



後はありません

9月号と同じことを繰り返します。この数か月で発表されたこの国の科学技術と経済の全ての各種指標は、この国の科学技術力と労働の生産性の全面的後退がより深刻化していることを示しています。そして、経済産業省が5月に発表した「未来人材ビジョン」では、教育改革の着手には「残り時間は、あと数年しかない」と言っています。しかしこのまま数年を経れば、全ては決着し、資本と有能な人材は、全て海外へ流出し、間違いなく現在以下の二流国に転落するでしょう。

依然として、改革は遅々として進まず、結果として、多くの若者は、入試を始めとする各種テストや技術改革の前線で、ひたすら「即興力」を求められます。「知的創造的能力」を持った人は、ごく限られた人のみとなり、多くの若者は創造性や独創性と言う視点では、単なる使い捨ての人材となります。どんな局面でも一般には大なり小なり人の関与は必要ですが、技術は日進月歩であり、殆どの技術はすぐに自動化が可能となり、残された人は自動化より安上がりの労働として、生涯あくせくして新しい技能の修得に駆り立てられることとなります。そして、結局は、現実の多くの工場や倉庫のように、既に全自動で稼働しているものが多く、最初から、全自動にデザインされるようになります。一方では、人には、自動化できないあるいは自動化してはならない労働、そして主要には AI などだけでは処理できない「知的創造的能力」が問われる労働が増加します。

この国に、もはや5月に発表された「未来人材ビジョン」(経済産業省)のように「残り時間は、あと数年しかない」などとのんきなことを言っている猶予はありません。文科省が動かないのならば、各地域の教育委員会、公立・私立の全中学・高校・大学が連携して、広範な生徒・学生にその人の能力と意欲に応じた「知的創造的能力」育成のプログラムの実施を迫られています。(「現代が要請する教育を！」のなかで概要を説明しています)。

当塾は、そうした中で、自らの将来に活かせるような、即ち、能力と意欲に相応しい授業が実現したときに、十分対応できる能力の育成を目標に授業を行います。

いまだに、各種受験対策、各種テスト対策を標榜する塾や学校さえあります。こうしたテストは既に解明済みの課題に、適切な解法を適用して短時間に正解を導く能力、いわゆる「即興力」の検定を目標に行うものです。現実に行われている全ての試験は、そうした「即興力」を問うものです。

しかし、少なくとも理系の入試や学力テストなどで問わ

れる課題は、題意を AI(Artificial Intelligence 人工知能)に誤解なく伝えれば、殆ど瞬時に正解するか、あるいは偏差値が 50 程度の(あるいは題意を正確に理解できる)人が、AI を使って正解できると考えられます(この主張は、数年前まで継続した「東ロボ君」プロジェクトの顛末から確認できます)。科学的視点から言えば、「優秀な人ならば、1時間や2時間で解ける」ことが予想されるような問題は、もともと創造性とは無縁の問題です。これまで何十回も引用した岡潔(おかしよし)氏(大阪出身の天才的な数学者、文化勲章叙勲)の“名言”を思い出してください。

「私は三日かからねば、つまり二晩寝なければ解けないという問題から問題と呼ぶことにしている」

「即興力」は、現在では、圧倒的に AI の方が優れています。知的活動で人こそが力を発揮しなければならないのは「知的創造的活動」であり、しかも AI だけではなし得ない領域を含む「知的創造的活動」です。

AI は日進月歩で、2045 年ごろには、人間の全ての知的能力を超えること(シンギュラリティ)が起こるかもしれないと考えられていましたが、そうした予想は当たりそうにもありません。

人類は、ますます多くの困難な課題を抱えるようになっていきます。食料、人口、エネルギー、地球温暖化(異常気象)、大地・大気・海洋の各種汚染、パンデミック、いずれをとってもその解決は簡単ではありません。それらは互いに深く結びついています。言い換えたら、持続可能な開発目標(SDGs : Sustainable Development Goals)に向けて、無数の努力が欠かせなくなっています。したがって、平和的な国際環境を前提とする限り、国、民族、地域社会などによる最大の競争・協力は、間違いなく「知的創造的能力」に基づいて行われます。「知的創造的能力」の多寡が国際競争力を左右する、と言うこととなります。

ロシアのウクライナ侵攻や中国の軍事的拡大政策は、こうした現実を分かりにくくしています。しかしその一方、中国はいまや Top1%補正論文数では米国を上回り、世界第1位となりました。

もっと危機意識を持って教育改革取り組まねば、この国は、全てを失います。後はありません。「知的創造的能力の育成」に全力で取り組む時です。

現代が要請する教育を！

1 日本科学技術力の全面的後退に歯止めがかからず、

それに応じて、労働の生産性は大きく後退し、いわゆる途上国以下の状態となっている。

例年通り、英国の大学評価機関「クアクアレリ・シモンズ (QS)」は、2023 年版の世界大学ランキングを発表したが、QS のベン・ソウター上級副社長は、データは日本のランキングの下落の主な原因が研究業績の低下であることを示している、と述べていた。3月に発表されたタイムズ・ハイヤー・エデュケーション (THE) のデータもほぼ同様の傾向を示していた。

既に8月11日付の当塾のHPには、以下の様に書いた。

科学技術・学術政策研究所 (NISTEP) は、2022年8月9日(火)、「科学技術指標 2022」を取りまとめ公表しました。NISTEP による要約は、以下の通りです。

日本の論文数 (分数カウント法) は世界第4位から第5位、注目度の高い論文数のうち Top10 % 補正論文数は第10位から第12位、Top1% 補正論文数は第9位から第10位となりました。Top1% 補正論文数では中国が初めて米国を上回り、世界第1位となりました。

日本の博士号取得者数は2006年度をピークに減少傾向にあります。韓国、中国、米国では2000年度 (中国は2005年度) と最新年度を比較すると2倍以上となっています。

『春夏秋冬 413号』では、5月に発表された「未来人材ビジョン」(経済産業省) がデジタル時代の科学技術と教育について以下のような提言が行っている、と書いた。

教育を

①「知識」の習得と、②「探究 (“知恵”) 力」の鍛錬

という2つの機能に分け、レイヤー構造として捉え直すべきではないか。

学び手は、「知識」の習得と、「探究力」の鍛錬、という2つのレイヤーの間をらせん状に循環しながら、自らの能力・スキルを高めることができる。残り時間は、あと数年しかない。

詳細は、『春夏秋冬 413号』を参照されたい。彼らの「探究力」とは、精々上記の程度のものだ。人の能力を、全て「スキル」としてとらえるこうした考え方は、原理的・現実的に「知的創造的能力」に全く反する。どこの国でも似たり寄ったりで、こうしたことはやっていることであり、この国はその競争に負けたのだ。

中国・インド・韓国・その他の国の中等教育は、毎日、生徒に12時間にも及ぶ拘束をかけ、さらにその上に受験塾にも通わせるところもある。少子化、しかもゆとり教育の導入、基礎科学軽視の風潮の中で、同じようなことをまねてやっただとしても、日本が二流国に転落するのは火を見るより明らかである。数少なくなってきた優れた研究開発実績を持った人や将来大きな実績が期待される若者の多くは、欧米や中国・シンガポールを始めとした待遇の良い国に大量に流出しており、この国の研究開発力ますます貧弱なものとなっている。

さらに、21世紀に入って、日本は世界で2番目に多くのノーベル賞を受賞し、日本人のノーベル賞受賞者は、全て日本の大学を卒業している。このままでは、間もなく誰一人ノーベル賞受賞者が出なくなるか、たとえ少数の受賞者が出ても、それは外国の大学の卒業生である、と言うことになりかねない。

資料は既に出そろっており、決断と実行のときが来ている。

日本の再生は、一貫した「知的創造的能力」の育成を目指した教育に全力を尽くすことしかあり得ないのだ。新たなコストは殆ど必要ない、国民がその強い意志さえ持てば、これは実現可能だ。

2 当塾の教育改革政策を『春夏秋冬 412号』でまとめて書いていた。筆者は、現代の教育改革は、主要には、教育内容・教育目標の改革であると認識している。「知的創造的能力」の育成の一点に焦点を絞り、それに応える教育体制を早急に整備すべきだと主張している。ここではもう少し詳細に書いておきたい。しかし、実現するためには、もっともっと詳細に具体的に議論を展開する必要がある。関係者の奮起を期待する。

(1) 「現代が要請する主要な教育目標」は「知的創造的能力育成の教育」であり、その実現は僅かでも「知的創造的実績」を持った教師によってしか実現できない。「知的創造的成果 (基礎科学)」を理解すること、自らが知的創造性を発揮することとは、天と地ほどの隔りがある。確立した科学をいくら正確に理解していても、自らが創造的実績を出せる保証はどこにもない。「知的創造的実績」を出す確かな方策は、科学を正確に理解するだけでなく、どうした具体的 (歴史的) 契機を媒介にして創造性が獲得されるのか、創造性を発揮した人たちは他の人が持っていなかったどんな多様性・個性 (特異性) がその実績に寄与したのか、を学んでおかなければならない。確立した科学を正確に修得し、如何に要領よく「即興的」に既に解かれた課題にマニュアルに従って応えることができたとしても、その人の「知的創造的能力」を検定したことにはならない。現代の教育の主要な目標は「知的創造的な能力」自身であり、実績を持たない人の基礎科学教育の担当能力は未知数である。現代でも当然のごとく多くは大学院では創造的実績を持った人が教授を務めている (怪しげな教授も多数いる) ことになっているが、それは全く同様の理由によって、中等教育や大学の学士課程教育においても創造的実績をもった人でなければ、創造性教育を担当することはできないことを意味する。

(2) この国の低迷は、高度な知的創造的活動に専念できる人が少ないことに起因する。研究開発費の倍額ではなく、多様な課題にこたえ得る大量の創造的能力を持った人材の育成こそが必要である。一方で、研究開発者は、広い意味で常に何らかの自らの後継者の養成に関わらざるを得ない。それを、大学院の教授だけでなく、中等教育、大学学士課程の教師にも拡張すればよい。したがって、中等教育、大学学士課程の「創造性教育」における教師の資格は、「知的創造的実績」のある人である。

(3) 中等教育、大学学士課程の教師の教育ノルマを週2日程度以内に制限し、残りの全ての時間を研究・開発的労働に従事させる。身分保障・生活保障は、教育ノルマだけで行う。

一般に、どの教科においても、教育には多くの補助的な労働が伴う。そうした労働には、現在の学卒程度の学力を持ち、少々の教師としての訓練を受けた多くの人たちが分担すればよい。広い意味での教育は、従って、学校教育は国民全体の

課題であり、それぞれは、自らの能力に応じた貢献ができるよう組織しなければならない。

(4) 「知的創造的能力」の重要な要素の一つは、基礎科学を完璧な完成したもとしてではなく、進歩・発展の歴史(論理)の中で理解すること、二つ目には、各自の創造性の源泉は各自を特徴づける多様性・個性にある。同じことを学んでも、同じ現実に接しても、他の人とは異なる受け止め・理解ができる。自らの持つ多様性・個性は感性とも言われることもあり、それが合理性と結合したとき、創造性に発展する可能性を持っている。

(5) 母語や地域は多様性の宝庫である。初等・中等教育は自力で通える距離に、大学学士課程の大学は自宅から通える距離に、当面理学教育においては(いずれ社会科学においても)それぞれ個人の意欲と能力に応じた最適の教育コース・カリキュラムを開設しておく必要がある。

(6) 中等教育においても、半年前にはシラバスや講義要綱(参照:当塾のHPの「電磁気学メモ」「電磁気学講義詳細」)を公開し、受講選択の指導はあっても、最終的には受講者の責任において受講する、という形式にすればよい。

現在、「デジタル教科書」の導入が準備されている。「デジタル教科書」は、教育の無償化に大きく貢献できる。普及すれば、授業の進め方は、一変するだろう。基礎科学教育、即ち大学学士課程教育にまでそうしたものが進行すれば、学びは大きく変わるだろう。しかし、対面での、原理の確認・ディベート・実験観察資料の整理などの従来からの学びの基礎は欠かせない。

「即興力」を検定する各種入学テスト、各種学力テストは、全面的に廃止すべきだ。

(7) 現代の学校は非常に多くの、しかも重要な任務を持っている。また、どの教科においても、教育には多くの補助的な労働に伴う。それぞれには、それぞれの課題を熟知した専門家を配すべきだ。教育レベルを向上させるためには、教師の任務を「知的創造的能力の育成」のみに絞るべきだ。

(8) 現在、私立中学校・高校や一部の公立中学校では「教科センター方式」の授業が行われている。これを中学、高校、大学学士課程教育全体に拡張すればよい。

直ちに、一部のカリキュラムは、公・私、中・高・大の壁を越えて、多様な生徒・学生の要望に応えられるよう改革すべきだ。勿論、教育は、全て無償が原則である。優れた教育への投資は、十数年後には、二倍どころか、何十倍もの経済効果を必ずもたらす。

以上だ。さらに、「創造性教育」の実現には、もっと詳細な改革案が欠かせない。専門家は、その使命を果たしていただきたい。

[3] 従って、例えばどの地域でも、学習の進んだ中学生が、自らに最適な大学の講義を受けるため自宅から通えるように学校制度を改革すべきだ。年齢・学年や地域、家庭の経済的状况に関わらず、自らに最適な創造性教育を受けられない状況を早期に解決しなければならない。これは、エリート教育ではなく、これからの(創造性)教育の普通の姿である。

全てのテストは、廃止すべきだ。テストは、創造性あるいは将来の創造性を検定することができないからだ。テストは、いろいろな形があっても、全て結局は「即興力」を検定するに過ぎない。「即興力」を目指した教育・学習が、この国の科学技術力を大きく後退させた元凶であった(勿論、この国の特殊事情も大きく影響していた)。日本の抱えている困難の克服には、未だ他国では実現していない、別の根本的な教育政策が欠かせない、という認識から出発している。

外国の“一流大学”を誘致する動きがある。上記の教育改革に協力しない限り、教育を「競争と選抜の論理」の中に引きずりこむ悪質な策動だと判断せざるを得ない。

文部科学省は、2025年以降の大学入学共通テストでの、国語・数学での記述式問題導入と英語民間テストの活用を放棄せざるを得なくなった。筆者は、最終的には、大学入学共通テスト自身が早急に廃止に向かうべきだと考えている。その一方、2022年度からの小学5・6年生への教科担任制の導入、高校生が大学の単位を履修する「科目等履修生」などによる大学在籍期間の変更を可能とするなど、教育制度の個別の変更は徐々に始まっている。教育の機会均等は、その人の能力と意欲に応じた教育を適切に提供することであるはずだ。

また、一部の中学校や多くの私立中学校・高校で行われている「教科センター方式」の授業は、「創造性教育」の足掛かりとなりえる。生徒は、自らの目標の授業を受けるために、教室を移動するのだ。これを学校や学年を超えて、しかも地域で、望む授業を受けられるよう改革すべきだ、と主張しているのだ。

少なくとも大学学士課程までの教育は、地域で行う必要がある。健常者ならば、高校までは自力で、大学学士課程は交通機関などを用いて自宅から通える距離に整備しておかねばならない。地域と母語は創造性の生みの親である多様性の宝庫である。一極集中は、停滞と格差の原因の一つだ。都市部の住民には都市生活税を課し、それを地域に回せばよい。地域の中核となり得る自宅から通える大学が一つもない地域は、基本的には、若者が住むことができる地域ではない。

各方面でのデジタル化は、大きな効果をもたらすだろう。しかし、人間は、生身の動物であり、しかも、成長著しいのは20代ぐらいまでで、そして、殆どの人は百年足らずで死んでいく。大学学士課程程度までの若者の成長や教育に、万全を図ることなく、国の持続的発展が可能だと考えること自体、笑止の沙汰である。

[4] 日本の科学技術力の全面的後退に、歯止めがかからない。それに応じて、労働の生産性はみるみる間に大きく後退し、いわゆる途上国以下の状態となっている。『春夏秋冬413号』では、この国でも各種の努力が行われているが、いずれもこうしたこの国の全面的後退を転換する指向性を全く持っていないことを主張していた。

残された唯一可能な方策は、中等教育・大学学士課程教育を、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の育成に、全面的に転換することだ。

創造性教育を！

1 今月号の数学の話題は、順序として取り上げたもので、必ずしも喫緊の課題ではない。忙しい人は、時間ができるときに読んで頂きたい。

中学数学での、「集合と論理」は、感覚的な扱いで済まされている。『春夏秋冬』では、『中学数学発展』(非公開)を基礎に、『春夏秋冬 386号』から『春夏秋冬 392号』にわたって、かなり詳細に展開した。詳しくはそちらを参照されたい。「論理」については、当塾では、中学生には「命題論理」を完璧に、高校では「述語論理」を駆使できるように学習すべきだと考えている。

2 一般の数学書では、十分な準備もなく、いきなり無限集合に関わる高度な定理(極限、連続性などの議論)を多く取り扱い、多くの生徒・学生は、問題の本質を理解しないまま応用に進む。中学生段階での集合の取り扱いは、以下のようなもので良いのではないかと考えている。以下の展開は、二十数年前、誰かのテキスト(著者は忘れた)を基に、中学における集合論の枠組みと言う意味でまとめたメモであり、筆者固有の工夫は無数にあるが、筆者のオリジナリティーと言えるようなところはほとんどない。筆者は、数学者ではなく、数学の利用者だ。大学では、かなり長く“応用数学”を担当した(当塾のHPに掲載している、ラプラス変換と常微分方程式(pdf)、フーリエ解析と偏微分方程式(pdf)を参照)

筆者は間もなく80歳を迎え、このメモのもととなった書籍を含め、しばしばは引用しない(洋書を含む)全ての本、殆どすべての数学、物理学、機械工学の専門書、3つの学会誌、論文の原稿など、全て断捨離して、手元がない。

したがって、圧縮して記述する。さらにここでは、スペースの関係で、ベン図などの議論を全て省略した。

『春夏秋冬 413号』 数学的に明確に定義された物や事柄の集まりを集合という。美人の集まりなどは集合とは言わない。その集合に属するものを要素あるいは元という。 x が集合 A の要素であることを $x \in A$ (あるいは $A \ni x$)と表す。また、 x が集合 A の要素でないことは $x \notin A$ と表す。集合 A と要素 x に関して、

$x \in A$ か $x \notin A$ のいずれか一方が成り立ち、両方が同時に成り立つことはない

とする。集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表す。要素の個数が有限個の場合を有限集合、無限個の場合を無限集合という。集合の表し方には、大きく分けて2通りの方法がある。その一つは「列挙型の記法」である。 x_1, x_2, \dots, x_n を要素とする集合を $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ などと、要素を列挙して括弧 $\{\}$ で囲む方法である。無限集合の場合も、たとえば自然数全体の集合を $\{1, 2, \dots\}$ などと表すこともある。もう一つの集合の表し方は「内包的な記述」による方法である。集合の要素を特徴づける性質や条件を明示して、それに属する要素の集まりであることを示す。一般的な形は

$\{x | \dots\}$ とする。 x は集合の要素を表す仮の記号で、 \dots の部分にこの x の性質・条件を書く。さらにその x の範囲を表す集合 D に限るときは、 $\{x \in D | \dots\}$ と表すこともある。

要素を一つも持たない集合を空集合といい、ギリシャ文字 ϕ で表す。即ち $\phi = \{\}$ である。また、あらかじめ考えているもの全体を全体集合といい、記号 U を用いる。

2つの集合 A, B において、 A の全ての要素が B に属するとき、 A は B の部分集合といい、

$$A \subset B \iff \text{全ての } x \text{ に対して, } x \in A \text{ ならば } x \in B$$

と表す。 A と B の関係 $A \subset B$ を包含関係^{ほうがん}という。($A \subset B$ を $B \supset A$ と書くこともある。)
包含関係には明らかに次の性質が成り立つ。

$$A \subset A, \phi \subset A \subset U, \quad A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

次の例について、上の全てを確認してください。
 $U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$
 $A = \{a, c, f\}, B = \{a, c, d, e, f\}, C = \{a, c, d, e, f, g\}$
列挙型の有限集合の場合は例から自明ではあるが、論証の道場と見なし、一般の集合についての証明を試みてください。たとえば、 $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ については、次のようになる。
 $x \in A$ の任意の x にたいして(今後はこれを、 $x \in A$ とする、と略記。), $A \subset B$ より $x \in A$ だから $x \in B$ 。
さらに、 $B \subset C$ より $x \in B$ だから $x \in C$ 。よって、 $x \in A$ ならば $x \in C$ 。したがって $A \subset C$ 。
 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき、 A と B は等しいと言う。

$$A = B \iff A \subset B \text{ かつ } B \subset A$$

$$\iff \text{「全ての } x \text{ について, } x \in A \iff x \in B \text{」}$$

A と B が等しくないことを $A \neq B$ と表す。
また、 $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき、すなわち、 A は B の部分集合であるが、 B の中に、 A に属さない要素があるとき、 A は B の真部分集合^{しんぶぶんしゅうごう}とい

$$A \subsetneq B \iff A \subset B \text{ かつ } A \neq B$$

と表す。(\subsetneq を \subset と表す人もある。)
[例題1] $A = \{4n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}, B = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$ であるとき、 $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であることを証明せよ。ただし、 \mathbb{Z} は整数全体の集合である。

$x \in A$ とすると、 $x = 4n + 1$ (n は整数)と書ける。このとき、 $x = 2(2n) + 1$ 。 $2n$ は整数であるから、 $2(2n) + 1 \in B$ 、すなわち、 $x \in A$ ならば、 $x \in B$ であるから、 $A \subset B$
また、 $3 \in B$ であるが、 $3 \notin A$ 。したがって、 $A \neq B$
[例題2] \mathbb{Z} を整数全体の集合とすると、次の集合 A, B は等しいことを証明せよ。

$A = \{2x + 3y | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}, B = \{3x + 5y | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$
まず、 $A \subset B$ を証明
 $a \in A$ ならば、 $a = 2m + 3n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$)と表される。
また、 $a = 2m + 3n = 3(-m + n) + 5m$ 、 $-m + n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ であるから、 $a \in B$ よって、 $A \subset B$
つぎに、 $B \subset A$ を証明
 $b \in B$ ならば、 $b = 3m + 5n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$)
また、 $b = 3m + 5n = 2n + 3(m + n)$ 、 $n \in \mathbb{Z}, m + n \in \mathbb{Z}$ であるから、 $b \in A$ よって、 $B \subset A$
 $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから、 $A = B$

[例題3] 整数全体の集合 \mathbb{Z} と集合 $A = \{19m + 12n | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ について、 $A = \mathbb{Z}$ であることを証明せよ。
 $a = 19m + 12n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$)は整数である。よって $A \subset \mathbb{Z}$
 $19, 12$ は互いに素より、 $19m + 12n = 1$ となる整数 m, n が存在する(ベズーの等式)。任意の $z \in \mathbb{Z}$ について、 $z = 19mz + 12nz$ $mz \in \mathbb{Z}, nz \in \mathbb{Z}$ より、 $z \in A$ 。よって $\mathbb{Z} \subset A$ したがって、 $A = \mathbb{Z}$

全体集合 U に属し、集合 A に属さない要素の集合を A の補集合^{ほしゅうごう}といい、 \bar{A} と表す。

$$\bar{\bar{A}} = \{x | x \notin \bar{A} \text{ かつ } x \in U\}$$

補集合には次の性質がある。 $x \in U$ について、
 $x \notin A \iff x \in \bar{A}$ $x \in A \iff x \notin \bar{A}$
 $\bar{\bar{A}} = A$ $A \subset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$
 $x \notin A$ とする。よって $x \in \bar{A}$ 。
また $x \in \bar{A}$ とする。よって $x \notin A$ 。即ち、これらは \bar{A} の定義
 $x \in A$ とする。 $x \in \bar{A}$ と仮定すると、 $x \notin A$ 。これは矛盾。よって $x \notin \bar{A}$ 。
また、 $x \notin \bar{A}$ とする。 $x \notin A$ と仮定すると $x \in \bar{A}$ 。これは矛盾。
よって $x \in A$ 。
 $x \in \bar{A}$ とする。 $x \notin \bar{A}$ 、よって $x \in A$ 。
また $x \in A$ とする。 $x \notin \bar{A}$ 、 $x \in A$
 $A \subset B$ とする。 $x \in \bar{B}$ かつ $x \notin \bar{A}$ なる x が存在したとする。
 $x \in A, A \subset B$ より、 $x \in B$ 。これは $x \in \bar{B}$ と矛盾。したがって、 $x \in \bar{B}$ ならば、 $x \in \bar{A}$ 。ゆえに $\bar{A} \supset \bar{B}$ 。

2つの集合 A, B の要素を全てあわせて得られる集合を和集合(結び)といい、 $A \cup B$ と表す。したがって

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

である。

「 P または Q 」とは、「少なくとも P または Q が真である」という意味であり、 P も Q も真、 P だけ真で Q は偽、 P は偽で Q は真、の3つの場合がある。集合の定義や、論理展開の中に既に「論理」の考えが入っており、「集合と推論」のところでは、その関係がより明確になる。「かつ」「ならば」「否定」「矛盾」などの用語も同じである。ここでの学習の目的は、集合の公理系を明らかにすることではない。

和集合の定義からただちに、

$$x \in A \cup B, x \notin A \Rightarrow x \in B \quad x \in A \cup B, x \notin B \Rightarrow x \in A$$

が得られる。

ただちに、と書きましたが、「証明」を試みてください。(以後、こうした注釈は書きません)

$x \in A \cup B, x \notin A$ とする。もし、 $x \notin B$ を仮定すると、 x は A にも B にも属さないから、 $x \notin \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} = A \cup B$ となり、 $x \in A \cup B$ と矛盾。したがって、 $x \in B$ 。また明らかに和集合について次の性質が成り立つ。

$$C \supset A, C \supset B \Rightarrow C \supset A \cup B \dots \text{「和の導入則」}$$

$$A \cup B \supset A, A \cup B \supset B \dots \text{「和の除去則」}$$

$C \supset A, C \supset B$ とする。 $x \in A \cup B$ ならば、 $x \in A$ または $x \in B$ 。よって $x \in A \subset C$ または $x \in B \subset C$ 。いずれにしても、 $x \in C$ 。したがって、 $C \supset A, C \supset B \Rightarrow C \supset A \cup B$
 $x \in A$ とする。このとき、 $x \in A$ または $x \in B$ 。よって $x \in A \cup B$ 。したがって、 $A \subset A \cup B$ 。

「和の導入則」と「和の除去則」は、 $A \cup B$ は A, B をともに含む集合であって、そのような集合のうち、要素の数が一番小さい集合であることを意味し、対で和集合の定義と考えることもできる。したがって、「導入」「除去」という語は相対的な呼び方にすぎない。

「和の導入則」と「和の除去則」は和集合の定義と考えることが出来る、ということをもう少し詳しく見ておこう。

2つの定義が同値であることを示すためには、

和集合の定義を $A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$,

和の導入則を $C \supset A, C \supset B \Rightarrow C \supset f(A, B)$,

和の除去則を $f(A, B) \supset A, f(A, B) \supset B$

としたとき、 $A \cup B \subset f(A, B)$, $f(A, B) \subset A \cup B$ を示せばよい。

$x \in A \cup B$ とする。すなわち、 $x \in A$ または $x \in B$ 。

$x \in A$ のとき、 $A \subset f(A, B)$ より、 $x \in f(A, B)$ 。

$x \in B$ のとき、 $B \subset f(A, B)$ より、 $x \in f(A, B)$ 。

いずれにしても、 $x \in f(A, B)$ 。したがって、 $A \cup B \subset f(A, B)$ 。

また、 $x \in f(A, B)$ とする。

$C \supset A, C \supset B$ なる C が存在する。(例 $C = A \cup B$)

$C \supset f(A, B)$ より、 $C \ni x$ 。したがって、 $f(A, B) \subset A \cup B$ 。

こうした定義からただちに

$$A \cup \bar{A} = U \dots \text{「排中律に相当」, } A \cup \phi = A$$

が成り立つことがわかる。

和の除去則 $A \cup B \supset A$ すなわち、「 $x \in A$ ならば、 $x \in A \cup B$ 」を、補集合で表現すると、「 $x \notin \bar{A}$ ならば、 $x \notin A \cup B$ 」となる。さらに明らかに、

$$A \cup A = A \dots \text{「等中則」, } A \cup B = B \cup A \dots \text{「交換法則」}$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \dots \text{「結合法則」}$$

が成り立つ。

和の除去則より、 $A \cup A \supset A$

また、和の導入則と $A \supset A$ より $A \supset A \cup A$ 。したがって $A \cup A = A$

和の除去則より、 $C = A \cup B$ とおく。 $C \supset A, C \supset B$ 。順序を入れ替えて、 $C \supset B, C \supset A$ 。よって和の導入則より、 $A \cup B = C \supset B \cup A$ 。

同様に、 $A \cup B \subset B \cup A$ 。ゆえに、 $A \cup B = B \cup A$

$D = (A \cup B) \cup C$ とおく。和の除去則を用いると、 $D \supset A, D \supset B, D \supset C$

となる。 $D \supset B, D \supset C$ に和の導入則を適用すると、 $D \supset B \cup C$ 。

$D \supset A, D \supset B \cup C$ に和の導入則を適用すると $D \supset A \cup (B \cup C)$

となる。すなわち、 $(A \cup B) \cup C \supset A \cup (B \cup C)$ 。全く同様に、

$A \cup (B \cup C) \supset (A \cup B) \cup C$ 。よって、 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

2つの集合 A, B の両方に共通の要素をすべて集めて得られる集合を共通部分(交わり、積集合)といい、 $A \cap B$ と表す。したがって、

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

である。明らかに共通部分について次の性質がある。

$$C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B \dots \text{「積の導入則」}$$

$$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B \dots \text{「積の除去則」}$$

$C \subset A, C \subset B$ とする。 $x \in C$ ならば $x \in C \subset A$ かつ $x \in C \subset B$ 。

よって $x \in A \cap B$ 。したがって、 $C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$
 $x \in A \cap B$ とする。 $x \in A$ 。したがって、 $A \cap B \subset A$ 。

「積の導入則」と「積の除去則」は、 $A \cap B$ は A, B の両方に含まれる集合であって、そのような集合の内、要素の数が最大のものであることを意味し、積集合の定義と考える事もできる。

〔演習〕 「積の導入則」と「積の除去則」は積集合の定義と同値であることを証明せよ。

2つの定義が同値であることを示すためには、

積集合の定義を $A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$,

積の導入則を $C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset f(A, B)$,

積の除去則を $f(A, B) \subset A, f(A, B) \subset B$

としたとき、 $A \cap B \subset f(A, B)$, $f(A, B) \subset A \cap B$ を示せばよい。

$x \in A \cap B$ とする。すなわち、 $x \in A, x \in B$ 。したがって、

$x \in C, C \subset A, C \subset B$ なる C が存在する。(例 $C = \{x\}$)。

$C \subset f(A, B)$ より、 $x \in f(A, B)$ 。したがって、 $A \cap B \subset f(A, B)$

また、 $x \in f(A, B)$ とする。 $f(A, B) \subset A, f(A, B) \subset B$ より $x \in A$,

$x \in B$ よって $x \in A \cap B$ 。したがって、 $f(A, B) \subset A \cap B$ 。

こうした定義からただちに

$$A \cap \bar{A} = \phi \dots \text{「矛盾律に相当」, } A \cap \phi = \phi \dots \text{「統治則」}$$

が成り立つことがわかる。

積の除去則の対偶は「 $x \notin A$ ならば、 $x \notin A \cap B$ 」となる(対偶は論理のところで説明する。矛盾の考えが論拠)。これを補集合で表現すると、 $x \in \bar{A}$ ならば、 $x \in \overline{A \cap B}$ となる。さらに明らかに、

$$A \cap A = A \dots \text{「等中則」, } A \cap B = B \cap A \dots \text{「交換法則」}$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \dots \text{「結合法則」}$$

が成り立つ。

〔演習〕 $A \cap A = A, A \cap B = B \cap A, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ が成り立つことを証明せよ。

積の除去則より、 $A \cap A \subset A$

また、積の導入則と $A \supset A$ より $A \supset A \cap A$ 。したがって $A \cap A = A$

$C \supset A, C \subset B$ 。順序を入れ替えて、 $C \subset B, C \subset A$ 。よって積の導入則より、 $C = A \cap B \subset B \cap A$ 。

同様に $B \cap A \subset A \cap B$ ゆえに、 $A \cap B = B \cap A$

$D = (A \cap B) \cap C$ とおく。積の除去則を用いると、 $D \subset A, D \subset B, D \subset C$

となる。 $D \subset B, D \subset C$ に積の導入則を適用すると、 $D \subset B \cap C$ 。

$D \supset A, D \subset B \cap C$ に積の導入則を適用すると $D \supset A \cap (B \cap C)$

となる。すなわち、 $(A \cap B) \cap C \supset A \cap (B \cap C)$ 。全く同様に、

$A \cap (B \cap C) \supset (A \cap B) \cap C$ 。したがって、 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

集合の範囲、包含関係を図式化したものを一般に「ベン図」という。ただしベン図の議論は全て省略する。

〔例題1〕 全体集合を $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ とする。

偶数の集合を A とすると

$A = \{0, 2, 4, 6, 8, 10\}$ あるいは $A = \{x | x \in U \text{ かつ } x = 2y, y \text{ は整数}\}$

である。3の倍数の集合を B とすると

$A \cup B = \{0, 2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$, $A \cap B = \{0, 6\}$

また、

$\bar{A} = \{1, 3, 5, 7, 9\}$

空集合 ϕ には一つも要素を含んでいないから、 $n(\phi) = 0$ である。集合 A の個数は

$n(A) = 6, n(\bar{A}) = 5$

〔例題2〕 次のことを証明しておこう。

(1) $A \cup (A \cap B) = A, A \cap (A \cup B) = A$ (吸収法則)

$A \supset A, A \supset A \cap B$ より $A \supset A \cup (A \cap B)$ 。また、

$A \cup (A \cap B) \supset A$ 。よって $A \cup (A \cap B) = A$

$A \subset A, A \subset A \cup B$ より $A \subset A \cap (A \cup B)$ 。また、

$A \cap (A \cup B) \subset A$ 。よって $A \cap (A \cup B) = A$

(2) $A \subset B \iff A = A \cap B \iff B = A \cup B$

$A \subset B$ とする。 $A \subset A, A \subset B$ より $A \subset A \cap B$ 。また

$A \supset A \cap B$ 。したがって $A = A \cap B$

(3) $A \subset B \Rightarrow A \cup C \subset B \cup C, A \cap C \subset B \cap C$

$B \cup C \supset C, B \cup C \supset B, B \supset A$ より $B \cup C \supset A$ 。したがって、

$B \cup C \supset A \cup C$

$A \cap C \subset C, A \cap C \subset A, A \subset B$ より $A \cap C \subset B$ 。したがって、

$A \cap C \subset B \cap C$

集合の和と積にまたがる演算には分配法則、

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

が成立する。

分配法則 $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ を”証明”しておこう。

$x \in A \cap (B \cup C)$ は、 $x \in A$ かつ ($x \in B$ または $x \in C$) を意味する。一方

$x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ は、($x \in A$ かつ $x \in B$) または ($x \in A$ かつ $x \in C$)

を意味する。これらは論理的に同じことを意味する。もう少し丁寧に説明

する。

(1) $x \in A \cap (B \cup C)$ とする。 $x \in A$, $x \in B \cup C$
 $x \in B$ ならば, $x \in A \cap B$, よって $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 $x \notin B$ ならば, $x \in B \cup C$ より $x \in C$, よって $x \in A \cap C$, したがって, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$
 いずれにしても, $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$

(2) $x \in (A \cap B) \cup (A \cap C)$ とする。 $x \in A \cap B$ または $x \in A \cap C$
 $x \in A \cap B$ ならば, $x \in A$, $x \in B$, $x \in B \cup C$, したがって $x \in A \cap (B \cup C)$

$x \in A \cap C$ ならば, $x \in A$, $x \in C$, $x \in B \cup C$, したがって, $x \in A \cap (B \cup C)$
 いずれにしても, $x \in A \cap (B \cup C)$

[演習] 分配法則 $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ を証明せよ。

(1) $x \in A \cup (B \cap C)$ とする。 $x \in A$ または $x \in B \cap C$
 $x \in A$ ならば, $x \in A \cup B$, $x \in A \cup C$, よって, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 $x \in B \cap C$ ならば, $x \in B$, $x \in C$, $x \in B \cup A$, $x \in C \cup A$ より $x \in A \cup C$, よって, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$
 いずれにしても, $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$

(2) $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$ とする。 $x \in A \cup B$, $x \in A \cup C$
 $x \in A$ ならば, $x \in A \cup (B \cap C)$
 $x \notin A$ ならば, $x \in A \cup B$ より $x \in B$, $x \in A \cup C$ より $x \in C$, よって $x \in B \cap C$ したがって, $x \in A \cup (B \cap C)$
 いずれにしても, $x \in A \cup (B \cap C)$

ド・モルガンの法則が成り立つ。

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

$\overline{A \cup B} = \bar{A} \bar{B}$ は次のように”証明”する事もできる。

(1) $x \in \overline{A \cup B}$ とする。いま仮に, $x \in A$ とする。
 したがって $x \in A \cup B$ 。これは $x \in \overline{A \cup B}$ に矛盾する。よって, $x \in \bar{A}$ 。
 同様に, $x \in \bar{B}$ 。したがって, $x \in \bar{A} \bar{B}$

(2) $x \in \bar{A} \bar{B}$ とする。したがって $x \in \bar{A}$, $x \in \bar{B}$ 。いま仮に, $x \in A \cup B$ とする。

$x \in \bar{A}$, $x \in A \cup B$ から $x \in \bar{A} \cap (A \cup B)$ 。分配法則 $\bar{A} \cap (A \cup B) = (\bar{A} \cap A) \cup (\bar{A} \cap B) = \phi \cup (\bar{A} \cap B) = \bar{A} \cap B$ より, $x \in \bar{A} \cap B$, よって $x \in B$ 。これは $x \in \bar{B}$ に矛盾。したがって $x \in \overline{A \cup B}$

[演習] ド・モルガンの法則 $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ が成り立つことを証明せよ。

(1) $x \in \overline{A \cap B}$ とする。
 $x \in \bar{A}$ ならば, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$
 $x \in A$ ならば, $x \in B$ とすると, $x \in A \cap B$ となり矛盾。したがって, $x \in \bar{B}$, よって $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$
 いずれにしても, $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$

(2) $x \in \bar{A} \cup \bar{B}$ とする。 $x \in \bar{A}$ または $x \in \bar{B}$ すなわち, $x \notin A$ または $x \notin B$
 $x \notin A$ のとき, $x \notin A \cap B$
 $x \notin B$ のとき, $x \notin A \cap B$
 いずれにしても $x \notin A \cap B$ よって $x \in \overline{A \cap B}$

3 「集合」の応用例として, 集合の要素の個数の求めかたはを『中学数学発展』に従って記しておく。

集合の要素の個数を求めるには次の公式が役立つ。

- (1) $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$
- (2) $A \cap B = \phi$ のとき, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- (3) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- (4) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B) - n(B \cup C) - n(C \cup A) + n(A \cap B \cap C)$
- (5) $n(\overline{A \cap B \cup C}) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

これらは, よく知っている「ベン図」から明らかである。しかし本来, 「ベン図」とか, 「**ダイアグラム」とかは, 全て証明が必要である。これは「ベン図」の証明となっている。

よく知っているように, 4個以上の集合の実用的なベン図は描くことはできない。勿論, 4個の集合について, 工夫されたものはいくつか存在する。自分で調べて頂きたい。

集合演算の練習のため, (1), (2) を使って, 詳しく, (3) 以下を証明しておこう。

$$(3) \quad X \cap Y = \phi \text{ のとき, } \quad n(X \cup Y) = n(X) + n(Y) \quad \dots (a)$$

$$A \cap (\bar{A} \cap B) = (A \cap \bar{A}) \cap B = \phi \cap B = \phi \quad \dots (b)$$

(a), (b) より

$$n(A \cup B) = n(A \cup (\bar{A} \cap B)) = n(A) + n(\bar{A} \cap B) \quad \dots (c)$$

$$\begin{aligned} (\bar{A} \cap B) \cap (A \cap B) &= ((\bar{A} \cap B) \cap A) \cap B \\ &= (\bar{A} \cap (B \cap A)) \cap B = (\bar{A} \cap (A \cap B)) \cap B \\ &= ((\bar{A} \cap A) \cap B) \cap B = (\phi \cap B) \cap B = \phi \quad \dots (d) \end{aligned}$$

$$(\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B) = (\bar{A} \cup A) \cap B = U \cap B = B \quad \dots (e)$$

(分配法則を逆に用いる)

$$(a), (d), (e) \text{ より } \quad n(B) = n((\bar{A} \cap B) \cup (A \cap B)) = n(\bar{A} \cap B) + n(A \cap B)$$

$$\text{よって } \quad n(\bar{A} \cap B) = n(B) - n(A \cap B) \quad \dots (f)$$

したがって, (c), (f) より

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

(4) (4) は (3) を繰り返せばよい。

$$\begin{aligned} n(A \cup B \cup C) &= n(A \cup B) + n(C) - n((A \cup B) \cap C) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - n((A \cap C) \cup (B \cap C)) \\ &= n(A) + n(B) - n(A \cap B) + n(C) - \{n(A \cap C) + n(B \cap C) - n((A \cap C) \cap (B \cap C))\} \\ &= n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

$$(5) \quad (A \cap \overline{B \cup C}) \cup (\bar{A} \cap \overline{B \cup C}) = \overline{B \cup C}$$

$$(A \cap \overline{B \cup C}) \cap (\bar{A} \cap \overline{B \cup C}) = \phi \quad \text{より}$$

$$\begin{aligned} n(A \cap \overline{B \cup C}) &= n(\overline{B \cup C}) - n(\bar{A} \cap \overline{B \cup C}) \\ &= n(U) - n(B \cup C) - \{n(U) - n(A \cup (B \cup C))\} \\ &= -n(B \cup C) + n(A) + n(B \cup C) - n(A \cap (B \cup C)) \\ &= n(A) - n((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\ &= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n((A \cap B) \cap (A \cap C)) \\ &= n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C) \end{aligned}$$

以下では, 全ての要素は同じ確率で起こる とする。このとき A が起こる確率は, 全体集合を U とすると,

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

となる。

(3) を用いると,

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= \frac{n(A \cup B)}{n(U)} = \frac{n(A) + n(B) - n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \end{aligned}$$

また, 2つの事象 A と B について, 事象 A が起こったとき, 事象 B が起こる確率を A が起こったときの条件付き確率といい, $P_A(B)$ で表す。

確率の乗法定理

$$\begin{aligned} (A \text{ と } B \text{ がともに起こる確率}) &= (A \text{ の起こる確率}) \\ &\quad \times (A \text{ が起こったとしたときの } B \text{ の起こる確率}) \\ P(A \cap B) &= P(A) \cdot P_A(B) \end{aligned}$$

証明は,

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= \frac{n(A \cap B)}{n(U)} \\ &= \frac{n(A)}{n(U)} \cdot \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = P(A) \cdot P_A(B) \end{aligned}$$