



## 創造性教育を！

筆者は、経済のことはよくわかりません。しかし、以下のような現実が進行していることに疑いありません。

総務省が1月27日発表した1月の東京都区部の消費者物価指数(速報値)は、値動きの大きい生鮮食品を除いて、前年同月より4.3%上がりました。上昇は17カ月連続で、上昇率は1981年5月以来、41年8カ月ぶりだったそうです。世界的な原油高などの影響で、都市ガス代が39.7%上昇し、81年3月以来41年10カ月ぶりの伸びとなりました。ガス代や電気代を含むエネルギー関連の伸び率は前月と同じ26.0%だったそうです。

大幅な貿易赤字は、食糧の自給率が低い日本では、食品の高騰、ひいては、食糧難に直結します。事態は、緊迫しているのです。

一人当たりの労働生産性には、2種類の定義があるそうです。

$$\begin{aligned} \text{物的生産性} &= \frac{\text{生産量}}{\text{労働者数} \times \text{労働時間}} \\ \text{付加価値生産性} &= \frac{\text{付加価値額}}{\text{労働者数} \times \text{労働時間}} \end{aligned}$$

日本は、OECD加盟35カ国中20位、主要先進国である7カ国の中で見れば最下位になっているそうです。

抜き差しならないところに差し掛かっていることは、誰の目にも明らかですが、そうした事態に、原理的に応える政策が全くとられていない、あるいは提案さえなされていないのが現実です。

『春夏秋冬418号』では、加谷珪一氏を引用しましたが、今回は野口悠紀雄氏を引用してみます。

○日本経済の活性化は金融政策ではできない

○賃金が上昇するには、企業の付加価値が増加しなければならない。それは、金融政策で実現することではない。付加価値増加は、企業や個人が努力して実現するものだ。

○現在、アメリカを牽引している高度情報通信産業は、金融緩和政策によって成長したのではない。政府の補助金で成長したのでもない。企業の競争と、高度な専門教育による人的能力の向上によって実現したのである

○台湾を成長させ、台湾の1人当たりGDPを日本より高くする原動力となったTSMCを中心とする半導体産業も、新しいビジネスモデルの採用と、世界的な分業体制のなかで成長したのである。こうした成長のための環境を準備することこそが、政府や日銀の基本的役割だ。

○経済成長は、民間経済主体の努力の積み重ねと、マーケットにおける競争によって実現される。国や中央銀行が主導してそれを実現するという考え自体が、そもそも間違っている。

読者が、この『春夏秋冬』を眼にされる頃には、既にこの国の入試戦線は、山場を越えたところだと推測します。

御存知の通り、米国には日本の「入試」にあたるものは、殆ど「存在しない」と言った方が現実に近いと考えられます。

米国の多くの大学入試は、アプリケーション(application)と呼ばれる

書類=「出願票」をひたすら読み込み、判定する。つまりほとんど書類審査で入学が決まります。その中には、面接やSAT(全米共通のテスト)の結果、エッセイなどを含む大学も多数あります。

勿論、米国の教育に対する批判はあります。大学教育を含めて、全てを「スキル教育」に還元しています。したがって、直接就職に役立ちます。

日本のかなり多くの中央官庁の若手役人は、数年務めた後、米国へ留学し、帰国後は大学の教師や軽口のマスコミタレントに転身します。野口氏(東大工学部応用物理学卒業)もその一人ですが、氏の経済分析は超一流です。筆者は、『超』整理法』をはじめ氏の十数冊の著書を読んでおり、現在のような検索システムが発達する以前から、テキストエディターの秀丸で、“grep”を多用するようになっていました。

しかし、米国は世界から英才を集め、豊富な資金を基礎科学に投資する「余裕」を持っています。英国の教育の国際収支は1兆5千万円ほどの黒字で、寄付もあり、まわりまわって、大学での基礎研究費も捻出できます。日本には米国や英国の成長モデルは適用できません。日本が、現在と将来に最も必要とされる人材育成の確固とした戦略を取らなければ、完全な破綻に向かいます。万難を排して、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」に取り組む以外に道はありません。

## 現代が要請する教育を！

1 『春夏秋冬418号』で、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力の育成」に、教育学者・教育社会学者が十分な貢献をしていない、と書き、その代表に、筆者が今も尊敬する<sup>かりやたけこ</sup>苅谷剛彦氏を取り上げた。

『春夏秋冬418号』を未読の読者は、まず、それを必ず読んでから、以下の議論を読んで頂きたい。

刈谷氏や多くの教育論を展開している人たちは、これに反論するだろうと、思いつつ、そう書いた。刈谷氏は、関連するいくつか新書を書いている。

『春夏秋冬418号』の主張に直接関係する新書は

「オックスフォードからの警鐘

グローバル化時代の大学論」

苅谷剛彦著 中公新書ラクレ 2017年7月初版である。筆者は、多分あまり意識しないで読んでいたと思うが、1年ほど前に、全ての文庫本、新書は、廃棄処分していた。『春夏秋冬418号』をHPにアップしたあと、自らの主張に少し不安がよぎり、

「コロナ後の教育へ

オックスフォードからの提唱」

荻谷剛彦著 中公新書ラクレ 2020年12月初版  
と合わせて、再度購入し、急いで読み返してみた。

予想通り、荻谷氏や多くの人たちの言説には、

### 知的創造的能力 → 科学技術力 → 労働の生産性

の強い因果関係についての認識が極めて薄く、現代の教育問題の根幹、即ち現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力」の育成に、ほとんど関心がないことが判明した。

即ち、教育社会学者としての荻谷氏の主張に、リアリティーがないことを確信した。「…警鐘」には、氏の偏見に満ちた分析はあるが、この国の数々の難局に対する提案らしきものは、どこにも見当たらない。

「オックスフォードからの警鐘」の序章には、

「大学側も、人材の育成や スキルアップ に必死で取り組んでいます。例えばハーバード大学で MBA を取得した人間が、会社で使い物にならなかつたら、誰も高い給料で卒業生を雇わなくなってしまうでしょう。そうなれば優秀な学生を集めることも難しくなる。こういう循環があるために、大学は必至で、学生の スキルアップ を図っているのです。」

とある。そして、日本の大学は、

「人材育成機関として機能していないとみなされてきたのです。これは、戦後日本の産業構造と深く関りがあります。戦後、日本の産業は海外から最新の技術と生産手法などを取り入れ、企業ごと、職場ごとに独自の工夫や洗練を加えていく手法を取りました。その時、大学ではなく企業が主体となって、社員を育成する方法をとったのです。学生の専門性よりも、企業の与える仕事に速やかかつ柔軟に適応していく能力が重視されたのです。」

確かに、バブル崩壊以前には、企業の中央研究所ブームが続き、一見、企業先導で技術開発が進んでいたよう見え、技術開発者もそうした誇りを持っていた。しかし、筆者の知る限り、要所々々では、現役大学の研究者の極めて濃密な参画が見られた。

筆者は大学の非常勤の身で、4つの大企業との共同研究・開発指導、筆者が独自に開発したソフトの提供などを行い、二社それぞれとの共著の論文もいくつか書いた。その一方、一社は、筆者が独自に開発・提供・解説したソフト（これには筆者の独創的な数学的展開による単独の論文がある。この論文は、発表から21年もたってからも引用がなされた。）を使って、開発した技術は実装された。しかし、その経緯をまとめた論文の原稿には筆者の名前が書かれていなかった。その段階で、その企業とは断絶した。風のうわさによると、その企業の担当者は、技術開発本部長にまで出世し、いくつかの特許も取得したようだ。各企業でも、研究開発部門の人たちは、与えられた条件の中で必死で実績を挙げる努力をしていたのだ。

即ち、スキルではなく、高度な基礎科学的認識・知的創造的能力の参画が背景にあって、技術開発は行われてきた。

それは、全く「スキル」と言う概念に属さない、別次元の能力である

青色発光ダイオードでノーベル賞を受賞した3人のなかで、中村修二氏だけは大学と距離があるところであるが、「製品化」に成功したことが評価された、と理解している。

朝日新聞1月15日(日)の天声人語には、

「チャールズ英国王の次男ハリー王子が今月10日に出した400ページ超の自伝『スベア』を電子版で一気に読んだ」

とある。ジャーナリズムに関わる人には、英語の速読の能力は、不可欠な能力なのだろう。筆者には、及びもつかない才

能だ。上記の荻谷氏の250ページ前後の新書でさえ、それぞれ丸まる一晩を要する。図表の検討も行えば、一冊でも丸2日はかかる。荻谷氏は、英語を母語とする国の大学の優位さをあちこちで書いておられるが、AIの「言語理解」が完成する2025年(松尾豊氏)には、国際的な舞台でも、日本は、そうした要因を完璧に排除した姿勢を取るべきだと考えている。学会などでは、英語を母語とする聴衆が多ければ、英語で講演すればよいが、日本語での講演も許容する社会となるだろうし、日本にはそうなるようにリードする責任がある。多様性は創造性の母体である。特定の言語を母語とする人たちが、何時までも有利であるという世界は、異常であるだけでなく、創造性の希薄な世界である。それでは、迫りくる地球規模での数々の難局を乗り越えることはできないだろう。ノーベル賞受賞講演を、物理学賞を受賞した益川氏は、史上初めて日本語で行った。日本は、これが普通のこととなるよう、世界をリードすべきだ。しかし、「知的創造的能力」の分野で日本のレベルが低ければ、いくらそう主張してもそうはならないだろう。

荻谷氏をはじめ、殆どの教育学者や教育社会学者、政治家、マスコミ関係者は、現代の教育問題の最大の課題が、「創造性」に集約されつつあることを全く認識していない。

1月15日の朝日新聞の朝刊の最大の紙面を占めていたのは、センターテストの問題と解答、及びその関連記事だった。繰り返すが、若者から創造的能力を奪うあらゆる入試(「即興力」テスト)は、即刻全廃すべきだ。

その同じ日の朝刊には、岸田政権も、前政権の学術会議の独立性・民主制の問題を引きずり、基礎科学の振興に足かせをはめようとしていることが明らかになった。

「政府が日本学術会議の組織改革法案を通常国会に提出する方針であることに対し、『安全保障関連法に反対する学者の会』は14日、東京都内で記者会見した。政府方針は『学術会議を政府の意向に追従する組織に改造するもの』だとして反対する声明を発表した。」

基礎科学の振興は、単に安全保障などに関わる問題だけでなく、この国の命運を左右する最重要課題である。

もう一度書く。

### 知的創造的能力 → 科学技術力 → 労働の生産性

の認識がない人が国のかじ取りを行うのは無理だ。今からでも遅くはない。直ちに、全ての「知的創造的能力」をそれなりに獲得した人達の全面的なバックアップを行い、まさに「国力」をつけるよう配慮して頂きたい。

「コロナ後の教育へ…」には、非常に正確な分析が展開されている。読者にも是非一読をお勧めする。しかしそこにも、現在が最も強く要請する「知的創造的能力」育成の展望は全く見えない。文科省のいう「主体性」「主体的」は、「合理性」「創造性」の前に全く空虚な言葉であり、筆者の知る限りでは、ほとんどすべての論調は、文科省と変わらない。

2 荻谷氏は人文系科学の振興を重要視している。筆者もそれを否定するものではない。ところが、日本では、全く別の分野での教育を重視している傾向がある。

たとえば、『春夏秋冬418号』で書いた通り、教育あるい

は再教育で「高度 IT 人材」として養成されている能力は、それぞれの時代で大きく変化し、それぞれ個別の技能の需要はかなり短期で終了する。「高度 IT 人材」が修得すべき能力の中身は、どんどん変化する。『春夏秋冬 418 号』の関連する部分を読み直していただきたい。最近、以下のようなニュースが流れた。

「米マイクロソフトは 1 月 18 日に多くのエンジニアリング部門で人員削減を計画していることが、事情に詳しい関係者の話で分かった。長引く需要低迷に備える中で、大手 IT 企業による規模縮小の動きが広がっている。利益確保のためにコスト削減を進める一方、人工知能 (AI) などの成長分野には重点的に投資していく姿勢を示した。」

2 月 4 日、朝日新聞朝刊の見出しは以下であった。

米 IT 大手 減速鮮明 計 5 万人削減

いつの時代も、どんな人でも、労働の現場では、その場に必要「技能」が欠かせない。人文科学分野の研究者であっても、IT 技術を駆使する必要もある。どこかで、それを訓練する必要はある。必要なスキルは、修得しなければならない。そのことと、大学学士課程を含む基礎科学教育において、「知的創造的能力」の育成を主要な教育目標と定めることは、別次元の議論である。何らかのそうした技能、スキルを軸に、基礎科学教育を行えば、「知的創造的能力」の乏しい人が育つだけだ。

全ての入試は、どの教科でも、1 教科精々数時間以内で結果を出さねばならない。たとえ 1 教科に数日をかけてテストしても、その人が「知的創造的能力」を持っているかどうかの判定はできない。即ち、全ての入試は、「即興力」を問うものである。何十回も引用した日本の誇る大数学者 岡潔氏の名言をもう一度書いておく。

「私は三日かからねば、つまり二晩寝なければ解けない  
という問題から問題と呼ぶことにしている」

岡氏の名言は、全ての入試は、「問題」とさえ言えないでつち上げた課題で人の将来を判定する愚かさを指摘したものと解釈できる。

そんなものを目標に、ただの一瞬たりとも集中することは、その人の「知的創造的能力」の成長を大きく毀損することとなる。「知的創造的能力」は、再教育できるものではない。幼少のころからの一貫した教育と多様で豊かな知的・文化的な環境の中で、大切に育てていかねばならない、言い換えればその人の「個性」である。

3 我々の眼前に広がっている世界は、この国の経済力、科学技術力、労働の生産性の全面的後退であり、こうした状況の先には、全面的な食糧難 さえも迫っている。しつこく、加谷珪一氏の言葉をもう一度書いておく。

「短期的にはともかく、長期的な成長というのは、財政や金融といった経済政策ではなく企業の競争力で決まる。経済政策には成長を側面支援する効果しかなく、それ自体が成長の原動力にはならない。日本経済がゼロ成長に陥ったのは、日本企業の競争力が低下したことが原因であって、経済政策でどうにかなるものではない。」

危機はどんどん迫ってくる。

財務省が (1 月)19 日に公表した 2022 年の貿易統計 (速報) で、輸出額

から輸入額を差し引いた貿易収支はマイナス 19 兆 9713 億円だった。赤字は 2 年連続で、赤字額は 12 兆 8160 億円だった 14 年を上回り過去最大となった。昨年 2 月に始まったロシアのウクライナ侵攻などによる資源価格の高騰に加え、記録的な円安も影響し、輸入額が拡大。年間を通して、輸出額を大きく上回った。日本は、かつてトップクラスの機械輸出国であったが、いまや中国・米国・ドイツに大きく水をあけられている。

今、知的創造的能力 → 科学技術力 → 労働の生産性 を目指した教育改革を断行することなく、一体どんな未来が待っているというのか。

地域政党・大阪維新の会の吉村洋文代表は 1 月 20 日、

大阪府知事・大阪市長のダブル選 (4 月 9 日投票) で、大阪公立大の授業料について府民を対象に所得制限を設けない完全無償化をマニフェスト (公約) に盛り込む。

と表明した。それは、全ての入試を廃止し、中等・大学学士課程教育における基礎科学の授業・講義の詳細なシラバス・講義要録を半年以上前に公開し、全ての意欲のある生徒・学生が受講可能としたときのみ、現実的な価値が現れる。受験技術や技能教育などの「即興力」教育ではなく、可能な限りの「知的創造的能力」育成の教育を断行して頂きたい。

## 創造性教育を！

1 最初に『春夏秋冬 417 号』で議論した、「与えられた点において、与えられた線分に等しい線分を作ることができる」(『原論』の 2 番目の定理)、の証明で、

「作図とは、定規とコンパスを公法通りに用いて、有限回の操作によって図形を描くこと」となる。定規とコンパスを公法通りに用いるとは、

- (1) 与えられた 2 点を結ぶ線分を引く
- (2) 線分はいくらでも延長する
- (3) 与えられた点を中心として、与えられた長さを中心とする円を描く

ことである。『ユークリッド原論』の全ての議論は完璧にこの作図の原理を基にして構成されている。

と書いた。各種のコメントを頂いている古い友人でもある読者から、この 2 番目の定理の証明は、(3) より、無用 (自明) ではないのか、と言う疑問が提起された。誤解の原因は、この (3) の表現が不十分であることによる。

筆者は、読者に、(3) を以下の様に解釈すべきだ、と提案して、誤解を解いた。

「コンパスで公法通り円を描くとは、与えられた (あるいは既に確定した) 点を中心として、与えられた (あるいは既に確定した) 点を通る円を描く」ことを意味する。

よくやるように、コンパスで、任意の「長さ」を移動することを許しているわけではない。

線分の移動 (「移動」は、平行移動、回転移動、対称移動のみを指す。) は、三角形の合同条件の証明の最も重要な要素であり、したがって、相似条件の証明にも欠かせない。もっと言えば、ユークリッドの「原論」は、線分の移動を基礎に成り立っている。近いうちに、もう一度解説する。

2 『春夏秋冬 418 号』で予告した殆どの議論は、『春夏秋冬 412 号』で詳述している。『春夏秋冬 412 号』を読んでいた人の中には、だまし討ちにあった、と感じられる読者もあると思う。しかし、問題は多くあったとしても、各号の『春夏秋冬』は全力を挙げて書いてきた。読者は、既に一度読んで頂いた人も含め、是非、もう一度『春夏秋冬 412 号』の「創造性教育を！」を読んで頂きたい。

前回、塾の小学生向けのテキストの計算問題、 $\frac{3}{437} - \frac{2}{589}$  など、当塾の HP に公開している小学生向けのテキスト「小テスト」の通分のところを学習しておいてほしい、と書いた。簡単な問題で、2つの分数の通分の原理を理解することを目的に作った問題である。簡単に、解答しておく。

まず互除法で 589, 437 の最大公約数を求める。

$$\begin{array}{r} 1 \quad 589 \quad 437 \quad 2 \\ \quad 437 \quad 304 \\ \hline 1 \quad 152 \quad 133 \quad 7 \\ \quad 133 \quad 133 \\ \hline \textcircled{19} \quad 0 \end{array}$$

19 が 589 と 437 の最大公約数  
したがって、  
 $589 = 19 \times 31$   
 $437 = 19 \times 23$

$$\frac{3}{437} - \frac{2}{589} = \frac{3}{19 \times 23} - \frac{2}{19 \times 31}$$

$$= \frac{3 \times 31}{19 \times 23 \times 31} - \frac{2 \times 23}{19 \times 23 \times 31}$$

$$= \frac{93 - 46}{19 \times 23 \times 31} = \frac{47}{13547}$$

中学生だけでなく小学高学年の生徒は、『中学数学基礎』には、分母の素因数分解が比較的簡単にできる 2 つ、あるいは 3 つの分数の加減を行う方法を詳細に書いており、是非参照しておいて頂きたい。それに関連して、『中学数学基礎』には、以下の演習問題を示している。

3 つの正の整数  $y$ , 54, 300 の最大公約数が 6, 最小公倍数が 5400 となるような  $y$  の値の個数を求めよ。(’10, 洛南高)

5400, 54, 300 の素因数分解より、 $y = 2^\ell 3^m 5^n$  と置く。

$$\begin{array}{r} y = 2^\ell \times 3^m \times 5^n \\ 54 = 2 \times 3^3 \\ 300 = 2^2 \times 3 \times 5^2 \\ \hline 5400 = 2^3 \times 3^3 \times 5^2 \end{array}$$

最大公約数が 6, 最小公倍数が 5400 となるためには、

$\ell = 3, m = 1, 2, 3, n = 0, 1, 2$  である。

よって 可能な  $y$  は  $1 \times 3 \times 3 = 9$  通り。

繰り返すが、この程度の問題の、正解でなくても構わないが取り扱いの見当もつかない人は、上記の『中学数学基礎』の関連部分を必ず学習しておいて頂きたい。

ここまでは、基本的には、小学上級生向けの話題である。そして、『春夏秋冬 312 号』をしっかりと読み返して、

『春夏秋冬 418 号』で書いた問題  
(複雑)  $3064p + 2776q = 2024$

(一般解  $p = 347n + 248, q = -383n - 273, n$ : 整数) を時間をかけて手計算 (当然のことながら、百均やスマホの電卓は使ってもよいとする。百均やスマホの電卓の使用さえ禁止する人には、脳ドックでの検診をお勧めする。頭が、60 年以上前のままだ。) で求めておいていただきたい。1 時間や 2 時間はあっという間に過ぎてしまうだろう。その後、計算知能 “WolframAlpha” で、

「solve indeterminate equation  $3064p + 2776q = 2024$ 」

と入力して、一般解を求めておいて頂きたい。“WolframAlpha” は、瞬時に一般解を応えてくれる。

Stephen Wolfram は数式処理システム「Mathematica」(マセマティカ)の開発・販売を行っていた。“WolframAlpha”は、それをオンラインの質問応答システムに発展させたものである。無料で活用できる。現在では、日本語でも利用できる。WolframAlpha と検索すれば、日本語サイトが立ち上がり、全てが解決する。「計算したいことや知りたいことを入力してください。」の欄に、筆者は日本語対応がまだなされていない段階で、上記の solve indeterminate ... を入力していた。WolframAlpha の応答は少しづつ進化している。(indeterminate equation : 不定方程式)

即ち、こうした問題は、いくら複雑でも、いわゆる「定石」にしたがって、AI は正解するのである。「即興力」では、既に人は AI に勝てない。『春夏秋冬 418 号』で触れた「東ロボ君」プロジェクトの筆者の総括も、そのことを物語っている。間の抜けた各種入試は、即刻廃止するべきだ。

3 『中学数学基礎』は、現状ではまだまだ十分には注目されていないが、ベズーの等式は中学生にとってかなり役に立つとして、その活用法についても言及している。

こうしたベズーの等式の利用法は、筆者の知る限り、どこにも書かれていない。したがって、こここのところだけ、『春夏秋冬 412 号』を少し見やすくして、再録する。

定理「 $A, B$  が互いに素の時、 $pA + qB = 1$  となる  $p, q$  が存在する」は、 $A, B$  が互いに素、ということの便利な表現と見なすこともできる。

① 「 $A, B$  の最小公倍数  $L$ , 最大公約数  $G$  のとき、 $GL = AB$ 」

などの証明のところで用いる、互いに素な整数の性質、

「整数  $A$ , 互いに素な整数  $B$  と  $C$  について、 $AB$  が  $C$  の倍数ならば  $A$  は  $C$  の倍数である。」

を以下の様に簡単に証明できる。

$B, C$  は互いに素だから、 $pB + qC = 1$  となる整数  $(p, q)$  が存在する。

両辺に  $A$  をかけて、 $A = pAB + qAC$ 。 $pAB, qAC$  は  $C$  の倍数だから、 $A$  も  $C$  の倍数となる。

② 整数の議論を行うとき必要な多くの性質 (ユークリッドの『原論』には多数掲載されている) に適用できる。

「 $A, B$  がともに  $C$  に対して互いに素であれば、

$AB$  も  $C$  と互いに素である。」

整数  $p, q, p', q'$  が存在し、 $pA + qC = 1$ , したがって、 $B = pAB + qCB$ 。

これを  $p'B + q'C = 1$  に代入して、

$pp'AB + (Bqp' + q')C = 1$  よって、 $AB$  と  $C$  は互いに素。

③ 「整数  $A, B$ , 素数  $x$  について、 $AB$  が  $x$  の倍数ならば、

$A, B$  のうち少なくとも一方は  $x$  の倍数である。」

$AB$  が  $x$  の倍数であり、 $A$  も  $B$  も  $x$  の倍数でないと仮定する。

$x$  は素数だから、 $x$  の約数は 1 と  $x$  だけである。したがって、 $A$  が  $x$  の倍数でないということは、 $A$  と  $x$  は互いに素を意味する。よって、 $pA + qx = 1$  となる整数  $(p, q)$  が存在する。両辺に  $B$  をかけて、 $B = pAB + qBx$ 。これより、 $AB$  は  $x$  の倍数だから、右辺は  $x$  の倍数となり、 $B$  は  $x$  の倍数となる。これは仮定に反し、 $A, B$  のうち少なくとも一方は  $x$  の倍数となる。

④ ③を 2 度適用して、3 整数の積が素数  $x$  の倍数ならば、少なくともその一つの整数は  $x$  の倍数となる。またこの性質を繰り返し利用すると、

「整数  $A, n$ , 素数  $x$  について、 $A^n$  が  $x$  の倍数であれば、 $A$  は  $x$  の倍

数である。」が導かれる。

(適用例：背理法によって  $\sqrt{2}$  が無理数であることの証明)

⑤ 「整数  $A, B$  が互いに素であれば、

$A^m, B^n$  ( $m, n$  は任意の自然数) は互いに素となる。」

$pA + qB = 1$  となる整数  $p, q$  が存在する。 $pA = -qB + 1$  の両辺を  $m$  乗すると、

$p^m A^m = \{(-q)^m B^{m-1} + m(-q)^{m-1} B^{m-2} + \dots + m(-q)\} B + 1$  となる。したがって、 $p^m A^m + q^m B^m = 1$  ( $p, q'$  は整数) となり、 $A^m$  と  $B^m$  は互いに素である。

したがって、改めて、 $p'A^m + q'B = 1$  とおくと、 $q'B = -p'A^m + 1$  となる。両辺を  $n$  乗して、同様にして、 $B^n$  と  $A^m$  は互いに素となる。

以上のように、「互いに素な2数のベズーの等式」は、非常に役立つ。

4 『春夏秋冬』は中・高校生にだけ呼び掛けているのではない。中等教育・大学学士課程の学生、小学高学年の児童に向けても書いている。

整数は、体をなさない、従って、整数の議論は、前々回や前回の『春夏秋冬』での数の取り扱いと大きく異なってくる。ここでは、小学上級生を念頭に、整数の取り扱いを議論する。それは『中学数学基礎』の最も最初のテーマに遡ることでもある。早速、『中学数学基礎』にしたがって、絶対に欠かせない最小限の整数の議論を展開する。

整数は、 $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$  の全てをいう。したがって、整数には負の整数、0、正の整数がある。正の整数を一言で自然数 (natural number) ともいう。ここでは、整数とは「0及び自然数」と限定して話を進める。

正の整数  $A$  が  $A = m \times a$  ( $m, a$  は整数) と積の形に分解できるとき、 $m, a$  は  $A$  の「約数」または「因数」と言い、 $A$  は  $m, a$  の「倍数」と言う。  $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$  だから、6の約数は1, 2, 3, 6である。

まず、素数の定義を行う。

素数とは、1及びその数自身以外の約数を持たない、1より大きな自然数

と定義する。2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31,  $\dots$  である。1を含まないことは重要である。

素数は無限個存在する

今仮に、整数が有限個しか存在しないとして、その自然数の最大値を  $N$  とする。 $N$  は自然数だから、 $N + 1$  も自然数である。これは、 $N$  が最大の自然数であるとした仮定に矛盾する。したがって、自然数は無数に存在する。

さて、素数が有限個 ( $N$  個) しかないと仮定して、素数を小さい順に、

$p_i$ , ( $i = 1, 2, 3, \dots, N$ ;  $N$  は有限の自然数を表す定数)

とする。そうすると  $q = p_1 p_2 \dots p_N + 1$  は  $p_1, p_2, \dots, p_N$  のいずれかを因数に持つか、素数かのいずれかである。 $q$  は  $p_1, p_2, \dots, p_N$  のいずれで割っても余りが1だから、 $p_1, p_2, \dots, p_N$  のいずれの因数も持たない。よって、 $q$  は素数である。これは  $p_1, p_2, \dots, p_N$  のいずれとも違う数だから、素数が  $N$  個だとする仮定に矛盾する。よって、素数は無限個存在する。

『中学数学基礎』には、もっと簡潔な証明も書いている。そちらも見ておいていただきたい。

次に、

自然数  $A \geq 2$  の素因数分解  $A = x^p y^q z^r \dots$  は、かける順番を除けば一意的である。

を考える。

「一意的」とは「意味や値が一つに確定しているさま」をさす日常用語であるが数学でもよく用いられる。今の場合、これはほとんど自明である。「自明」とは、証明や説明、解説をしなくても、それ自体ではっきりしていることをさすが、しばしば自明だと思っていることも意外と証明しようとするのが難しい、あるいは自明でないこともある。素因数分解に基づくあらゆる議論の背景にある基本的事項だから証明しておこう。

$A$  の2通りの素因数分解があったとして、

$$(A =) p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m} = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_n^{b_n}$$

( $m, n$  は自然数、各  $i$  について、 $p_i, q_i$  は素数、 $a_i, b_i$  は自然数)

とする。 $p_1$  は  $A$  の約数だから、 $q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_n^{b_n}$  の約数である。したがって、 $p_1$  は  $q_1, q_2, \dots, q_n$  のいずれかと一致する。素数の並べ方の順序を決めておくと  $p_1 = q_1$  と仮定しておくことができる。さらに、 $A$  は  $p_1^{a_1}$  で割れるので右辺を見ると、 $b_1 \geq a_1$  である。ところが、 $b_1 > a_1$  とすると、右辺は  $p_1^{a_1+1}$  で割れることになり、左辺と矛盾する。したがって、 $b_1 = a_1$  となる。両辺を  $p_1^{a_1}$  で割って同じ事を繰り返すと  $p_2 = q_2, a_2 = b_2$  となる。これを続けていくと両辺同じ最後の素因数のところで終了する。

5 公約数、公倍数について、基本的なことを復習する。

整数  $A, B$  に対して、

$$A = ma, B = mb, \quad (a, b, m \text{ は整数})$$

のとき、 $m$  を「公約数」という。また公約数のうち最大のものを「最大公約数」(greatest common divisor) という。2数の最大公約数が1のとき、すなわち、1以外の共通な因数を持たないとき、その2数は「互いに素」という。したがって、2つの整数  $A, B$  の最大公約数を  $G$  とすると、

$$A = Ga, B = Gb, \quad (a, b \text{ は互いに素な整数})$$

となる。

2つ整数  $A, B$  に対して、

$$mA = nB \text{ となる整数, } (m, n \text{ は整数})$$

のことを「公倍数」という。0以外で、最小の公倍数を「最小公倍数」(least common multiple) という。

また、『中学数学基礎』では書いているが、『春夏秋冬 412号』では省略していた、次の2つの定理と証明を書いておく。

「2つの整数のすべての公倍数は

最小公倍数の倍数である。」

$A, B$  の最小公倍数を  $L$ , 任意の公倍数を  $\ell$  とし、 $\ell = qL + r$ , ( $0 \leq r < L$ ) とする。

$L$  も  $\ell$  も  $A$  の倍数だから、 $L = cA, \ell = dA$ ,  $c, d$  は整数とおくと、 $r = \ell - qL = A(d - qc)$  で、 $r$  は  $A$  の倍数となる。同様に  $r$  は  $B$  の倍数となり、 $r$  は  $A, B$  の公倍数となる。 $0 \leq r < L$  だが、もし  $r \neq 0$  ならば、 $L$  より小さな正の公倍数が存在したことになり、 $L$  が正の最小の公倍数であることと矛盾する。よって  $r = 0$  となる。したがって、すべての公倍数は最小公倍数の倍数である。

「2つの整数のすべての公約数は

最大公約数の約数である。」

整数  $A, B$  の最大公約数を  $G$ , 任意の公約数を  $g$  とし、 $G$  と  $g$  の最小公倍数を  $\ell$  とすると、 $A$  は  $G$  と  $g$  の公倍数だから、 $\ell$  の倍数である。 $B$  に

ついても同様だから、 $l$  は  $A, B$  の公約数である。よって  $l \leq G$ 。また、 $l$  は  $G, g$  の最小公倍数だから、 $G \leq l$ 。よって  $l = G$ 。したがって、 $g$  は  $G$  の約数である。

この2つの定理は、全ての自然数は素数の累乗の積で表されることを用いると、自明のことである。

$$A = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \times x$$

$$B = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n} \times y \quad (x, y \text{ は互いに素})$$

としたとき、最大公約数は  $G = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$  であり、

$$\text{他の公約数 } m \text{ は、} \quad m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}$$

$$(b_1 \leq a_1, b_2 \leq a_2, \dots, b_n \leq a_n)$$

で、 $m$  は  $G$  の約数となるからだ。

しかしこの自明であるという根拠には、「素因数分解は一意的である」という定理が背景にあることを忘れてはならない。

また、『春夏秋冬412号』で記したとおり、ユークリッドの互除法の証明を先に済ませておくと、この証明の前段(「これを続けて」以降)で、 $A, B$  の任意の公約数を  $m$  とすると、 $m$  は1行目より  $r_0$  の約数、2行目から  $r_1$  の約数、 $\dots$  となり、結局  $m$  は  $r_k$  の約数となる。この  $r_k$  は最大公約数だったから、公約数は最大公約数の約数となる。

よく知られた定理が成り立つ。

整数  $A, B$  の最大公約数を  $G$ 、最小公倍数を  $L$  とする

$$A = Ga, \quad B = Gb, \quad a, b \text{ は互いに素}$$

$$L = Gab, \quad AB = GL$$

$A, B$  の最大公約数を  $G$ 、最小公倍数を  $L$  とする。このとき、 $A = Ga, B = Gb$  ( $a, b$  は互いに素な自然数)であった。 $L$  は  $A$  の倍数だから  $L = mA$  ( $m$  は自然数)と表せる。 $A$  を代入して、 $L = ma \cdot G$  となるが、これが  $B = b \cdot G$  の倍数であるためには  $ma$  が  $b$  の倍数でなければならない。 $a, b$  は互いに素であるから、 $m$  が  $b$  の倍数でなければならない。その0ではない最小の数は  $m = b$  である。よって、 $L = Gab$ 。

【例題1】 「和が90で最小公倍数が108である2つの自然数を求めよ。」

2数を  $A, B$ 、最大公約数を  $G$  とし、 $A = Ga, B = Gb$  ( $a, b$  は互いに素)とすると、

$G(a + b) = 90, Gab = 108$ 。 $G$  は 90, 108 の最大公約数  $3^2 \times 2$  の約数だから、18, 9, 6, 3, 2, 1 が候補である。 $G = 18$  のとき、 $18(a + b) = 90, 18ab = 108, (a, b) = (2, 3), G = 9$  のとき、 $9(a + b) = 90, 9ab = 108$ 、解なし、その他も解なし。よって  $G = 18$ 。したがって、36, 54

以上が、「互除法」以前の全ての議論だ。

6 『中学数学基礎』では、整数問題の一環として、他の不定方程式 (indeterminate equation) の議論も行っている。

【例題】 「等式  $xy - x + y = 5$  を満たす自然数の組  $(x, y)$  を全てもとめよ。」

$$(x + 1)(y - 1) = 4, \quad x, y \text{ は自然数より, } x + 1 \geq 2, y - 1 \geq 0$$

だから、 $(x + 1, y - 1) = (4, 1), (2, 2)$ 。したがって、 $(3, 2), (1, 3)$

【問題】 「方程式  $3xy + 3x + y = 5$  を満たす2つの整数  $x, y$  の組を全て求めよ。」(10 倉敷芸術科学大)

$$(3x + 1)(y + 1) = 6, \quad 3x + 1 \text{ は } -2 \text{ と } 1 \text{ のみ。}$$

$$(x, y) = (-1, -4) \text{ と } (x, y) = (0, 5)$$

【問題】 「 $xy^2 - x - 3y^2 - 12 = 0$  を満たす正の整数  $x, y$  の組  $(x, y)$  を全て求めよ。」

$$(x - 3)(y + 1)(y - 1) = 15, \quad x \geq 4, y \geq 2 \text{ を考慮すると,}$$

$$(x, y) = (4, 4), (8, 2)$$

【例題】 「 $x^2 - 4xy - 8yz - 4z^2$  を因数分解すると  $\square$  となり、

$$x^2 - 4xy - 8yz - 4z^2 = 1, \quad x + 2y + z = 8 \text{ を同時に満たす整数 } x, y, z \text{ の組を求めると,}$$

$$(x, y, z) = (\square, \square, \square) \text{ となる。}$$

$(x + 2z)(x - 4y - 2z)$ 。 $y, z, x + 2z, x - 4y - 2z, 8 - 2y - z$  が整数の時、 $x$  は自動的に整数となり、 $(x + 2z)(x - 4y - 2z) = 1$  に  $x = 8 - 2y - z$  を代入して、 $(8 - 2y + z)(8 - 6y - 3z) = 1$  したがって、 $(8 - 2y + z, 8 - 6y - 3z) = (1, 1), (-1, -1)$ 。

整数の組は  $(5, 3, -3)$ 。

【例題】 「10進法で表された6けたの自然数  $abcdef$  と  $bcdefa$  の比は 3:2 である。

(1) 5桁の自然数  $bcdef$  を  $K$  とおくと、 $K$  を  $a$  を用いて表せ。

(2) 自然数  $abcdef$  をすべて求めよ。」

$$abcdef = x, \quad bcdefa = y \text{ とおくと,}$$

$$x = 10^5a + 10^4b + 10^3c + 10^2d + 10e + f,$$

$$y = 10^5b + 10^4c + 10^3d + 10^2e + 10f + a \text{ となり}$$

$$y = 10K + a, \quad K = x - 10^5a \text{ となる。したがって,}$$

$$x : y = (K + 10^5a) : (10K + a) = 3 : 2 \text{ これより,}$$

$$K = \frac{2 \times 10^5 - 3}{28} a = \frac{28571}{4} \times a,$$

$$a \text{ は一桁の偶数より, } a = 4, 8.$$

したがって、 $x$  は、428571, 857142

整数の議論はあらゆる数学の分野に関わるだけでなく、数学の基礎に関わる重要な課題へと無限に広がる。『中学数学基礎』では、その後、基礎的な議論を踏まえ、2011年以前に出題された比較的新しい入試問題の解説を行っている。いずれも、原理的には、中学生に解けない問題ではないが、かなりの訓練を要す。残念ながら、統一的な手法が見いだせておらず、整数問題には、いくらでも難問はある。それぞれの学習段階で、どこまでそれを追求すべきかの判断は、筆者の能力を超える(筆者は、研究・開発で数学を武器として利用する立場にあったが、それでも、数学の進展の歴史的経過の理解は、不可欠である)。疑問が湧けば、実績ある数学者に相談頂きたい。

7 整数の議論を一応済ませた段階では、議論はどんどん遡っていく。即ち、集合と論理・推論に話が進む。しかし、『春夏秋冬』では既に、386号、387号、389号、390号、392号の全5回にわたって、かなり詳細に、あるいは、中学生レベルとしては、これ以上無理だ、というレベル(述語論理は高校教育に取っておくべきだと考えている。当塾の非公開の『中学数学発展』には、一部、述語論理も展開している)で、集合と論理・推論を展開した。

今回のことについて、予定は決まっていないが、これまでの議論で、必ずしもご理解頂かなかった線分の移動と三角形の合同条件との関係について、再度検討を行うかもしれない。