



創造性教育を！

「教師崩壊 先生数が足りない、質も危ない」

妹尾昌俊著 PHP新書 2020年4月 第一版

には、半数近くの教師が「創造力」「批判的思考力」を指導できている判断している、とする著者自身が行った調査結果を示しています。

児童生徒の創造力、クリエイティビティを高めることについて

	解答者数	大変よくできている	どちらかといえばできている	どちらかといえばできていない	全くできていない
小学校	303	1.0%	42.9%	49.5%	6.6%
中学校	184	6.0%	42.4%	44.6%	7.1%
高校	194	3.6%	33.5%	52.1%	10.8%

妹尾氏は、筆者が尊敬する「教育研究家」(著者自身の表現)の一人であり、多くの公的な機関での活躍は高く評価されています。

当塾は、泉南市にあります。2022年3月、泉南市立中学校に通っていた一人の中学1年生の男子生徒が自殺しました。この本には、多くの先生の命が失われている原因についても書かれています。また、毎年行う全国学力テスト(児童生徒向けのアンケート調査を含む)に異を唱えています(筆者は、小・中学生への一切のペーパーテストに反対しています)。未読の読者には、話題いっぱいの「教師崩壊 * *」を是非読んでおいていただきたいと思います。

その妹尾氏においてさえ、上記の「児童生徒の創造力、クリエイティビティを高めること」について、小・中・高の先生が、そこそこの教育成果を出していると判断している、と言うのです。小・中・高の先生が、どんな感想を持つのも自由ですが、その判断には、現代が要請する主要な学力「知的創造的能力」とか「クリエイティビティ」の実体について、現実とはあまりにもかけ離れた認識がその背景にあると考えられます。時代に適合しない学力観では、いくら周到に教育を行っても、この国の科学技術と労働の生産性の向上に大きく寄与することはできません。

妹尾氏の「教師と学校の失敗学」にも、非常に優れた分析が多く見られますが、それらについては別の機会にコメントさせていただきます。

筆者は教育改革は、主要には教育内容の改革だと考えています。それを実現するために、教育制度を改革しなければなりません。『春夏秋冬 415号』で一例として提案した図形の計量の学習法は、相似な図形の性質を用いて実質的な積分を行うよう工夫したものであり、筆者は高校数学への橋渡しを行う手法として非常に意義深いと考えていますが、未だ、どこからの反応もありません。本号の『春夏秋冬 416号』には、「作図」教育についての筆者の考え方を示しています。是非最後までお読み頂き、特にオンライン教育は、現代が主要に要請する「知的創造的能力」の育成に、補助的な役割しか

果たせないことを御理解いただきたい、と考えています。

現代が要請する教育を！

1 毎回、同じことを書いて恐縮します。

英教育専門誌「タイムズ・ハイヤー・エデュケーション (THE)」は10月12日、2023年版の世界大学ランキングを発表しました。日本の最上位は東京大の39位(前年35位)、2番手は京都大の68位(同61位)で、100位以内に入った日本勢は2校だけでした。100位以内に中国勢が7校入りしました。もはや、この国の基礎科学力においては、完全に世界の二流国になってしまっているのです。

10月初旬のノーベル賞ウィークでのマスコミは、「昨年の真鍋叔郎氏に続いて、2年連続となるか」など、異常な騒ぎでした。勿論、選考委員以外の人には確かな予想などできないだけでなく、また、3人の受賞候補者がいたことも事実です。しかし、日本の複数のノーベル賞受賞者が、このままではいずれ誰もこの国から受賞者は出なくなる、と言っていたことこそが、この国の現実であることを忘れてはなりません。ノーベル賞ウィークでのマスコミの喧騒は、この国の科学技術の現状に対する楽観過ぎる見通しに基づいたものだったことを示しました。

筆者は、この国の科学技術の指標をノーベル賞受賞のみに置いているわけではありません。

朝日新聞は、10月16日、「社説余滴」の欄に、「ノーベル賞選考の妙 行方史郎」を掲載しました。「人類に最大の恩恵をもたらした人に贈る」という趣旨に照らせば、物理学、化学、医学・生理学という枠で、自然科学系の業績を選ぶやり方は時代にそぐわなくなっているのではないかと、という疑問に、近年のノーベル賞には、その選出に、巧みな選考方法を援用して、ノーベル賞の権威を維持している、と主張しました。

筆者が懸念しているのは、日本では、ノーベル賞受賞や、基礎科学に関わる大学の「タイムズ・ハイヤー・エデュケーション (THE)」や「クアクアレリ・シモンズ (QS)」のランキング、文科省科学技術・学術政策研究所 (NISTEP) などの、主に「論文数」「論文の質」に関わる資料を軸に評価するやり方を軽視し、目先の応用技術での、それも数少なくなっている実績のみでの、この国の現実の科学技術力の過大(肯定的)評価が横行していることです。

朝日新聞「EduA 9月号」は「アントレで変わる教育」を特集し、「アントレプレナー教育」(起業家教育)がこの国の基礎科学振興・知的創造的能力育成やこの国の科学技術の全方位での後退の改善に大きく貢献する、とありました。しかし、『春夏秋冬 415号』(11月号)では、それは必ずしも真実ではないことを主張しました。

この数か月で発表されたこの国の科学技術と経済の全ての指標は、この国の科学技術力と労働の生産性の全面的後

退がより深刻化していることを示しています。繰り返し述べてきましたが、それは、その基礎であるこの国の「知的創造的能力」の著しい停滞・後退が続いているからです。

2 日本の科学技術力と労働の生産性の向上には、この国の基礎科学教育の抜本的かつ早急の改革が不可欠であることが、ますます明らかになっています。

朝日新聞(10/17)によると、自ら課題を見つけ、仮説を立て、解決策を模索する――。そんな「探究力」を評価する大学入試が広がっているそうです。高校では、探究に重きを置いた新学習指導要領が今年の1年生から実施されています。それによると、

桜美林大が今年度入試から始めた「探究入試 Spiral」の書類審査の一場面。受験生に高校時代の経験を振り返ってもらい、書類とプレゼンテーション、面接で評価する。内容は授業でも課外活動でも何でもよく、受賞歴なども問わない。学んだことをきちんと整理し、自らの気づきや成長を伝える力が問われる。

宮坂麻子氏の、これに対するコメントも掲載されていました。「特に国立の難関大学では、大学入学共通テストで「〇割以上得点」などのように、学力面でも基準を設ける大学も多く、『結局は、学力も求められてしまい、一般選抜でも十分に合格しそうな層しか受かっていかない』という声も校長たちからはあがる」そうです。

朝日新聞(10/18)は、「大学入試は、12月にかけて、受験生の個性を重視する『総合選抜』や高校の校長が推薦する『学校推薦型選抜』が本格化していく。こうした学力以外の要素を用いる方式で進学する学生は、21年春の入学者で半数を超えている」と報じました。

新聞記事には、次のようにも書いてありました。文部科学省は20年度、AO入試を総合型選抜へ、推薦入試を学校推薦型選抜へと名称を変更。大学には、小論文や面接などで学力を測るよう求めました。

恐れ入ります。小論文や面接などで学力が測れるという。彼らの学力観では、絶対にこの国は立ち直すことはできません。「即興力」テストである筆記テストより、少しはましかもしれませんが、現代が主要に要請する学力「知的創造的能力」が小論文や面接などで測れるのならば、直ちに全ての入試を小論文や面接に転換すべきはずです。学力観が完全に狂っている、としか考えられません。

「アントレプレナー教育」、「探求入試」、その他もろもろの教育改革が試行されていますが、現在のところ、それらにこの国の科学技術力の凋落傾向を阻止する効果はほとんど期待できません。その主要な原因は、彼らの学力観が現代に全く適応していないからです。即ち、現代が主要に要請する教育目標「知的創造的能力」とは全く異質の、一言で言えば「即興力」を学力と見なしているからです。小学上級生・中等教育・大学学士課程にある若者を、「総合選抜」、「学校推薦型選抜」、「小論文や面接による選抜」、「探求入試」など、何らかの「即興力入試」で何らかの「知的創造的能力」あるいは「知的創造性に結びつく能力」を検定するなど絶対にできないからです。あらゆる「即興力入試」は、全面的に即時廃止するしか道はありません。

この国の危機は日に日に深化しているにもかかわらず、『春夏秋冬414号』で書いた通り、経済産業省の「未来人材ビジョン」には、教育改革の着手には「残り時間は、あと数年しかない」などと悠長なことが書かれています。しかし、現実には、もはやそんな余裕は全くなくなっています。いずれ、主要な教育目標「知的創造的能力の育成」への転換と当塾が提唱するような教育制度への抜本的な改革は不可避です。言葉は汚いですが、現状のようなチンタラした進め方では、隷属と荒廃が支配するみじめな社会となってしまうのは、火を見るよりも明らかです。

3 『春夏秋冬414号』で書いた、当塾の改革案を再度書いておきます。

(1) 「現代が要請する主要な教育目標」は「知的創造的能力育成の教育」であり、その実現は僅かでも「知的創造的実績」を持った教師によってしか実現できない。「知的創造的成果(基礎科学)」を理解すること、自らが知的創造性を発揮することは、天と地ほどの隔りがある。確立した科学をいくら正確に理解していても、自らが創造的実績を出せる保証はどこにもない。「知的創造的実績」を出す確かな方策は、科学を正確に理解するだけでなく、どうした具体的(歴史的)契機を媒介にして創造性が獲得されるのか、創造性を発揮した人たちは他の人が持っていなかったどんな多様性・個性(特異性)がその実績に寄与したのか、を学んでおかねばならない。確立した科学を正確に修得し、如何に要領よく「即興的」に既に解かれた課題にマニュアルに従って応えることができたとしても、その人の「知的創造的能力」を検定したことにはならない。現代の教育の主要な目標は「知的創造的な能力」自身であり、実績を持たない人の基礎科学教育の担当能力は未知数である。現代でも当然のごとく多くは大学院では創造的実績を持った人が教授を務めている(怪しげな教授も多数いる)ことになっているが、それは全く同様の理由によって、中等教育や大学の学士課程教育においても創造的実績をもった人でなければ、創造性教育を担当することはできないことを意味する。

(2) この国の低迷は、高度な知的創造的活動に専念できる人が少ないことに起因する。研究開発費の倍額ではなく、多様な課題に応え得る大量の創造的能力を持った人材の育成こそが必要である。一方で、研究開発者は、広い意味で常に何らかの自らの後継者の養成に関わらざるを得ない。それを、大学院の教授だけでなく、中等教育、大学学士課程の教師にも拡張すればよい。したがって、中等教育、大学学士課程の「創造性教育」における教師の資格は、「知的創造的実績」のある人である。

(3) 中等教育、大学学士課程の教師の教育ノルマを週2日程度以内に制限し、残りの全ての時間を研究・開発的労働に従事させる。身分保障・生活保障は、教育ノルマだけで行う。

一般に、どの教科においても、教育には多くの補助的な労働が伴う。そうした労働には、現在の学卒程度の学力を持ち、少々の教師としての訓練を受けた多くの人たちが分担すればよい。広い意味での教育は、従って、学校教育は国民全体の課題であり、それぞれは、自らの能力に応じた貢献ができるよう組織しなければならない。

(4) 「知的創造的能力」の重要な要素の一つは、基礎科学を完璧な完成したもとしてではなく、進歩・発展の歴史(論理)の中で理解すること、二つ目には、各自の創造性の源泉は各自を特徴づける多様性・個性にある。同じことを学んでも、同じ現実にあっても、他の人とは異なる受け止め・理解ができる。自らの持つ多様性・個性は感性とも言われることもあり、そ

れが合理性と結合したとき、創造性に発展する可能性を持っている。

(5) 母語や地域は多様性の宝庫である。初等・中等教育は自力で通える距離に、大学学士課程の大学は自宅から通える距離に、当面理学教育においては(いずれ社会科学においても)それぞれ個人の意欲と能力に応じた最適の教育コース・カリキュラムを開発しておく必要がある。

(6) 中等教育においても、半年前にはシラバスや講義要綱(参照:当塾のHPの「電磁気学メモ」「電磁気学講義詳細」)を公開し、受講選択の指導はあっても、最終的には受講者の責任において受講する、という形式にすればよい。

現在、「デジタル教科書」の導入が準備されている。「デジタル教科書」は、教育の無償化に大きく貢献できる。普及すれば、授業の進め方は、一変するだろう。基礎科学教育、即ち大学学士課程教育にまでそうしたものが進行すれば、学びは大きく変わるだろう。しかし、対面での、原理の確認・ディベート・実験観察資料の整理などの従来からの学びの基礎は欠かせない。「即興力」を検定する各種入学テスト、各種学力テストは、全面的に廃止すべきだ。

(7) 現代の学校は非常に多くの、しかも重要な任務を持っている。また、どの教科においても、教育には多くの補助的な労働が伴う。それぞれには、それぞれの課題を熟知した専門家を配すべきだ。教育レベルを向上させるためには、教師の任務を「知的創造的能力の育成」のみに絞るべきだ。

(8) 現在、私立中学校・高校や一部の公立中学校では「教科センター方式」の授業が行われている。これを中学、高校、大学学士課程教育全体に拡張すればよい。

直ちに、一部のカリキュラムは、公・私、中・高・大の壁を越えて、多様な生徒・学生の要望に応えられるよう改革すべきだ。勿論、教育は、全て無償が原則である。優れた教育への投資は、十数年後には、二倍どころか、何十倍もの経済効果を必ずもたらす。

追加の提案をします。

朝日デジタル 10月19日の記事によると、

東京都教育委員会は18日、勤務校の指導用書籍などをフリーマーケットアプリに出品して利益を得たとして、都立豊島高校の男性教諭(43)を同日付で懲戒免職にしたと発表した。

生徒は、意欲と能力に応じて、最大限、教科書のレベルを超えて自主的に学習できる体制に移行すべきである。指導用書籍を全面的に公開(誰でも適切に入手できることを含む)するのは、直ちに実現できる改革の重要な一歩となりえる。デジタル教科書は、自動的に、そうしたことが可能なように、編集することができる。あらゆるところ、あらゆる局面で、学校や大学の枠を飛び越えて、生徒・学生が、自らの意欲と能力に応じた学習が無償でできるように組織すべきだ。

以上は、あくまで中途段階のもので、さらに、「創造性教育」の実現には、もっと詳細な改革案が欠かせません。当塾ももう少し細部にわたった改革案を提案するつもりですが、今や、文科省・各教育委員会・教育学者などその道のプロが、その本来の使命を果たすべき時に至っているのではないのでしょうか。

4 上からの改革を待っていても、その時はすでに遅し、となる可能性が極めて大きくなっています。各個人は、自らを護り、変化に対応できるしかるべき力をつけることに着手しなければならなりません。多くの各個人は、受験や学力テストなどで要求される「即興力」ではなく、「知的創造的能力」

の獲得を目指した学習行動に全力で取り組み始めなければなりません。

全ての人が、「知的創造的能力」獲得の学習をしなければならない、と言っているではありません。

筆者の理解では、近い将来では、3割以上の人が、何らかの「知的創造的能力」を必要とする労働に就かねばなりません。労働の現場では、凄まじくAIなどによる自動化が進み、現実のAIだけでは処理できない人の「知的創造的能力」を要する労働がますますクローズアップされると考えられるからです。

主要な教育目標を「知的創造的能力」に置く限り、教師は「知的創造的能力」の実態である実績を少しでも持たなくては、その任に当たることは不可能です。「知的創造的能力」はスキル・即興力などは異質の存在だからです。AIとそれに基づく自動化は、すさまじい勢いで発展しています。しかし、初期に言われていたAIが人の知的活動を凌ぐ、即ちシンギュラリティーの到来は、あったとしても、まだまだ先の話です。現代と近い将来では、間違いなく人には「知的創造的能力」が主に問われる時代が続くと考えられます。

人類は長い歴史と豊かな文化を持っています。その多くは、当面の「知的創造的活動」とは独立の世界で機能します。多くの人は、そうした伝統や文化の中で生活し、労働します。筆者は70年近く前、中学1年の技術・家庭の最初の授業で、「職業に貴賤なし」という話を聞きました。そうした歴史的背景のもとで、経済の高度成長とこの国の圧倒的な基礎科学レベルの向上が達成されたのです。もう一度、そうしたことが言える時代にならなければならないと思っています。

この国は、かなり昔から、天然資源(自然資源)の乏しい国だと言われてき来ており、現在に至っては、人的資源も乏しくなっています。筆者の主張を言い換えれば、現代では少なくとも三割の人が「知的創造的活動」に携わる社会を早期に実現しない限り、現代の世界では確かな地位を維持することができない、となります。

どっぴりと「偏差値教育」に浸かったままでは、この国は立ち直ることはできません。

各教科は創造性を目標に!

1 一般に、 x, y の方程式 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$ で表されるグラフを二次曲線と言う。変数変換(合同変換: 平行移動, 回転移動, 対称移動)すると、以下のように分類できることが分っている。

- ① 楕円 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
- ② 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$
- ③ 放物線 $y = \frac{1}{4p}x^2$
- ④ 直線
- ⑤ 点

④, ⑤は特殊な場合です。

たとえば

https://ramenhuhu.com/math-quadratic_curve には以下の様に極めて簡潔に示されている。二次曲線は行列およびベクトルを用いて表すことができる。

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, $B = (p, q)$, $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$
 とすると、二次曲線の方程式 $ax^2 + 2bxy + cy^2 + px + qy + r = 0$ は
 $\vec{x}^T A \vec{x} + B \vec{x} + r = 0$
 と表すことができる。

A は実対称行列なので、直交行列を用いて対角化可能である。 A の固有値を λ_1, λ_2 とする。このとき、 $P^{-1}AP$ が固有値を対角成分にもつ対角行列となるような直交行列 P が存在する。

$P^{-1}AP = P^T AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$
 ここで、 $\vec{x} = P \vec{X}$ なる変数変換を考える。
 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$
 すると

$$\begin{aligned} \vec{x}^T A \vec{x} &= (P \vec{X})^T A (P \vec{X}) = \vec{X}^T (P^T A P) \vec{X} \\ &= (X \ Y) \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \end{aligned}$$

また

$$B \vec{x} = B P \vec{X} = (p' \ q') \vec{X}$$

となるので、式は

$$\lambda_1 X^2 + \lambda_2 Y^2 + p'X + q'Y + r = 0$$

と変形できる。

この式は XY の項を含まないので、平方完成すれば XY 座標系における二次曲線の概形を判別することができる。

たったこれだけのことで、基本的には、二次曲線の分類の議論は尽きるが、この程度のこと(極めて重要なことだが)は、探せば他のサイトでも類似の記述が見つかる。キーは実対称行列の知識だ。

一般に、微積と線形代数は、高校数学の基礎とされている。実対称行列の性質については、ネット上でも、極めて丁寧な解説がみられる。したがって、中学生でも、『中学数学基礎』レベルの学力と十分な意欲さえあれば、進んで高校の線形代数を学び、二次曲線の議論を卒業することができるだけでなく、その動機付けさえ与えられれば、自学自習でこれらを理解することもできる。こうして、数学の学習の進め方は、製作・実験・観測・資料の整理などが欠かせない他の科学の学習と少しだけ違う部分もある。

当塾は、数学を含む基礎科学力にかかわる「知的創造的能力」の基礎が、こうしたそれぞれの個性に即した先進的な学習が着実に進められるようなシステムを提案している。

結局、多くの中学生にとって、二次曲線は上記標準形の楕円、双曲線、放物線のことを指す。

2 放物線 $y = \frac{1}{4p}x^2$ を描くことを考える。

1 の $\lambda_2 = 0$ の場合で、さらに X 軸方向、 Y 軸方向に平行移動『春夏秋冬 407 号』の一部を再録する。

グラフ用紙で各 x に対する y をプロットしておよそのグラフが描ける。連続的にはどうしたら描けるだろうか。ボールの表面に墨を塗り、斜めに傾けた平板に斜め上方に初速度を与えて転がすと、平板に放物線状の軌跡が描ける。コンピュータでは簡単に描けるが、基本的には、 (x, y) の点をプロットしているのと同じである。放物線を連続的な曲線として正確に描こうとすれば、放物線の基本的な性質を少し学習しておかねばならない。

図のように、一つの直線 $y = -p$ (これを準線という)と定点 $F(0, p)$ (これを焦点という)からの距離が等しい点 $P(x, y)$ とする。すなわち $PF=PH$ である。

$$y + p = \sqrt{x^2 + (y - p)^2}$$

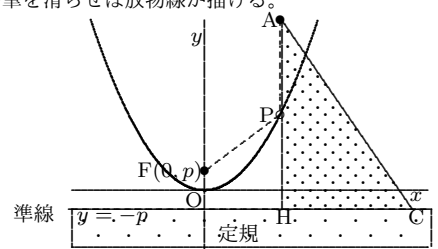
両辺を平方して整理すると

$$4py = x^2, \quad (y = \frac{1}{4p}x^2)$$

したがって、放物線は直線と定点からの距離が等しい点の集まり(軌跡)と言える。

この性質を用いると放物線は簡単に描ける。

はじめに、準線に定規を当て、三角定規 AHC の直角をはさむ 2 辺を y 軸と定規に合わせる。点 A と点 F を両端とし、 $AP+PF=AH$ に合わせて糸の長さを調節する。点 F にはまち針をたて糸を結ばよしい、点 A ではセロテープなどで三角定規に糸を固定すればよい。図のように三角定規を定規にそって滑らし、糸に鉛筆を掛け、三角定規の辺 AH から離れないようにして鉛筆を滑らせば放物線が描ける。



一人でやれないことはないが、2人で協力してやれば比較的簡単に作業を進めることはできる。当塾でも中3で、数年前までは毎年、この“作図”をやった。必ずやってみよう。

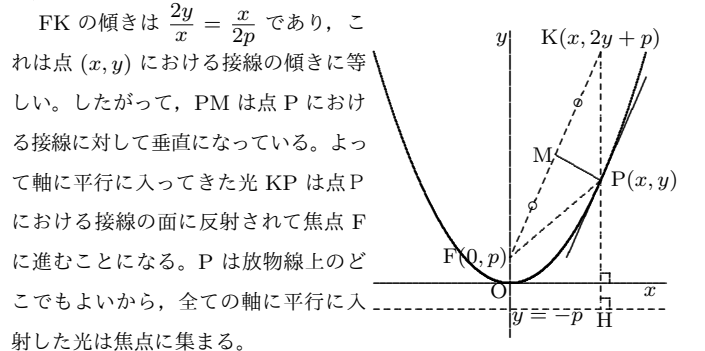
しかしユークリッドの『原論』を基礎とした中学の図形では、これは「作図」とは言わない。作図とはあくまで定規とコンパスで公法通りに有限回の操作によって描くことを言う。したがって、上記の手法では数学的に放物線を作図できたことにはならない。一般の角の3等分線が作図できない、ということと同じ論理である。

『春夏秋冬 407 号』には、放物線の接線の扱ひも書いているから、そちらも見ておいていただきたい。

『中学数学基礎』には、以下の様にも書いている。

パラボラ (parabola) アンテナの原理を確かめよう。反射の法則は、「反射光は入射光と反射面の法線(垂線)のなす面に含まれ、入射角と反射角は等しい」である。

$y = \frac{1}{4p}x^2$ の図を描くとき、放物線上の点 $P(x, y)$ に関して点 H と対称な点を K とすると、 $K(x, 2y + p)$ 、 $\triangle PKF$ は二等辺三角形となる。したがって、 FK の中点を M とすると $FK \perp MP$ で PM は $\angle KPF$ を 2 等分する。



通常パラボラアンテナは放物面の軸に近い部分を用いる。一見それは、球面の一部と同じように見える。放物面では軸に平行に入射した全ての光

(電波)は焦点に集まり(凸レンズと同じ),中心に向かって入射した光は軸に対称な方向に反射し(凸レンズでは直進),これは凸レンズの像のでき方と同じである(反射鏡では,鏡の手前に像ができる)。球面の一部を用いるときは厳密な焦点は存在しないが,球面のごくせまい一部を用いているときは,焦点は近似的に球の半径の半分のところにある。

パラボアンテナ(あるいは,大きな凹面鏡)の機構は,放物線の基本的な性質を用いており,従って逆に,放物線の理解にはパラボアンテナの機構の理解を含む。

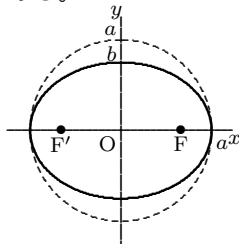
パラボアンテナ(英語: parabolic antenna, parabola antenna)は,放物曲面をした反射器(放物面反射器 parabolic reflector)を持つ凹型アンテナ(Wikipedia)

3 楕円を議論する。

1の λ_1, λ_2 は同符号,さらに X 軸方向, Y 軸方向に平行移動

xy 平面上の,原点を中心とする半径 a の円を考える。これを x 軸の周りに少し傾けた(回転した)とする。これを xy 平面に垂直な方向 z 軸方向から見る(射影する)と細長い円となる。これが楕円だ。元の円の方程式を $x^2 + y^2 = a^2$ とすると,楕円は方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ で表される図形となる。 $a = b = r$ の場合が円である。

グラフは $x^2 + y^2 = a^2$ を y 軸方向だけ $\frac{b}{a}$ 倍に縮尺した図形となる。従って,楕円の面積は $\pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$ である。



楕円には2つの焦点 F, F' があり, x 座標は $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ である。楕円は2つの焦点からの距離の和が一定($2a$)の点の集まりである。これを確かめておこう。

2点 $F'(-c, 0), F(c, 0)$ からの距離の和が $2a$ の点 $P(x, y)$ の集まりを考える。

$$PF' + PF = 2a \text{ より}$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ の両辺を平方して}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx, \text{ さらに平方して,}$$

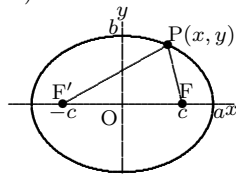
$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

したがって,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1,$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2} \text{ とおくと}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$



このように,楕円を画くことは極めて簡単である。しかも,一人でできる。固定した焦点 F', F に長さ $2a$ の糸の両端を留め,糸をぴんと張った状態で鉛筆を移動させればよい。しかし,放物線と同じ様に,これはユークリッド幾何学では「作図」とは決して言わない。

『中学数学基礎』には,楕円の接線の方程式および楕円の焦点の意味についても書ける。

楕円上の点 $P(p, q)$ における接線の傾き m は,連立方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y - q = m(x - p)$$

ただし, $\frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$ が重解 (p, q) を持つ条件

$$(二次方程式の判別式が0)より, \quad m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p}{q} \text{ となる。}$$

$$\text{したがって, 接線の方程式は,} \quad y - q = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p}{q}(x - p)$$

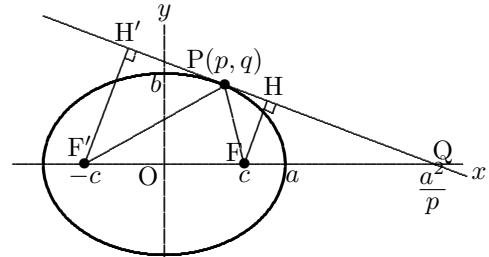
$$\text{よって,} \quad \frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1 \text{ となる。}$$

点 P における接線が x 軸と交わる点 Q の x 座標は, $x = \frac{a^2}{p}$ である。

$$FP^2 - F'P^2 = \{(p-c)^2 + q^2\} - \{(p+c)^2 + q^2\} = -4pc$$

$$FP + F'P = 2a$$

$$\text{より,} \quad FP = a - \frac{c}{a}p, \quad F'P = a + \frac{c}{a}p$$



点 F , 点 F' から接線への垂線の足をそれぞれ H, H' とすると,

$$FH = \frac{\left| \frac{pc}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{a} \left| a - \frac{c}{a}p \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}}$$

$$F'H' = \frac{\left| -\frac{pc}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{a} \left| a + \frac{c}{a}p \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}}$$

$$\text{したがって,} \quad FP:FH = F'P:F'H' = 1 : \frac{\frac{1}{a}}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}}$$

(直角三角形の合同条件に対応した相似条件に)よって $\triangle FPH \sim \triangle F'PH'$

したがって, $\angle FPH = \angle F'PH'$

これは, $F(F')$ から出た光は回転楕円体の内面で反射し, $F'(F)$ を通ることを意味する。

4 双曲線を考える。

1の λ_1, λ_2 は異符号,さらに X 軸方向, Y 軸方向に平行移動

2定点(焦点)からの距離の差が一定である点の集まりは双曲線である。

2点 $(-c, 0), (c, 0)$ ($c > 0$)からの距離の差が $2a$ の点 $P(x, y)$ は

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

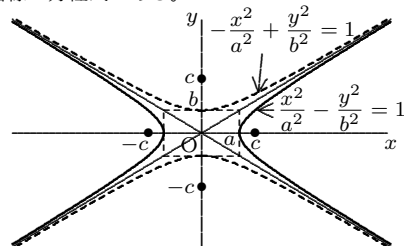
を満たす。簡単な計算から,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

が得られる。 $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ ($c > a > 0$)とおくと,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

これが双曲線の方程式である。



y について解くと, $y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$ となり, $x \rightarrow \pm\infty$ のとき,

$y = \pm \frac{b}{a}x$ に近づく。これを漸近線ぜんしんせんという。また,2点 $(0, -c), (0, c)$ からの距離の差が $2b$ の点 $Q(x, y)$ は,

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2b$$

を満たし、 $a = \sqrt{c^2 - b^2}$ ($c > b > 0$) とおくと、

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

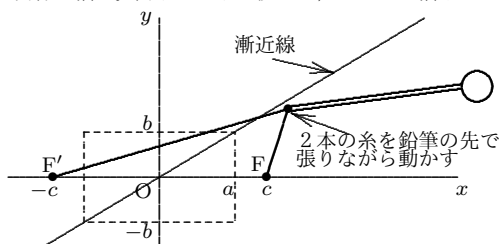
となる。これも双曲線で、図では破線で示してある。

y について解くと、 $y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 + (\frac{a}{x})^2}$ となり、 $x \rightarrow \pm\infty$ のとき、 $y = \pm \frac{b}{a}x$ に近づき、これは、既に記した漸近線と一致する。

$a = b$ の場合は、漸近線は $y = \pm x$ で互いに直交する。こんな双曲線を直角双曲線という

さて、 $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ にしたがって、双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, $b = \sqrt{c^2 - a^2}$ を画いてみよう。

座標軸を置き、2つの焦点 $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$ を定め、長めの糸を用意し、両端を2点 $F'(-c, 0)$, $F(c, 0)$ に固定し、その両端から点 $(a, 0)$ に糸を張り、残りの糸を2重にして端の部分に輪のある結び目をつけておく。結び目を一方の手で引っ張り、他方の手で二本の重なった糸の結び目でないところを鉛筆で $(a, 0)$ から滑らしながら、第1象限のグラフを描く。他の象限も同様に描く。両手を上手く使えば、一人でも描けないことはない。



原理的には一人で描くことはできるが、鉛筆のところを少し工夫しなければ、満足のいく曲線を描くことはかなり難しい。しかし、重要なことは、原理的には思い通りの双曲線は描けるということだ。さらに重要なことは、二人の同学の士が、より完璧な“作図”を目指して知恵を出し合い協力すれば上手くゆく と言うことを体験することだ。

創造性教育には、あらゆる局面で、そうした仕掛けを多数設定し、協働学習が効果的な学習法であることを実感することが重要である。

これだけでは論理に飛躍はあるが、一般にオンライン教育は、確立した理論の伝達と言う意味では効果的だが、数学教育においてさえ(他の分野では勿論、製作・実験・観測・資料の整理に協働学習は不可欠である)、「知的創造的能力」に向けての学習レベルの質的飛躍の視点で見れば、補助的機能しか持ち合わせていない。

5 放物線や楕円、双曲線を、それぞれは単なる1例ではあるが、どんな機構を使えば“作図”できるのかを中心として、記述してきた。即ち、平面図形の二次曲線の原始的でリアルな表現を行ったのだ。二次曲線は平面上のリアルな操作によって表現できるのだ。逆に言えば、二次曲線は、平面におけるリアルな存在であり、これは、平面の理解をより深く進める極めて重要な現象となっていたのだ。

グラフィックソフトを使うと、思いのままの二次曲線を描くことはできる。しかし、“作図”を全てソフトに頼り、あるいは、方程式を満たす数値の組を無数に求めてそれらをプロットするなどだけでは、平面を理解したことにはならない。しかも、重要なことは、それらは、放物線にしても、楕円や双曲線にしても、それなりの精度で描くことができる

が、それは決してユークリッド幾何学で言う「作図」ではないのだ。作図できない図形は、ユークリッド幾何学の対象ではない。(このことについては、次号の『春夏秋冬』で少し触れる)

筆者は、一般の曲線は、プログラミング言語であるCやFortranを用いてデータ(単なる関数の場合や微分方程式の数値解、研究では、系のコンピュータシミュレーション結果など)を作成し、そのデータをTexの初期のマクロであるPCTEXに取り込んで描画してきた。それなりに正確な図は描けるが、極めて手間がかかる。

筆者をはじめ、殆どの人は、数学者ではない。それでは、何のために数学を学ぶのか、それは自然や社会の調査・実験・観測・観測を基にその法則性を明らかにし、適切に対応する方法を見出したり、コミュニケーションを行ったりするための道具、即ち、数学は科学の言葉でもあるからだ。数学者でなくとも、現代の数学に至る発展の歴史や論理的な枠組みの発展を理解することは、現代の数学を活用する立場からも極めて重要なことである。

三つのことを追加しておきたい。

筆者の経験では、少し理論的なことを進めようとする、殆どの場合、多分他の人がやったことのない数学的操作や表現が必要となる。定理や公式、法則と言えるほどのものではないかなりの数の多分史上初めてのものがある。筆者の場合、そのいくつかは、他の人の論文で引用された。常に、作業に応じた必要にして十分な数学のレベルの「高度さ」を維持しなければ、創造的な活動には大きな支障をきたす。

その二つ目は、グラフや図を描くソフトが多数開発・実用化されているが、現代ではもっと驚く機能を持ったソフトも存在する。いわゆる「画像生成AI」である。テレビによると、たとえば「富士山を背景とする力士」と入力すると、それらしい静止画像が写しだされる。これは素晴らしい技術の進歩ではあるが、多分、基礎教育における数学的理解の深化との相関はないだろう。

もう一つは、よく知られているように、ユークリッド幾何学では、角の三等分はできないが、簡単な装置(いろいろなものが考えられており、『中学数学基礎』に書いているものはその一例である)を使うと、極めて簡単に任意の(当面、0度より大きく180度より小さい)角は三等分できる(上記の二次曲線の描き方は、この簡単な装置に相当する)。現代数学は、ユークリッド幾何学ではなぜ一般の角の三等分ができないのか、極めて簡潔に解答する。筆者は、角の三等分問題を通して、ユークリッド幾何学の本当の姿を理解した。筆者の知る限り、一般に、作図を「定規とコンパスを公法通り用いて、図を描くこと」と定義しているが、筆者は、そこに敢えて「有限回の操作を用いて」を明示的に加えている(勿論、筆者と同じ主張も多々ある)。「公法通り」には、有限回は含まれていない。次回、これらについて、補足説明を予定している。

況してや、筆者には確かなことは分からないが、数学者として大きな貢献を目指せば、幼少のころからの「数学史」への関心必要であると考えられる。学者が持つ創造性は、勿論、多分にそれぞれの持つ多様性・個性(だから、基礎科学教育は地域で行うべし)にあるが、直接的には、科学の発展の実体を如何にリアルに理解しているかによるのではないかと考える(理論物理学のアインシュタインは1年浪人した)。「受験偏差値」と「知的創造的能力」の相関はあっても、明確な因果関係が見いだせないのは、至極当然のことだ。