



## 創造性教育を！

いよいよ、松尾豊氏が、「人工知能は人間を超えるか ディープラーニングの先にあるもの」(2015年3月初版発行 KADOKAWA)のなかで、AIの「言語との紐づけ」が完成するとして2025年が近づいてきました。『春夏秋冬415号』では、その線に沿って、松尾研究室のメンバーが始めた言語処理のベンチャーの実績も取り上げました。ほぼ松尾氏のここまでの予言は、当たっていたのです。そして、2030年には、松尾氏の予言通り「大規模知識理解」が進み、教育などには決定的な影響を与えるだけでなく、産業構造自身も大きく変換しそうです。

確かに、「知的創造的分野」においても、研究の前線では、AIが大きな仕事をしていることは、日常的に報じられています。特に目立つのは、新薬開発、新機能性材料開発の分野ですが、あらゆる基礎・応用の分野で、ますますAIは活躍しています。

しかし、現在のAIが、人間の知的蓄積を超える判断能力を持っているとまでは考えられません。いくらAIが進展し多くの局面で自動化が進んでも、あらゆる知的作業において人の能力を超えるとするいわゆる「シンギュラリティー」がそこまで近づいているとは予想されていません。

いわゆる「コペルニクス転回」には、人の関与が必要だと考えられるからです。20世紀初頭に、たとえAIが現在の様に発展していたとしても、AIだけでは、量子力学を確立することはできなかつたと考えられています。科学的な大きな飛躍は、人間の知的進展(科学)の歴史そのものを背負って成し遂げられてきたからです。その状況が何時まで続くかは分かりませんが、10年や20年でシンギュラリティーがやって来るとは、とても考えられないのです。

逆に、AIの進展は、人自身がやらねばならないことをクローズアップしてきました。科学や技術の発展にAIはますます極めて重要な役割を果たすようになりますが、逆に大きな飛躍には、ますます人の「知的創造的な能力」の関与が必要になって来たのです。平易に言えば、科学者・技術開発者は、ますますAIを有効に使って、新しい知見・新しい技術の研究・開発に動かしむことになります。

一体どの程度の割合の人数が、科学者・技術開発者として、即ち「知的創造的能力」が必要な労働に就くことになるのかは、地球規模での課題の変化やSDGs(sustainable development goals)の要請などだけでなく、それぞれの国の国際的な位置によって大きく変わってきます。いろいろな条件を考慮すれば、日本は相対的に多くの国より多く「知的

創造的能力」を要する労働につかねば成り立たなくなっています。その労働の結果として、科学技術の振興と労働の生産性の向上を図り、この国の国際的地位を維持・発展させることができる、と考えられます。後の「現代が要請する教育を！」の中で書いているように、他の選択肢はありません。

こうした現実に見合った教育が要請されます。即ち、この国の現代が要請する主要な教育目標は、「知的創造的能力」の育成であり、学力とは「知的創造的能力」そのものとなります。勿論、中等教育段階で、「知的創造的能力」を獲得する生徒はごく少数のはずですが、中等教育及び大学学士課程では、できるだけ多くの生徒・学生に、明確に「知的創造的能力」に向けての教育が行われることが絶対に欠かせないのです。

読者にお尋ねします。皆様、あるいは皆様のご家族が、そうした教育・学習目標に向かって、充実した生活を送ってられるとお感じになっておられるでしょうか。各種テストに向けて、対策的な訓練に明け暮れているのが現実ではないでしょうか。

各種入試・各種学力テストは、短時間で、解が解明済みの課題に、マニュアルに従って即答する能力、即ち「即興力」を検定するものです。これは、現代が主要に要請する「知的創造的能力」と真っ向から対立する能力の検定になります。こうしたことを、時代が大きく変わった現在でも続けてきたことが、この国の科学技術と労働の生産性を大きく毀損してきました。

他の先進国や途上国も、似た教育が行われています。しかし、各種の歴史的・環境的条件のもとで、この国は、特に「小国化」へまっしぐらに転落しているのです(『春夏秋冬416号』も参照ください)。

殆ど毎日のいろいろな学習塾の新聞折込を見ておられると思います。絶望的状况は、今も続いています。待っていては、遅すぎます。直ちに行動を起こして下さい。

## 現代が要請する教育を！

1 加谷圭一氏は、「短期的にはともかく、長期的な成長というのは、財政や金融といった経済政策ではなく企業の競争力で決まる。経済政策には成長を側面支援する効果しかなく、それ自体が成長の原動力にはならない。日本経済がゼロ成長に陥ったのは、日本企業の競争力が低下したことが原因であって、経済政策でどうにかなるものではない。」「経済学的には、労働生産性が上がれば通貨の価値も上昇します。

私は 20 年以上前から生産性がすべてとは限らないが、長い目で見ればほとんどすべてであると言いつけてきました。」と言う。

ノーベル賞経済学者ポール・クルーグマンは、「日本経済衰退の一つの原因は労働生産性が低いことだ。」と言っている。現在では、日本の労働生産性は OECD(経済協力開発機構) 加盟 38カ国中 23 位となっている。

これらは、経済学の素人である筆者にも自明なことなのだが、それにもかかわらずこの国では、経済の低迷・後退をくい止め、労働生産性を向上させる財政や金融と言った経済政策以外の一貫した政策、即ち科学技術政策・教育政策が全くとられておらず、ずるずると加谷氏が言う「小国化」への道を歩み続けている。

何度も引用・指摘したもののばかりだが、以下のような不愉快な現実には巷に溢れている。

○ 日本の研究力は 2000 年代半ば以降著しく低下し、研究力の指標の一つである引用回数が上位 10%に入る「トップ 10%論文数」は、いまでは主要 7カ国 (G 7) の最下位である。最新の大学ランキングも、200 位以内に入るのは東大と京大のみで、中国は 11 校、韓国は 6 校である。

○ 研究者を雇い止めにする国の行く末

「昼夜なく研究を続け、成果もあげてきた。それなのに、10 年経ったからいらぬ、と言われる。そんな理不尽なことが、日本の各地の大学でまかり通っている。」

「今 (2022) 年度末で有期雇用の契約が 10 年となる国立大の研究者は 3099 人に上る。うち東大は 588 人で最も多く、しかも、彼らが東大の論文数を稼いでいる。」

○ 科学技術振興機構 (J S T) に設置されるファンドには、主に財政投融資を原資に国が 1 0 兆円を拠出し、年利 4.38%を目標に市場でこれを運用、数校程度の大学に毎年 3 千億円を上限に分配予定。

しかし、運用開始半年の 2022 年 4~9 月に 1881 億円の損失を抱えた。まるで、笑うことさえできない漫画を見ているようだ。

2 もう一度、ノーベル生理学・医学賞受賞の本庶佑氏の言葉を引用する。

「アカデミアがシーズを生めば、長期的に、しかも桁違いの経済効果を生むことは歴史が証明している。基礎科学の発展こそ、大学における研究の使命である。」

突き詰めて言えば、現代が主要に要請する「知的創造的能力」の育成に向けて、この国の全教育システムを全面的に転換することなく、この国の閉塞・後退を脱出することはできない。それは決して困難な見通しではない。民意がしっかり固まれば、容易にしかも安価に転換可能である。

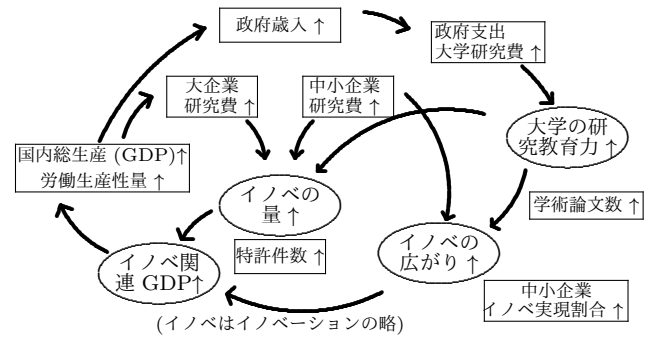
この国の教育政策、科学技術政策には、この視点が決定的に欠如していることを指摘してきた。

何度も取り上げてきたが、『春夏秋冬 410 号』を再度コピーする。

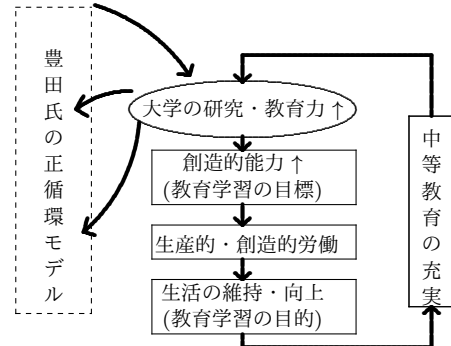
『春夏秋冬 372 号』(2019 年 4 月号) では、以下の様に書いた。

豊田長康氏は「科学立国の危機」(2019 年 2 月 14 日発行)の中で、

「大学の教育研究力、イノベーションの量と広がりをも  
促し経済成長に貢献する正循環モデル (仮説)」  
を提唱した (p.94)。



しかし、当塾の長年の主張通り、大学の研究・教育力は、その上に、教育の振興のサイクルがかぶさる。したがって、大学の教育・研究力には、下図のような教育自身の成長循環があるはずだと主張した。



豊田氏の分析は、正確で、殆どすべての点で、同意できるものばかりである。しかし、(政府の)「統合イノベーション戦略」や豊田氏の主張だけでは、どちらも絵に描いた餅に過ぎず、研究投資は、砂漠に水を撒くようなものだ。たとえ、彼らの主張通り科学技術予算を 9000 億円増やしても、他の先進国や韓国・台湾並みの人口当たりの論文生産性を獲得することはできない。科学技術振興を担う人材の確保が保障されていないからだ。すなわち、上図のような教育振興のサイクルが確立しない限り、論文生産性は十分向上しない。豊田氏の経済成長の「正循環モデル」は、教育・人材育成という片輪を欠いたモデルであり、日本の現実を説明するモデルにはなっていない。

豊田氏の主張の通り、間違いなく「学術論文数は経済成長の原動力」であり、科学技術振興策は、「統合イノベーション戦略」や豊田氏の主張の通り、「エビデンスに基づく政策立案」が不可欠である。しかし、彼らの言うエビデンスは、せいぜい数年のタイムラグの中での相関であり、科学技術史と経済発展の基本原則や基本政策に迫る理解はそこからは得られない。今さら言うまでもなく、「教育は百年の計」である。多くのノーベル賞の受賞においても、研究と受賞の間には十数年のタイムラグがあり、またその研究に先立つ十数年の基礎研究があり、さらにその人材育成にも十数年の優れた教育環境がなければならない。これだけでも半世紀を要す。21 世紀になって、世界で 2 番目に多くのノーベル賞の受賞者を輩出したのは、「戦後 50 年たってから」ということと符合する。

しかももっと重要なこと、即ち現在の科学技術、一般に現在の人類の「知の在り方」は、従来とは異質の変貌を遂げつつある。ICT と AI の劇的進化は、人の知的労働の在り方に決定的な変更を要請するようになった。単純に言えば、過去に確認された事象と形式論理によって得られるあらゆる認識は、殆ど自動化が可能になりつつある。人の認識の最も重要な課題、合理的 (科学的) な認識には、科学史が教えるように、あらゆる局面に飛躍 (その最たるものをコペルニクス転回という) があり、それに果敢に挑戦することが人の知的労働の主要な任務となりつつある。そうした歴史的な大きな転換点にある現在において、皮相で短期の相関の分析に、どれだけ重要

な意味があるのかも、十分考慮に入れておかねばならない。豊田氏は、自身の研究によって応用研究に比べ基礎研究の方がGDPとの相関が強い、英国の研究に基づいて数学はGDPと強い相関があることを指摘したのではなかったのか。

以上は『春夏秋冬 410号』のコピーであり、このコピーは、殆どそれ以前の『春夏秋冬』のコピーである。既に議論は尽くされているのだ。当塾の教育改革に関わる提案は、これらの経緯を踏まえて行っている。

### 3 教育をめぐる身の回りの話題を取り上げる。

(1) 文部科学省の全国学力・学習状況調査(全国学力テスト)は、現実には、僅かであっても、試験対策は効果があるものだ。以下は極めて控えめな事例である。

長野県内では、対象クラスを担当する教員事前対策をしたと答えた教員は、小学6年の担任で4・3%(21人)、中学3年の教科担任で0・9%(7人)。小学6年では、対策時間は2時間が最も多く、5時間以上も14・3%あった。理由は「学校や学年、教科会などで行うよう決めた」が約7割を占めた。中学3年の対策時間は、いずれも1時間以下だった。

限られた時間に、既知の手法で正答する、即ち「即興力」を検定する全てのテストは、試験対策が有効である。現代が要請する主要な学習目標は「知的創造的能力」であり、それが現代の学力であり、「即興力テスト」である「全国学力テスト」は何の価値もないだけでなく、生徒たちに学習目標の喪失を強要するものとなっている。そんなものは即刻全廃すべき時に来ている。

(2) 「高校入試の英語スピーキングテストの中止を保護者らが訴え」ていたが、東京都教育委員会は2022年11月27日、ついにテストを強行し、2023年2月の入学試験の得点と合算して合否を判定する。『春夏秋冬 415号』で書いた通り、通常の場合では、既に実用性を目標とした「外国語学習」は不要になっている。既に、一般の生徒・学生を何らかの外国語に関する語学力で分別する必然性は全く存在しない。東京都教育委員会や大学入試共通テストを推進する人たちは完全にアナクロニズムに陥っている。

(3) 近年になって、盛んに中学入試で広い意味でのインド式計算法が強調される。

『小学生がたった1日で19×19までかんばきに暗算できる本』の著者である、東大卒プロ算数講師の小杉拓也氏は、次のように言う。

「11×11~19×19は『おみやげ算』によって瞬時に暗算できる。だから、1分1秒を無駄にできず、1点差で合否が決まる中学受験生にとって、おみやげ算のマスターは必須となる。」

インド式計算法には、任意の2桁の九九を暗算(あるいは、少しの筆算を含む)で行う数々の計算法を含む。例えば、最も工夫のないやり方では、以下のようなものだ。

$$\begin{aligned} 54 \times 67 &= (50 + 4) \times (60 + 7) \\ &= (5 \times 6) \times 100 + (5 \times 7 + 4 \times 6) \times 10 + 4 \times 7 \\ &= 30 \times 100 + 59 \times 10 + 28 = 3618 \end{aligned}$$

30, 59, 28を覚えておいて、暗算でその和を計算すればよい。

ところで、算盤の達人なら、どうするのでしょうか。

しかし、2桁にとどまらず3桁や4桁などの整数の掛け算

さえ、百均のソーラー電卓で、常に瞬時に行える。中学入試に何らかのインド式計算法が有利となるのなら、その入試は全く価値のないものであることを主張しているに等しい。他にやるべきことを見いだせない人に、将来の「知的創造的能力」の獲得は期待できない。

決して、インド式計算法のトレーニングを、頭の体操やゲーム(スポーツ)などとしてやることに意味がない、と言っているのではない。

繰り返すが、数学は科学(自然科学, 社会科学, 人文科学)の言葉でもある。それを駆使して何らかの知的創造的作業を行なおうとすれば、数学自身(あるいは、数学の学習において)の整合性や論理一貫性が不可欠である。逆に教育の過程で、そうした首尾一貫性を追求すれば、生徒・学生は科学の言葉としての数学自身への関心を深めることにもなる。証明なき定理や処方は一切使ってはならない。

たとえば、筆者は「四色問題」の証明を理解していない。したがって、筆者の全ての主張は、「平面グラフは4彩色可能である」ということを一切用いないで展開する。

それが数学を科学の言葉として利用するという意味である。自己完結的な整合性がなければ、科学の言葉とはなり得ない。そうした言葉を用いて、はじめて科学的な実績に貢献することができる。

(数学の)入試問題が解ければよい、と言う姿勢の学習は、どの分野の科学者・技術者になったとしても、「知的創造的実績」とは縁遠い人となる。

(4) 数学や数学の定理の他の人と違った(あるいは創造的な)応用や適用には、常にその数学や数学の定理の根拠・証明などが必ずかかわる。

大それた「知的創造的作業」でなくても、自らの知的守備範囲の狭さに起因する自分だけが知らない事であっても、自らにとって新しい知識の獲得を自らの力で行うときには、同様のことが不可欠となる。

筆者の関わる3つの事例を示す。

その一つ。前回(『春夏秋冬 415号』)で取り上げた球の表面積を求める筆者の工夫に対して、筆者の大学での同級生(現在79歳)が、分かりやすい証明をしてくれた。その他『春夏秋冬』の質のアップに協力して頂いた。中学数学レベルにおいてさえ、まだまだ「知的創造的能力」育成に向けての多くの不断の努力が必要とされているのだ。

その2つ目。『春夏秋冬 415号』では「巧妙な方法」として、

半径  $r$  の円の円周  $\ell(r)$  と面積  $S(r)$  の関係

高さ  $h$  の錐体の底面積  $S(h)$  と体積  $V(h)$  の関係

半径  $r$  の球の表面積  $S(r)$  と体積  $V(r)$  の関係

を中学生にも理解できるように導いた。この導出は、よく探せば、何処かに書いてあるかも知れない。恐れ多くも「創造的」と言えるほどのものではなく、単に積分ではなく、中学で学ぶ相似な図形の性質を利用しただけのものである。しかし、筆者の知る限り、今のところ、そうした証明はどこにも見当たらない。

もう一つ。40年ほど前、筆者は内燃機関の排気脈動の研究の過程で、エンジンの排気を一次元の気体の流れとしてシミュレーションする必要が出てきた。大きなシミュレーションシステムの中での一部として、非線形な双曲型の偏微分方程式を数値的に解かねばならないのだが、かなり難しく、筆者はそれに「特性曲線法」と呼ばれる方法を適用することにした。そこ

では音速が現れるのだが、一般に使われる音速の公式は理想気体に近似して用いられる。筆者は、理想気体ではない気体の場合も使える音速の式を導くことができた。日本の学会誌への投稿の論文には、そのことを必ずしも強調しなかったが、おそらく史上初のことだった、と考えている。この日本語の論文は、発表してから21年たった後でも、他の著者に引用されていた。

一つのオリジナルな論文には、史上初と予想される工夫が何か所か含まれるものだ。その展開能力の基礎は、その人なりの基礎科学への整合性や論理一貫性への関心の深さに大きく依存する、と考えられる。

## 創造性教育を！

1時間や2時間で答えなければならないようなテストでは、その人の「知的創造的能力」あるいは、それに向けての基礎学力など全く計量できない。現代では、中高生や大学学士課程の学生が解く「殆どの問題(入試問題)(題意が分りにくく作成されている問題では、平均的な生徒・学生による問題の整理を含む。AIの「意味理解」は、殆ど出来上がっているが、未だ進行中だからだ)は、AIは各種の「解答器」を活用しながら、即座に解くことができる。これが長く続けられた「東ロボ君」プロジェクトに対する筆者の結論であった。

些細なことでも、「知的創造性」に関心を見失った人に、現代の教師は務まらない。数学教育の最も重視しなければならないことは、根拠を明確にしていけないことは一切学習を進める上で利用してはならない、と言う原則を守ることだ。答えが出ればよい、という考えを徹底して排除することの中に、創造性に向けてのエネルギーが醸成されるのだ。全ての入試は、現代が要請する主要な学力「知的創造的能力」の育成の、決定的な阻害要因になっている。

1 前回取り上げた「作図」は、ユークリッド幾何学と中学数学の決定的な構成要素である。そこをあいまいにした議論や学習は、数学の歴史性・発展性・創造性を全く考慮しない学習法となる。

前回の議論を踏まえると、ユークリッド幾何学における作図とは、

「作図とは、定規とコンパスを公法通りに用いて、有限回の操作によって図形を描くこと」となる。定規とコンパスを公法通りに用いるとは、

- (1) 与えられた2点を結ぶ線分を引く
- (2) 線分はいくらでも延長する
- (3) 与えられた点を中心として、与えられた長さを半径とする円を描く

ことである。『ユークリッド原論』の全ての議論は完璧にこの作図の原理を基にして構成されている。

このことについては、『春夏秋冬369号』『春夏秋冬380号』『春夏秋冬410号』などに詳しく書いている。例えば「三角形の合同条件」の証明一つとっても、そのことは理解できる。圧巻の『原論』で最初に出てくる定理は「正三角形の作図」であり、第二番目に出てくる定理は線分の移動(の作図)である。これらを用いて、例えば全ての合同条件を証明

する(全ての検定教科書には、合同条件の証明がなされていない)。さらに、合同条件から、「等積移動」を導き、それを用いて相似条件を証明している(当然のことながら、全ての検定教科書には、相似条件の証明がなされていない。関心のある人は、『中学数学基礎』を参照されたい)。極論すれば、ユークリッド幾何学は、「作図」から構成されている。そして、『中学数学基礎』の図形の基礎的議論は、過去には、(間違いではなく、別の展開と言う意味で)かなりの紆余曲折があったが、現在では完璧に『原論』の展開の趣旨(全てが同一と言う意味ではなく、展開の流れが同じと言う意味)にしたがって構成している。これが基礎科学を、発展し発展させるべきものとして学ぶ、すなわち「知的創造的能力」に寄与する学習法だと、確信したからである(唯一の方法だとは言っていない。もっと優れた道があるのかもしれない)。ユークリッドの『原論』は、数学史における一里塚である。歴史的産物としての『原論』を正當に評価しなければ、数学史の正當な理解だけでなく、多くの人たちの協働の産物としての数学自身の(創造的)発展を期すことは困難と考えられる。科学(特に基礎科学)の発展・飛躍は、個別には、ごく少数の天才によって成し遂げられるが、その土壌には、無数の知的創造的能力を発揮した人々による積み重ねがあった。ユークリッドの『原論』自身も、先人たちの積み重ねの上に成り立っている。したがって、「知的創造的」に数学を学ぶことは、数学史を学ぶことと重なる部分が非常に多いはずだ。

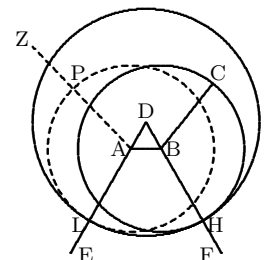
『原論』の第二番目の定理

「与えられた点において

与えられた線分に等しい線分を作ることができる。」の証明を諄い<sup>くど</sup>がもう一度示しておく(『春夏秋冬』では、多分4回目だと思うが、表現は、『原論』とかなり違うことは、理解しておいていただきたい)。

与えられた点をA、与えられた線分をBCとする。このとき点Aにおいて、与えられた線分BCに等しい線分を次のように作図することができる。

点Aから点Bへ線分ABを描き、その上に正三角形DABを作ることができ、DA、DBの延長上にE、Fをとり、線分AE、BFを描く。半径BCの円Bを描き、線分BFと円Bの交点をHとし、半径DHの円Dを描く。線分AEと円Dとの交点をLとする。



点Bは円Bの中心だから、 $BC=BH$ 、点Dは円Dの中心だから、 $DL=DH$ 、また $DA=DB$ 、 $AL=DL-DA=DH-DB=BH=BC$ 。よって、与えられた点Aにおいて与えられた線分BCに等しい線分ALが作図できた。線分をAZ方向に移動するのならば、半径ALの円Aを描き、半直線AZとこの円Aとの交点を点Pとすれば、線分APは線分BCに等しい線分である。線分BCを点Bの周りに線分BHへ、線分BHを点Dの周りに線分ALへ、線分ALを点Aの周りにAPへ、回転移動した形になっている。(線分は思いの通り「移動」(合同変換)できるのだ。)

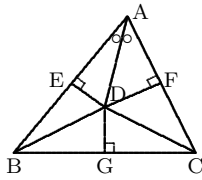
全てはここから始まる。全ての中学生に、こうした理解を強要するべきだ、とは考えていないが、学習の意義(あるいは主要な学習目標)を「知的創造的能力」の育成に置くな

らば、できるだけ多くの中学生に、現代の数学への大きな流れの一里塚である『原論』のおよその原理を理解しておいて頂きたい、と強く思っている。

2 当塾のテキスト『中学数学基礎』には、以下のような問題を提示している。

「すべての三角形は、二等辺三角形である」と以下のように証明した。誤りを指摘せよ。

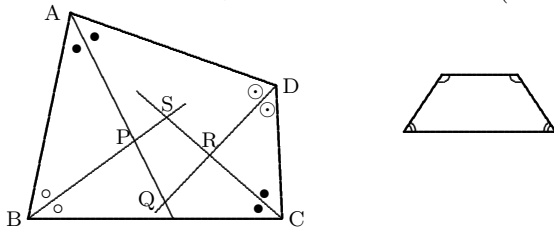
$\triangle ABC$  の内角  $A$  の二等分線と、辺  $BC$  の垂直二等分線との交点を図のように  $D$  とする。 $D$  から辺  $AB$  へ下ろした垂線の足を  $E$ 、辺  $AC$  へ下ろした垂線の足を  $F$  とすれば、 $D$  は  $\angle A$  の二等分線上の点であるから、 $\triangle ADE \cong \triangle ADF$ 。よって  $AE = AF$ 、しかも  $DE = DF$ 。また、 $D$  は辺  $BC$  の垂直二等分線上の点であるから、 $DB = DC$ 。よって、 $\triangle DEB \cong \triangle DFC$ 。したがって、 $BE = CF$ 。したがって、 $AE = AF$ 、 $BE = CF$ 、から  $AB = AC$ 。すなわちすべての三角形は二等辺三角形である。



これは有名なパズルである。解説は要らないだろう。何度も繰り返すが、中学で学習する図形の学問「ユークリッド幾何学」は「作図」を基礎に成り立っている。図形の学習は、正確な作図から始まることを再確認しておこう。

『中学数学基礎』では、以下の演習問題も取り上げている。

「四角形  $ABCD$  で  $\angle A = \angle C$  のとき、4つの内角の二等分線がおのおの交わってつくる四角形  $PQRS$  は等脚台形であることを証明せよ。また、四角形が平行四辺形であるとき、四角形はどんな四角形か。」(大谷高改 09)



等脚台形とは、右の図のような台形で上底、下底の両端の角がそれぞれ等しい四角形である。

これも解説は要らないだろう。意図的に図は題意からずらして描かれているから、作図し直してみれば、全ての事態は理解できる。

また後半の問では、四角形  $ABCD$  が平行四辺形の時は、 $\angle B = \angle D$  で  $PQ \parallel SR$  となり、4つの角が全て等しく、長方形となる。

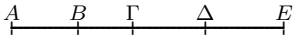
3 『原論』について、筆者は多くのことを主張してきたが、それでは、筆者は『原論』を全巻正確に読破しているかと言えば、全くそうではなく、ごく一部を読んでいるに過ぎない。後半は、極めて読みづらく、しかも結論は、代数的手法によって、極めて簡単に導き出せるものが多いからだ。

文字式による表現が確立したのは、中世である。

『原論』では、例えば次のような証明がある。

「任意個の偶数が加えられるならば、全体は偶数である。」

任意個の偶数  $AB, \Gamma\Delta, \Delta E$  が

加えられたとせよ。全体  $AE$  は偶数 

であると主張する。 $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta E$  のおのおのは偶数であるから、半分の部分を持つ。

それゆえ全体  $AE$  の部分を持つ。ところが2等分される数は偶数である。したがって  $AE$  は偶数である。

第7巻から第10巻まで、こうした議論が延々と続く。実に分かりづらい。筆者も、十分に読解していない。

現在、筆者の手元にある『原論』は共立出版株式会社、1971年7月30日初版1刷発行で、2005年9月15日縮刷版7刷発行の『ユークリッド原論』であり、現在でもアマゾンなどで購入することができる。一般の優秀な中学生においても、『原論』の全ての主張を『原論』から学ぶ、と言うのは、過ぎたる負担を課すことになる。各種の比例式の証明、「ユークリッドの互除法」の考えなども、最初から代数的手法を用いて学ぶほうが簡単である。即ち、『原論』の歴史的評価と基礎数学の学習段階での「原論の展開」の活用とは、初めから一定の距離を保つ方が、より合理的である。したがって、当『春夏秋冬』のコラム「創造性教育を！」も、以後、代数的手法について、議論を進めることとする。

ところが、代数的手法を用いるとしても、現在の中学数学教育においては、その基礎を明確にしてはいない。簡単に言えば、式の演算規則を明確にしてはいない。

4 今回は、『中学数学基礎』にしたがって、文字式を用いた計算の法則を要約する。

計算は、以下のような基本法則(公理)に従って進める。

相等性

- (a)  $a = a$  (反射律)
- (b)  $a = b$  ならば、 $b = a$  (対称律)
- (c)  $a = b, b = c$  ならば、 $a = c$  (推移律)

和についての計算法則

- (a)  $a + b = b + a$  (和の交換法則)
- (b)  $(a + b) + c = a + (b + c)$  (和の結合法則)
- (c) 任意の  $a$  にたいして、 $a + 0 = a$  となる  $0$  が存在する。(零の存在)
- (d) 任意の  $a$  にたいして、 $a + x = 0$  となる数  $x = -a$  が存在する。(加法の逆元の存在)

零  $0$  は一意的である。ある零  $0$  ともう一つの零  $0'$  が存在したとする。定義より、任意の  $a$  に対して、 $a + 0 = a, a + 0' = a$ 、したがって、 $a + 0 = a + 0'$ 、両辺から  $a$  を引く ( $-a$  を加える) と、 $0 = 0'$

積についての計算法則

- (a)  $a \times b = b \times a, a \times b$  は  $ab$  と書いてよい (積の交換法則)
- (b)  $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$  (積の結合法則)
- (c) 任意の  $a$  について、 $a \times 1 = a$  となる数  $1$  が存在する。(乗法の単位元)
- (d)  $a \neq 0$  のとき、 $ax = 1$  となる数  $x = \frac{1}{a} (= a^{-1})$  が存在する。(乗法の逆元(逆数)の存在)

単位元  $1$  は一意的である。零  $0$  と同様にして、証明できる。いずれも等式の基本性質を用いている。

一般に、 $0 \neq 1$  を公理に加えておく。その時、 $0$  には乗法の逆元  $0^{-1}$  が存在しないことが証明できる。仮に、 $0$  に乗法の逆元  $0^{-1}$  が存在するとして、 $b = 0^{-1}$  する。両辺に  $0$  をかけると、 $b \times 0 = 0^{-1} \times 0, 0 = 1$  となり矛盾する。

さらに、表現の規則として、積は和より優先する。

分配法則

$$(a) \quad a(b+c) = ab+ac \quad (\text{分配法則})$$

分配法則  $(a+b)c = ac+bc$  は  $(a+b)c = c(a+b) = ca+cb = ac+bc$  と導かれる。

さらに、相等性については、次を設定する。

代入原理

$$(a) \quad a = b \text{ ならば、任意の } P(x) \text{ について、} P(a) = P(b)$$

(注) 代入原理は置換法則ともいわれる。不等式には代入原理を使えない。

「代入原理」から、 $a = b$  ならば、 $a+c = b+c$  や  $a \times c = b \times c$  などが導出される。例えば、 $P(x) = x+c$  とすると、 $a = b$  のとき、 $P(a) = P(b)$ 、すなわち、 $a+c = b+c$  となる。したがって、中学生には、以下の「等式の基本性質」は、「代入原理」に取って代わるものである。

等式の基本性質

- (a) 等式の両辺に同じ数を足しても等式が成り立つ。  
 $a = b$  ならば  $a+c = b+c$
- (b) 等式の両辺から同じ数を引いても等式が成り立つ。  
 $a = b$  ならば  $a-c = b-c$
- (c) 等式の両辺に同じ数をかけても等式が成り立つ。  
 $a = b$  ならば  $a \times c = b \times c$
- (d) 等式の両辺を 0 でない同じ数で割っても等式が成り立つ。  
 $a = b, c \neq 0$  ならば  $\frac{a}{c} = \frac{b}{c}$

等式の基本原則からもっと複雑な式への代入原理を導くこともできる。例として、2次関数  $f(x) = ax^2 + bx + c$  の任意の  $p = q$  の場合を考える。

(c) から得られる  $ap^2 = aq^2$  と  $bp = bq$  と  $c = c$  の辺々を加え合わせ (和についての計算法則 (a) より、 $a = b, c = d$  なら  $a+c = b+d$  を用いる)、 $ap^2 + bp + c = aq^2 + bq + c$  となる。すなわち  $p = q$  のとき、 $f(p) = f(q)$  が得られた。

もっと複雑な関数  $f(x)$  についても証明でき、それは、代入原理となる。

(こうしたことをもっと基礎原理から導くことに興味があれば、

『春夏秋冬 377 号』を参照してください)

以上が中学生の計算の法則の全てである。文字式であっても、数値だけの式であっても、これらの計算の法則のみを使って、計算を行う。

『中学数学基礎』では、一つのパズル(「数学の楽しさ」矢野健太郎著の引用)を示している。

「常に2つの数は等しい」ということを証明する ?

任意の2つの数を  $a, b$  としそれらの差を  $a - b = c$  とする。

$$\text{この両辺に } a - b \text{ を掛けて } (a - b)^2 = (a - b)c$$

$$\text{したがって } a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$$

$$\text{変形して } a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc$$

$$\text{因数分解して } a(a - b - c) = b(a - b - c) \quad \text{よって } a = b$$

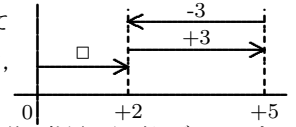
すなわち、任意の2つの数は等しい。

誤りを指摘して下さい。

大切なことは、引き算や割り算は足し算や掛け算を使って定義されており、計算法 はそれらの 基本法則 から論理的に導かれるものである。

たとえば  $\square + (+3) = +5$  となる  $\square$  を  $\square = (+5) - (+3)$  と約束する。

中1の正負の計算の学習では、これに対して右図のような数直線を用いてイメージ化して、計算法を見つけだした。



$\square$  を求めるには、+5 から、+3 を加える前の位置にもどればよい、すなわち、+5 に +3 と反対の方向に +3 進む、よって、-3 を加えればよい。こうして

$$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = +2$$

という「計算法」が得られた。これをもう少し数の基本的計算法則で見直しておこう。

$\bigcirc + (+3) = 0$  となる  $\bigcirc$  は存在する。これは  $\bigcirc = -3$  である(加法に関する逆元という)。 $\bigcirc$  は存在するだけでなく、常に符号を変えるだけで簡単に求まる。 $(+5) - (+3)$  の意味は  $\square + (+3) = +5$  となる  $\square = (+5) - (+3)$  であった。

$$\begin{aligned} \text{両辺に } \bigcirc \text{ を加え、} & \quad \{\square + (+3)\} + \bigcirc = (+5) + \bigcirc, \\ \text{加法の結合法則を使って、} & \quad \square + \{(+3) + \bigcirc\} = (+5) + \bigcirc \end{aligned}$$

となる。左辺に加法の交換法則および、 $\bigcirc + (+3) = 0$  を用いると

$$\square = (+5) + \bigcirc \text{ となる。すなわち、}$$

$$(+5) - (+3) = (+5) + \bigcirc = (+5) + (-3) = +2 \text{ が得られた。}$$

しかし、上の等式は、別の意味で、重要な役割を果たしている。

$$(+5) + (-3) = (+5) - (+3) = +2$$

小学算数は、0 と正の数のみで構成されており、正の数、あるいは数の絶対値を小学算数の数と見なせば、上のような例の異符号の2数の和は、絶対値が大きい方の数の絶対値から絶対値が小さい方の絶対値を引いておけばよいことを表しており、これは正負の数の和を小学生の算数で計算できるようにしたものである。すなわち、左辺から右辺への変形は、計算法を示したものと見なすことができる。(関心がある人は、『中学数学基礎』で他の例も見てもいい。)

割り算も全く同じ論理で定義され、計算方法も導かれる。

$$\left(-\frac{5}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \text{ を証明しよう。}$$

$$\square \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{7} \text{ を満たす } \square \text{ を、} \square = \left(-\frac{5}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) \text{ と定義する。}$$

$$\bigcirc \times \left(-\frac{2}{3}\right) = +1 \text{ を満たす } \bigcirc \text{ は存在し、}$$

$$\bigcirc \text{ を } \left(-\frac{3}{2}\right) \text{ の逆数 (積に関する逆元) という。}$$

逆数は有理数(分数)の掛け算の知識より、0 でない限り分母分子を逆にすればよいから、常に求まり、今の場合  $\bigcirc = -\frac{3}{2}$  である。

$$\text{したがって } \{\square \times \left(-\frac{2}{3}\right)\} \times \bigcirc = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc$$

乗法の結合法則を使って、

$$\square \times \left\{\left(-\frac{2}{3}\right) \times \bigcirc\right\} = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc \quad \square \times (+1) = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc$$

$$\square = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc$$

$$\text{よって } \left(-\frac{5}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \square = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right)$$

以上で、有理数の全ての演算が可能となったが、注意深く読み返すと、無理数を含めた全ての実数の計算に拡張できるようにになっている。例えば  $\sqrt{2}$  の逆数は  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  としておけばよいだけだ。

5 式の計算を行うとは、以上の計算規則を適用して、目標の結論(式)を導くことである。数学の推論のかなり多くの部分は、言葉による論理的な展開だけでなく、この式の計算を含む。学習が進めば、こうした加減乗除に関わる規則だけでなく、無数の「演算」「操作」… が定義され、それらに拠って論理展開し、推論を進めることとなる。