られる。}$$

$$\text{条件 } a > 36, 0 < b < 32 \text{ を考慮すると、} \ n = 1$$

(後で書くが、 $b < 32$  は不要な条件となっている)

$$n = 1 \text{ とすると、} \ a = 46, \ b = 5 \text{ となる。}$$

5 『中学数学基礎』には、あまり注目されていないが、中学生にとってかなり役に立つことも書いている。

定理「 $A, B$  が互いに素の時、 $pA + qB = 1$  となる  $p, q$  が存在する」は、 $A, B$  が互いに素、ということの便利な表現と見なすこともできる。

たとえば、「 $A, B$  の最小公倍数  $L$ 、最大公約数  $G$  のとき、 $GL = AB$ 」などの証明のところで用いる、互いに素な整数の性質、

「整数  $A$ 、互いに素な整数  $B$  と  $C$  について、 $AB$  が  $C$  の倍数ならば、 $A$  は  $C$  の倍数である。」

を簡単に証明できる。

$B, C$  は互いに素だから、 $pB + qC = 1$  となる整数  $(p, q)$  が存在する。両辺に  $A$  をかけて、 $A = pAB + qAC$ 。 $pAB, qAC$  は  $C$  の倍数だから、 $A$  も  $C$  の倍数となる。

その他、整数の議論を行うとき必要な多くの性質 (ユークリッドの『原論』には多数掲載されている) に適用できる。

「 $A, B$  がともに  $C$  に対して互いに素であれば、 $AB$  も  $C$  と互いに素である。」

整数  $p, q, p', q'$  が存在し、 $pA + qC = 1$ 、したがって、 $B = pAB + qCB$ 。これを  $p'B + q'C = 1$  に代入して、

$$pp'AB + (Bqp' + q')C = 1 \text{ よって、} \ AB \text{ と } C \text{ は互いに素。}$$

「整数  $A, B$ , 素数  $x$  について,

$AB$  が  $x$  の倍数ならば,  $A, B$  のうち少なくとも一方は  $x$  の倍数である。」

$AB$  が  $x$  の倍数であり,  $A$  も  $B$  も  $x$  の倍数でないと仮定する。

$x$  は素数だから,  $x$  の約数は  $1$  と  $x$  だけである。したがって,  $A$  が  $x$  の倍数でないということは,  $A$  と  $x$  は互いに素を意味する。よって,  $pA + qx = 1$  となる整数  $(p, q)$  が存在する。両辺に  $B$  をかけて,  $B = pAB + qBx$ 。これより,  $AB$  は  $x$  の倍数だから, 右辺は  $x$  の倍数となり,  $B$  は  $x$  の倍数となる。これは仮定に反し,  $A, B$  のうち少なくとも一方は  $x$  の倍数となる。

これを 2 度適用して, 3 整数の積が素数  $x$  の倍数ならば, 少なくともその一つの整数は  $x$  の倍数となる。またこの性質を繰り返し利用すると,

「整数  $A, n$ , 素数  $x$  について,  $A^n$  が  $x$  の倍数であれば,  $A$  は  $x$  の倍数である。」 が導かれる。

(適用例: 背理法によって  $\sqrt{2}$  が無理数であることの証明)

「整数  $A, B$  が互いに素であれば,

$A^m, B^n$  ( $m, n$  は任意の自然数) は互いに素となる。」

$pA + qB = 1$  となる整数  $p, q$  が存在する。 $pA = -qB + 1$  の両辺を  $m$  乗すると,

$p^m A^m = \{(-q)^m B^{m-1} + m(-q)^{m-1} B^{m-2} + \dots + m(-q)\} B + 1$  となる。したがって,  $p^m A^m + q^m B = 1$  ( $p, q$  は整数) となり,  $A^m$  と  $B$  は互いに素である。

したがって, 改めて,  $p'A^m + q'B = 1$  とおくと,  $q'B = -p'A^m + 1$  となる。両辺を  $n$  乗して, 同様にして,  $B^n$  と  $A^m$  は互いに素となる。

「互いに素な 2 数のベズーの等式」は, 非常に役立つ。

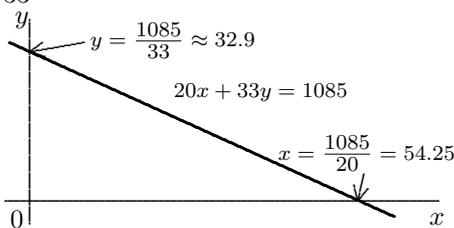
## 6 大阪府後期の問題を

以下の条件を満たす自然数の組  $(x, y)$  を求めよ。

$$20x + 33y = 1085, x > 34, y < 32$$

と整理して書き直してみる。

自然数や  $x > 34, y < 32$  の条件を外して,  $y = -\frac{20}{33}x + \frac{1085}{33}$  のグラフを書いてみる。



問題は, このグラフ上で,  $x > 34, y < 32$  の範囲での自然数の組  $(x, y)$  を見つけることである。自然数  $y$  は  $y > 0$  より,  $x < 54.25$ 。  $x > 34$  を考慮すると,  $x$  が 35 から 54 までで条件を満たす整数の組  $(x, y)$  を見つければよかった。

$33y = 5(217 - 4x)$  より,  $217 - 4x$  は 33 の倍数。これより,  $x = 13, 46$ 。したがって,  $x = 46, y = 5$

ところで, 条件  $y < 32$  は, グラフ上では  $x > 1.45$  となり, すでに条件  $x > 34$  に含まれていた。したがって, 条件  $y < 32$  は, 全く不要な条件となっている。 $y$  は自然数という条件だけで十分だったのだ。

さて, 2015 年度大阪後期の問題 (15 年度問題) と, 筆者がでっち上げた大阪府 2023 年 2 月・3 月入試予想問題 (22 年

度問題) とどこが違うか考えよう。15 年度問題は, 現状の教育レベルで, 少し時間はかかるかもしれないが, 殆ど問題の数学的構造の解析なくして, 比較的少ない試行によって, 必ず正解できる。一方, 22 年度問題も, 限りなく時間を使えば, 誰でも解けるが, 解いたところで, その数学的構造の理解には全く及ばない。

したがって, 15 年度問題のような問題, 即ち訓練だけしておけば比較的短時間で必ず正解できる問題は, 最初から「即興力」を試す問題であり, 入試対策と相性の良い問題であるが, 数学的構造の分析を促す問題とはなっていない。勿論, 22 年度問題を突然生徒に出題すれば, 入試や学力テストなどの制限時間の中では, 誰も正解できないであろう。所詮, 入試や各種学力テストは, 知的創造的能力の育成と無縁なのだ。『中学数学基礎』が, 22 年度問題を提案するのは, 整数問題をより高度な視点で理解を深めることを促すことを目標にしているからである。全ての「即興力」テストである各種入試や学力テストは, 統一的で高度な理解力, 知的創造的能力などの育成の極めて重大な阻害要因になっている。統一的で高度な理解力, 知的創造的能力を促すのではなく, それを否定しているからだ。前に進むためには, ユークリッドの互除法, ベズーの等式の厳密な証明は欠かせない。

それぞれの人は, 意欲と既得の能力に応じて, 合理的で堅実な学習レベルの高度化に全力で取り組めばよい。

現状は, その能力を「即興力」とし, 「即興力」に応じて生徒・学生を分別して, 教育している。

逆に, 生徒・学生が, 年齢・学年にこだわらず, 自分に最適なカリキュラムが選択できるよう, 教育する側は, 全力でその体制を整えなければならない。

もともと, 数学的能力の成長は, 個人差が非常に大きく, カリキュラムを年齢・学年で対応することには無理がある。将来, 科学のどの分野に関わるとしても, 研究開発の局面において, できる限りの高度な基礎数学の修得は, 極めて有益なこととなる。数学は, 科学の言葉でもあるからだ。中・高・学士課程の学生ならば, 誰でも受講できるように, 多様な数学のカリキュラムを整えておかねばならない。

幸いに, 数学教育は他の教科に比べ, オンライン教育と比較的に相性が良い (『春夏秋冬 41 号』を参照されい)。したがって, 大学生レベルの数学の一部カリキュラムは, 部分的に全国ネットで行うことも可能だろう (特定のカリキュラムでも, 完全にオンライン化する, などはない)。多数の中学生が, 現状の大学の数学科のカリキュラムのいくつかを修得することも可能なように制度を改めねばならない。教育の機会均等とは, 「教育を受ける機会が, 人種, 信条, 性別, 社会的身分, 経済的地位または門地により差別されず, 能力に応じてひとしく保障されるべきである」ということらしい。現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力の育成」から見れば, それは, 「個人が受講したいカリキュラムを受ける権利」と読み直すことができる。