



## 猶予はありません

中学生・高校生は、学年初めに教科担当の先生に、「先生は、どんな『知的創造的実績』をお持ちですか」と尋ねなければなりません。

『春夏秋冬』は、一般教育について議論しており、特殊技能やスポーツ・芸術などに関わる教育の議論を行っているわけではありません。そうした教育では、実績ある先生への信頼は、科学とは別の形での実績を基礎としています。IT教育は、多分にそうした傾向を持っています。

「知的創造的実績」は、通常、査読(peer review ピア・レビュー)が確立した学術誌(国際誌)に採用された科学論文で評価され、既に確立した明確な事象です。現代が要請する主要な教育目標は「知的創造的能力」です。従来は、必ずしも明確にこのことを確認することなく、教育やその結果としての学力を、広く役立つものと考えて来ましたが、AIやICTの進歩によるあらゆる方面での自動化が進み、社会が人に求める知的能力には、そうした自動化だけでは処理できない人間の「知的創造的能力」を要請するようになってきました。言い換えれば、現代ではまだ不十分なAIやICTに付加すべき人の「知的創造的能力」こそ人に求められるようになってきました。

現代でも、私立高校の理系教科の非常勤の先生は、何らかの「知的創造的実績」を持った人がかなり多くいます。彼らの教育ノルマを週2日程度に抑え、残りの時間を全て自らが目指す研究活動に専念できるように身分保障(大学の教師程度の給料の支給を含む)し、私立だけでなく公立高校、全ての中学でも同様の条件を提供すれば、この国の困難のかなりの部分が解決します。そのイメージは、『春夏秋冬 420号』を参照下さい。教育の面からは、如何に「知的創造的能力」を持った人を増加させるか、科学技術の発展の面からは、如何にそうした能力を持った多くの人を多くの研究開発の現場に配置するかが問題となります。

朝日新聞(3月31日)によると、後でも書きますが、起業家イーロン・マスク氏ら千人以上のテクノロジー関係者らが以下のように訴える、即ち

チャットGPTを運営する米新興企業オープンAIが今年3月、最新の言語モデル「GPT4」を公開。書簡では「人間と競合する知能を持つAIは、社会や人類に深刻なリスクとなりうる」として、GPT4より強力なAI開発の半年間の停止を訴えている。

という段階にまで、既にAIはかなり進んでいます(ただし筆者が、GPT4を試したわけではありません)。自然科学的分野においても、既にAI抜きには、殆ど何もしないぐらいに状況は変化しています。既に多くの確立した科学的真実や技術は、AIとICTだけで自動的に処理可能になります。逆に言えば、人こそがやらねばならないことは、AI

や既存の技術だけでは処理できない、あるいは処理してはならない、したがって明確に「人の知的創造的能力」を要する事態に対応することです。そして、未だ明確な「知的創造的実績」を持たない人が、「知的創造的能力」の実体を理解したり、「知的創造的能力」を発揮したりすることができるかどうかは全く分かりません。現代の教育には、主要には多くの人に「知的創造的能力」を教育する使命があるのです。

勿論、優れた教育を実現するためには、ここで言う「知的創造的実績」を持った人が軸とならなければなりません、その何倍もの教育心理学などを修得した補助的な教師も欠かせません。

人の「知的創造的能力」は、一片の確立した理論や技術の修得によって獲得できるわけではありません。その人ならではの知的創造的能力は、その人が持つ個性・多様性を母体として大きく成長します。人の持つ個性・多様性は、創造性の源泉です。確立した知的体系に人の個性・多様性が結合したところにひとの知的創造性の芽が出てきます。

おたとしまさ氏は、

「なぜ中学受験するのか?」おたとしまさ著

光文社新書 2021年11月社販1刷

の中で、結局 中学受験の目標はハビトゥス(habitus)の獲得 である、と書いています。

ハビトゥス(habitus)は、人々の日常経験において蓄積されていくが、個人にそれと自覚されない知覚・思考・行為を生み出す性向である、と定義されています。ハビトゥスは、過去の経験の中で形成された性向(disposition)の体系であり、行為や認識を方向づけるとされています。私たちの日常的な行為は、ゼロの状態から行われるのではなく、経験の中で身体化した行為の仕方やものの見方を動員して行われている、と言うのです。

モースのハビトゥスは身体技法の型を意味したが、ブルデューのハビトゥスは日常生活における行為や思考を方向付ける性向のシステムである、とその意味が発展したとされています。

おたとしまさ氏は、ハビトゥスは、「特定の集団に共通してみられる思考やふるまいのパターンを生み出す諸要因の集合」であり、学校のハビトゥスは、その学校の「らしさ、文化」であり、その学校に特有の「非認知能力のブレンド」である、と書いています。結局、おたとしまさ氏は、「中高一貫教育は、大学受験のための先取り教育ではなく、豊かな思春期を謳歌するためのゆとり教育」だと主張しています。

浅学の筆者の見解では、ハビトゥスは極めて重要であり役立つものではあっても、現実に独立して存在するものではなく、思考・推論の作業概念であり、その普遍的で客観的な評価方法は存在しないと考えています。誤解を恐れずに表現すれば、宗教のようなものです。大切なものではあっても、人によって、大きくその表現や価値は変わります。お

たとしまさ氏は、人によって変わるものを目標に、私立中高一貫校への受験勉強・受験対策は、非常に価値がある、と主張していることとなります。敢えて言えば、受験に失敗しても、その受験対策には、価値があった、という言い訳ができるのであり、要するに、私立中高一貫校の応援歌に過ぎません。これは、

「この 40～50 年、私立中高一貫校の隆盛が際立ってきましたが、この 20 年ほどのこの国の科学技術や労働の生産性の著しい後退が進行した」

という厳しい現実に符合します。

読者の皆様には、おたとしまさ氏の論理の組み立てをしっかりと理解しておいて頂きたい。当塾の主張する「知的創造的実績」は、客観的な存在であり、科学教育はそうした誰もが認めざるを得ない客観的な事象を根拠に進めるべきであり、時々ミスはあっても、ギリシャ時代からのその存在は、疑いようはありません。

筆者は「知的創造的能力」の重要な源泉はヒトの多様性(民族・母語・地域・宗教・性や LGBT …)にあると主張しています。それらを大切に守ることは重要なことですが、決してそれらは目標ではありません。

一般ユーザーの Twitter 投稿で、「国連、日本を『先進国』から『上位中所得国』へ格下げ、ジャップ最後のプライド散る、失われた 30 年について先進国脱落 2000 年初頭は世界 2 位の GDP が、たった 10 年のアベノミクスで世界 40 位まで落ちる」とあったそうです。これが誤解であることは、少しデータを検証すれば誰でもわかりますが、しかし、こうした誤解が起こるほど、この国の国際的地位が年々低下していることを疑う人は誰もいません。

先月号の『春夏秋冬』では、

もっとショッキングなニュースもあります。オーストラリアのシンクタンク・豪戦略政策研究所 (ASPI) が 3 月 2 日、経済や社会、安全保障などの基盤となる重要な技術の国別競争力のランキングを公表した中で、全 44 項目のうち 37 項目で中国が 1 位となっており、日本がトップのものは、何一つ存在しなかった。

と書きました。このままでは、いかなる経済政策や安全保障政策を導入しても、この国はお先真っ暗です。

---

## 事態は一見、複雑化している！

---

ただ、こうした考え方に勿論批判はあり、事態はそれほど単純ではないのです。

アカデミー・フランセーズイノベーションセンターの教授で経済学者のフィリップ・アギオン氏は、

(上記の) オーストラリアのシンクタンク (ASPI) の分析に対して「彼らの研究は中国が技術面で米国を追いつく勢いを証明するものだが、一方で中国が今後長い時間引き続き西側に依存するという見方を一層強めるものだった」と述べている。各分野でトップレベルとされる学術誌のさらに上位 5% にフォーカスして観察した場合、中国の科学技術が西側を猛追しているという結論は断片的なものになり、米国の著者との共同執筆を除けばその勢いはますます弱くなる。中国の研究者は米国との協力を必要としているが、米中間の研究協力は逆に疎遠になりつつある。

氏自身が所属する同センターの研究者が実施した工業所有権に関する作業により、ブロックチェーン、コンピュータービジュアル、ゲノム編集、水素エネルギー、自動運転車など大多数の技術分野で中国が米国に大きく依存していることが浮き彫りになった。

と言っているそうです。確かに、そうした傾向があることは否定できません。

しかし一方では、ジャーナリストの福島香織氏によると、中国全人代開催中の 3 月 7 日に、国務委員兼国務院秘書長の蕭捷氏が人民代表に説明した国務院機構改革の 13 項目の一番目は、以下のようなものだそうです。

国務院の科学技術部(科技部=科学技術省)機能の多くを、新たに設立された党の中央科学技術委員会が吸収、事実上、中国のハイテク政策を党中央、つまり習近平が直接しきることになる。

狙いは、科技技術戦略計画を強化し、体制改革、資源統括、総合協同、政策法規、督促検査などのマクロ管理職責を強化し、健全な新型挙国体制で、科技イノベーションの新たな包括的な管理を最適する、ということで、米国から西側のハイテクデカップリングに党主導の挙国体制で対応するため、というのが理由だ。

科研費の分配、管理も強化するとされる。中国では、半導体分野でも詐欺まがいのプロジェクトに予算が流れるなどの失敗がこれまでにあった。この責任を科技部にあると考えた習近平は、科技予算の権限を党中央に吸収し自分が握ろうと考えたのだろう。改組された科技部は科研費の審査評価、管理にもう参与しない。

日本では、今に及んで、

4 月 4 日、10 兆円の大学ファンドに基づいて、世界トップレベルの研究力をめざす大学を作る「国際卓越研究大学」の初めての公募に、東京大や早稲田大など 10 大学が応募した。

ことが、報じられた。こうしたことは、先月号『春夏秋冬 420 号』で記した日本政府による日本学術会議への干渉や大学での基礎研究にまで競争的資金への一本化を含めて、上記の中国の動向(ハイテク独裁とも言われている)と比較検討すべきものと考えられます。しかし、筆者には、どちらもその展望は絶望的に思えます。

以下では、まず日本の世論の動向を見てみます。筆者が比較的信頼していた森永卓郎氏は、『春夏秋冬 311 号』で書いた通り、

2008 年 8 月 18 日に、石油製品価格が高騰する中で、原油バブルは近いうちに必ず崩壊する。ニューヨーク商品取引所の原油先物相場は、7 月 11 日に史上最高値となる 1 バレル (159 リットル) = 147 ドルを記録したが、それ以後は下落を続け、8 月 15 日には 1 バレル = 111 ドルにまで下落し、約 4 カ月ぶりの安値をつけた。 . . .

わたしは、近い将来、原油価格が劇的に暴落する事態が起きると考えている。なぜなら、原油価格を高騰させた最大の要因は投機だからだ。投機にもとづく価格上昇、すなわちバブルは必ずはじけるのである。

と主張していました。確かに、歴史はその通りになりました。その森永卓郎氏は、あちこちで、

資本主義はあと 2 年でダメになる、東京を捨てて逃げたほうがいいと言っています。

森永氏の最近の著書「増税地獄 増負担時代を生き抜く経済学」(角川新書)では、

多くの人に トカイナカ暮らし のチャンスがやってくる

と言っています。「トカイナカ」とは、

都会に通える距離にある自然豊かなエリア。通勤可能というのが大きなポイントで、仕事を変える必要がなく、移住による収入の変化という不安もない。都会と田舎を結ぶ路線の始発駅周辺であれば、ゆったり座って通勤できるし、その時間を仕事や読書などの趣味にあてることもできる。このようです。

『未来の年表 業界大変化』（講談社現代新書）著者のジャーナリスト・河合雅司氏も、

国交省は、人口 10 万人程度の商圏であれば大半の業種が存続可能だとしています。10 万人都市をつくれということではなく、複数の自治体でこれぐらいの商圏規模を維持できれば生活に不可欠なサービスを概ね維持し得るとのシミュレーションです。全国で道路網が整備されましたし、デジタル技術も使えばかなり多くの地域で 10 万人商圏を形成することはできると思います。

と言っています。そんな森永氏が、アベノミクスよろしく、消費税をはじめとする租税を軽減し、必要な資金はどんどん国債を発行すればよい、と言っています。

#### 知的創造的能力 → 科学技術力 → 労働の生産性

の強い因果関係の「時代認識」を基礎にすれば、森永氏の最近の主張は全く信用できません。持てる老人（筆者は貧乏で森永氏よりもっと年老いています）の処世術としては評価できますが、これだけでは、科学技術力を維持・発展させることはできません。そこには各地の多様性を地域の「知的創造的能力」の育成の核として活用する戦略が見えていません。影響力のある森永氏には、当塾の教育戦略を是非ご理解いただきたい、と考えています。

現代は「知的創造的能力」の評価を疑うような事態も進行しています。

ChatGPT の新モデル「GPT4」発表 画像をもとに質問できるオープン AI によると、司法試験の模擬試験を受けさせた場合、チャット GPT の基盤モデル「GPT3・5」が受験者の下位 10% の水準だったのに対し、GPT4 は上位 10%。GPT4 は質問や答えで扱える単語が約 2 万 5 千語で、チャット GPT より約 8 倍に増え、事実に基づく回答の確率が 40% 高まったという。

筆者は、最近のテクノロジーに全く疎く、全て伝聞の範囲ではありますが、AI の進展はとどまるところを知りません。すでに記した通り、起業家イーロン・マスク氏ら千人以上のテクノロジー関係者らが、「少なくとも今後半年間、最先端の人工知能（AI）の開発を停止するよう求める」公開書簡に署名したのです。対話型 AI「ChatGPT（チャット GPT）」が注目を集めるなか、最新の AI の功罪をめぐる議論が沸騰しています。特に社会的な問題については、いろいろなバイアスがかかり、科学的合理性が希薄になる可能性もあると予想できるからです。筆者は以下の様に考えます。

AI と ICT の進歩、それに伴う各方面での自動化が爆発的に進歩し、人の労働の重要な知的部分が、AI だけではできないあるいは AI だけに任せてはならない知的創造的労働に大きくシフトする時代に、人が AI をコントロールするだけの力を持つことが不可欠になっています。

ロシアによるウクライナ侵略は、この世界に従来とはかなり異質で次元の異なる問題があることを明らかにしました。

少なくとも筆者には、そう感じられるようになりました。従来の平和共存は、幻想ではなかったのか、と。プーチン氏の言い分には、それなりの論理があるのですが、余りにも理不尽で、筆者は到底容認できません。

こうした「悍ましい事態」は、世界にそしてこの国にも蔓延はびこり始めています。少なくとも筆者にはそう見えます。そして世界は、自国の安全は自国の軍備拡大によって守り、それぞれの国の特定の階層や地域の利益は他の階層や地域の犠牲の上に守り抜くことが正当であるかのごとくです。共存共栄があたかも幻想であったかの如くになりはじめています。

その背景に、現在の世界が、結局、AI・ICT および一般の技術に支配されている姿が浮かび上がってきます。人の知恵が支配しているのではなく、過去の人の知恵が支配しているのです。即ちイーロン・マスク氏らの危惧は、視点を変えてみれば、人の「知的創造的」分野での停滞・行き詰まりが主要な要因だと解釈できます。

人が AI をコントロールすることは、善悪の問題ではありません。現状のままでは、各国を単位とした現実の世界の競争においても、それぞれの国が適切に対応しない限り、その国の多くの人たちは滅びるしか道はありません。自らが生き延びる道を突き進まない限り、協力・援助する人・国はあっても、誰もあるいはどこの国も救えなくなりつつあります。いずれにしても、重大な局面に達している ことに変わりありません。決断するのは今しかないのです。

独創性・創造性は、人類に有益であるだけでなく、誰も文句を言うことはできない貴重な人的資源です。日本の教育の主要な目標を「知的創造的能力」の育成に全面的に転換しても、それを根拠に世界やこの国の社会を分裂させることにはなりません。世界の優秀な若者を日本に呼び込むこともできます。その果実（恵み）を、この世界のあらゆる人に施すことも可能 です。共存共栄は、現状では一見「幻想」に感じられますが、そうした暁には、人類の目標になりえます。

日本は侵略戦争に敗れ、どん底の中からそれなりの科学技術立国の道を歩み、それなりの成功を収めました。今、日本が「知的創造的能力」を主要な教育目標に定め、万難を排して全力で取り組めば、本来なら国際的な軋轢を受ける筋合いは在りません。少子化問題は、時期を逸し、極めて困難な道を歩まなければならないなっています。（領土問題を含む）安全保障問題・食糧危機・環境危機などが顕在化するまでの今なら、「知的創造的能力」育成への全面的な転換の実現可能性があります。その選択は、内政問題であり政治や世論の問題だからです。新たな資金も殆ど不要です。

繰り返しますが、日本の科学技術力の低下 → 生産性の低下 → 国力・安全保障の低下 を平和的に挽回する方法は、この国の教育の主要な目標を現代が要請する「知的創造的能力の育成」に全面的に転換することだと、判断するのが最も合理的ではないでしょうか。

『春夏秋冬 420 号』に書いた当塾の教育改革論は、アイデアだけであり、専門家たちの早急で本格的な取り組みが欠かせません。しかし、できる所から取り組み始めなければ、遅きに失します。各方面での努力を強く求めます。

児童・生徒・学生も、自らの成長には、結局は自らしか責任が持てないことを自覚して頂きたい。努力を、賢明な選択に基づいたものにしなければなりません。

## 創造性教育を！

高校数学 I では常識的なレベルではあっても、中学数学を学ぶ上で「技能」として身に付けておいた方が良い内容について、『中学数学基礎』に従って展開する。平均的な中学生の学習項目に、展開の一貫性は欠くが、以下の程度の内容は、できれば早い(中2程度)段階で取り入れて頂きたい。今回の展開は、論理的必然性に基づいて行ったものではなく、理解しておいた方が良く、という程度の内容である。

さらに、2023年版の『中学数学基礎』では、「偏差値」の取り扱いや正規分布(ガウス分布)について、実利的な議論を行っているが、後の(数学的)議論には必ずしも結び付かなく、読み飛ばしていただいても構わない。こうした議論を早めに十分行っておけば、後の学習に非常に役立つ、という程度の問題である。忙しい人は、今回は読み飛ばしていただいても構わない。

1 集合の要素の個数の求め方は、『中学数学発展』(塾生以外には、非公開)の「集合と論理」を参照頂きたい。

そこには、以下の公式が証明されている。

集合の要素の個数を求めるには次の公式が役立つ。

- (1)  $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$
- (2)  $A \cap B = \phi$  のとき、 $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- (3)  $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- (4)  $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cup B) - n(B \cup C) - n(C \cup A) + n(A \cap B \cap C)$
- (5)  $n(\overline{A \cap B \cap C}) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

4つ以上の部分集合について、(4)、(5)に類する公式を導くことができる。上の3つの集合については、ベン図を用いて簡単に理解することができる。ベン図は4つの部分集合にも考案されているが、実用性はあまりない。

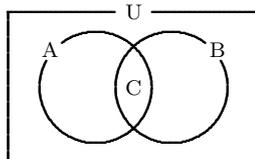
ここでは、これを具体的な例で考える。

【例題 1】 1 から 200 の整数について次の個数をもとめよ。

- (1) 3 かつ 4 の倍数の個数
- (2) 3 または 4 の倍数の個数
- (3) 4 または 51 の倍数の個数

はじめに全体の集まり ( $U$ , 全体集合) を明確にする。つづいて、 $U$  に含まれるそれぞれの関係する集まりを明確にし、ベン図に表す。

| 名前 (定義)             | 個数  |
|---------------------|-----|
| $U$ (1 ~ 200 までの整数) | 200 |
| $A$ (3 の倍数)         | 66  |
| $B$ (4 倍数)          | 50  |
| $C$ (12 の倍数)        | 16  |
| $D$ (51 の倍数)        | 3   |



(1) 3 かつ 4 の倍数とは、その最小公倍数 12 の倍数であるから、集まり  $C$  自身であり、16 個

(2) 3 または 4 の倍数とは、図で  $A$  の部分と  $B$  の部分を合わせた部分だから、 $66 + 50 - 16 = 100$  個

(3) 51 の倍数は 51, 102, 153 のみでいずれも 4 の倍数でないから、4 または 51 の倍数とは  $B$  の集まりと、51 の倍数の 3 個だけである。したがって、 $50 + 3 = 53$  個

基本の分類が 3 種類となると少し複雑になる。次の例はある大学の入試問題に出され、問題集にもよく出てくる問題である。

【例題 2】 「2桁の自然数の中で、十の位、一のくらの少なくとも一方が偶数であるものはいくつあるか。」

全体集合  $U$  を 2桁の自然数とし、十の位、一のくらの少なくとも一方が偶数の集合を  $A$  とする。このとき、 $\bar{A}$  は十の位と一の位がともに奇数である数の集合となるから、

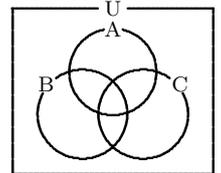
$$n(U) = 90, \quad n(\bar{A}) = 5 \times 5$$

したがって、

$$n(A) = n(U) - n(\bar{A}) = 90 - 25 = 65$$

【例題 3】 「集団検診で  $A$ ,  $B$ ,  $C$  の 3 種の検査を行った。総人員 83 人中、 $A$  検査に 55 人、 $B$  検査に 60 人、 $C$  検査に 58 人が合格したが、これらのうち、 $C$ ,  $A$  両検査に 42 人、 $A$ ,  $B$  両検査に 41 人、 $B$ ,  $C$  両検査に 45 人が合格した。3 検査のいずれにも合格しなかった人は 6 人だった。3 種の検査とも合格した人は何人か。」

$U(83), A(55), B(60), C(58), A$  かつ  $B(41), B$  かつ  $C(45), C$  かつ  $A(42)$  である。3 種のいずれかに合格した人は全体からいずれにも合格しなかった人数を引けばよいため、 $83 - 6 = 77$ 。



したがって、3 種とも合格した人を  $x$  人とする

$$77 = 55 + 60 + 58 - 45 - 42 - 41 + x, \quad x = 32, \quad 32 \text{ 人である。}$$

## 2 場合の数

### (A) 順列

$n$  個の異なったものを 1 列に並べることは、並べた場合の数を順列という。

クラスから、委員長一人、副委員長一人、会計一人を選ぶ場合がこれに当たる。

$a, b, c, \dots, g$  の異なった  $n$  個のカードがあると、これを 1 列に並べるとは、 $n$  個の 1 列に並べた箱を用意し、 $n$  個の全てのカードをどれかの箱に入ればよい。

1 番目の箱には、 $a$  から  $g$  までの全てのカードを入れることができ、それは  $n$  通りある。2 番目の箱では、すでに 1 枚カードが使われているから、1 枚目のカードが決まったそれぞれに対して  $(n - 1)$  通りの決め方がある。

| (1) | (2)     | (3)     | ... | (n) |
|-----|---------|---------|-----|-----|
| $c$ | $d$     | $a$     | ... | .   |
| $n$ | $n - 1$ | $n - 2$ | ... | 1   |

こうして、 $n$  個全体を並べる方法は、

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

となる。ここで、教科書では使わないが、非常に便利な記号「!」を導入した。 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$  で「5 の階乗」と読む。ただし、 $0! = 1$  と定義しておく。また、掛ける  $\times$  は文字の場合は省略することを知っているが、数字の場合にも使える「 $\cdot$ 」を導入した。 $3 \times 4 \times 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5$  の如くである。小数点ドット「 $\cdot$ 」とセンタードット「 $\cdot$ 」を混乱しないように正確に書く必要がある。

同様に考えて、一般に異なる  $n$  個のものから  $r$  個取り出

し、一列に並べる場合を順列といい、その数を  ${}_nP_r$  と表す。

$${}_nP_r = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+2) \cdot (n-r+1) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

となる。

(B) 組み合わせ

異なる  $n$  個の中から  $r$  個選ぶときの選び方を組み合わせ、という。選ぶ順序は考えない。クラスから 3 人の炊事当番を選ぶ場合がこれに相当する。何番目に選ばれても、結果は同じだからだ。

もし a,b,c の三人が選ばれたとすると、(a,b,c), (a,c,b), (b,a,c), (b,c,a), (c,a,b), (c,b,a) の順序を考慮した 6 通りの選ばれ方がある。組み合わせではこれらは全て一通りとなすから、順列を 6 で割っておけばよいことになる。この 6 は a, b, c の 3 個の異なるものの順列だから  $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$  である。

異なる  $n$  個の中から  $r$  個選ぶ選び方を組み合わせ (combination) といい、その場合の数を  ${}_nC_r$  と表す。上の例から分かるとおり、一般の組み合わせは、次の式で表される。

$$\begin{aligned} {}_nC_r &= \frac{{}_nP_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} \\ &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+2) \cdot (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1} \end{aligned}$$

${}_nC_r$  は二項展開の係数ともよばれ、次の性質がある。

$${}_nC_r = {}_nC_{n-r}$$

$${}_nC_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_nC_r$$

これは、 $r$  個を選ぶそれぞれに、選ばれなかった  $n-r$  個が対応し、場合の数は同じとなるからである。また、

$$(x+a)^n = {}_nC_0x^n + {}_nC_1x^{n-1}a + {}_nC_2x^{n-2}a^2 + \cdots + {}_nC_r x^{n-r}a^r + \cdots + {}_nC_{n-1}xa^{n-1} + {}_nC_n a^n$$

が成り立つ (二項定理と呼ばれている)。それは、

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \cdots \quad \textcircled{n}$$

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a) \cdots (x+a)$$

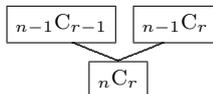
のようにならべれば、 ${}_nC_r x^{n-r} a^r$  は  $n$  個の席の一つずつ入っている  $a$  のうち、 $r$  個の  $a$  を選ぶ選び方 (自動的に  $x$  は  $n-r$  個が選ばれている) に対応するからである。

また、二項係数には次の性質がある。

$${}_nC_r = {}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r$$

なぜなら、

$$\begin{aligned} & \frac{{}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r}{(n-1) \cdots (n-r+1)} \\ &= \frac{(r-1) \cdots 2 \cdot 1}{(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r)} \\ &+ \frac{(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r)}{r(n-1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n-1) \cdots (n-r+1)(r+n-r)}{r(n-1) \cdots 2 \cdot 1} = {}_nC_r \end{aligned}$$



勿論、 ${}_{n-1}C_0 = {}_{n-1}C_{n-1} = 1$  である。

これは、次のようにしても確認できる。

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= (x+a)^{n-1}(x+a) \\ &= \{ {}_{n-1}C_0x^{n-1} + {}_{n-1}C_1x^{n-2}a + \cdots \\ &\quad + {}_{n-1}C_{n-r}x^{n-r}a^{r-1} + {}_{n-1}C_r x^{n-r-1}a^r + \cdots \\ &\quad + {}_{n-1}C_{n-2}xa^{n-2} + {}_{n-1}C_{n-1}a^{n-1} \} (x+a) \\ &= {}_{n-1}C_0x^n + ({}_{n-1}C_0 + {}_{n-1}C_1)x^{n-1}a + \cdots \\ &\quad + ({}_{n-1}C_{r-1} + {}_{n-1}C_r)x^{n-r}a^r + \cdots \\ &\quad + ({}_{n-1}C_{n-2} + {}_{n-1}C_{n-1})xa^{n-1} + {}_{n-1}C_{n-1}a^n \end{aligned}$$

これをもとの  $(x+a)^n$  の展開と比較すればよい。

$$\begin{aligned} (x+a)^1 &= x+a \\ (x+a)^2 &= x^2+2ax+a^2 \\ (x+a)^3 &= x^3+3ax^2+3a^2x+a^3 \\ (x+a)^4 &= x^4+4ax^3+6a^2x^2+4a^3x+a^4 \\ (x+a)^5 &= x^5+5ax^4+10a^2x^3+10a^3x^2+5a^4x+a^5 \end{aligned}$$

〔問題 1〕 空白をうめよ。

$$(x+a)^6 = x^6 + \square ax^5 + \square a^2x^4 + \square a^3x^3 + \square a^4x^2 + \square a^5x + a^6$$

順番に、6,15,20,15,6

〔問題 2〕  $(2x - \frac{1}{2})^8$  の展開の  $x^3$  の係数をもとめよ。

$${}_8C_3 2^3 (-\frac{1}{2})^5 = -14$$

コインを投げたときのように、「試行に対して結果が 2 つしかない」ような実験や試行のことを「ベルヌーイ試行」と言う。二項分布はベルヌーイ試行の確率分布である。

ベルヌーイ試行では結果が 2 つしかないので、

$$\text{成功確率} = 1 - \text{失敗確率}$$

という関係が成り立つ。

ベルヌーイ試行の条件 1 試行の結果は成功か失敗かどちらか

ベルヌーイ試行の条件 2 各試行は独立である

ベルヌーイ試行の条件 3 成功確率と失敗確率は常に一定である

二項分布では試行回数を  $n$ 、成功した回数を  $k$ 、成功する確率を  $p$  の文字で表すと、 $k$  回成功した確率は

$$P(X = k) = {}_nC_k p^k (1-p)^{n-k}$$

二項分布では、試行回数  $n$ 、成功した回数  $k$ 、成功する確率  $p$  があれば、期待値 (平均) と分散を簡単に計算することができる。

二項分布の期待値は

$$\text{二項分布の期待値} = \text{試行回数} \times \text{成功する確率} = n \times p$$

二項分布の分散は

$$\text{二項分布の分散} = n \times p \times (1-p)$$

二項分布を中学生段階で学んだ方が良いとの判断は、以下の理由があるからである。

- ① 二項分布の期待値 (平均) と分散は、 $n$  が大きくなると、正規分布で近似できる。
- ② 正規分布の計算は、高校生にも難しい積分が必要。
- ③ よって、二項分布は、中学生にも、確率の学習の出発点を与える。

(C) 辞書式配列、樹形図の利用

もれなく、重複なく数えるには工夫が必要である。

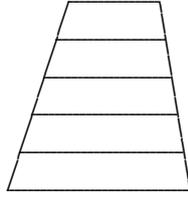
例を考える。

(1) 「 a,a,a,b,c から 3 個を選んで一列に並べる場合の数をもとめよ。 」

これは、aaa, aab, aac, aba, abc, aca, acb, baa, bac, bca, caa, cab, cba の 13 通りである。こうして辞書のアルファベット順のように文字を並べる並べ方である。樹形図についてはよく知っているだろう。

(2) 「図のように、台形の内部が底辺に平行な直線で 5 つの部分に仕切られている。この 5 つの部分の部分を絵の具で塗り分けたい。」 (白陵高)

使える絵の具の色は、赤が3回まで、青が2回まで、黄が1回までで、使わない色があっても良い。同じ色を隣り合わせに塗ることができないとすると、全部で何通りの分け方があるか。



これを辞書式配列と見なそう。赤 (a), 青 (b), 黄 (c) とし, a は3個まで, b は2個まで, c は1個までとし, 隣り合わせに同じ文字は使わない5文字の単語の総数とする。

ababa, ababc, abaca, abacb, abcab, abcba, acaba, acbab,

babac, babca, bacab, bacba, bcaba, cabab, cbaba の15通り

これは、ほぼ短時間で間違いなく実行できる限界である。「数える」には問題に応じた工夫が必要である。そして的確な工夫は「数える」ことを簡単にする。「場合分け」はその代表的な工夫である。

a が3個の場合... 3通り, a が2個の場合...  $5+5+2=12$ 通り, 合計15通り

(3) 100円, 50円, 10円の硬貨を使って, 420円をちょうど支払う方法は何通りあるか。(10山梨学院大)

100円, 50円, 10円の硬貨の硬貨それぞれ  $x, y, z$  とすると,  
 $100x + 50y + 10z = 420$

したがって,  $10x + 5y + z = 42$  を  $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$  の整数解を求めることになる。

$y \geq 0, z \geq 0$  より,  $10x \leq 42$ , したがって,  $0 \leq x \leq 4$

$x = 0$  のとき,  $5y + z = 42$ ,  $y = 0, 1, \dots, 8$  の 9通り

$x = 1$  のとき,  $5y + z = 32$ ,  $y = 0, 1, \dots, 6$  の 7通り

$x = 2$  のとき,  $5y + z = 22$ ,  $y = 0, 1, \dots, 4$  の 5通り

$x = 3$  のとき,  $5y + z = 12$ ,  $y = 0, 1, 2$  の 3通り

$x = 4$  のとき,  $5y + z = 2$ ,  $y = 0$  の 1通り

よって,  $0 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$  通り

(4) 「A, B, C, D は、それぞれ 1, 2, 3, 4 のどれかである。千の位の数 A, 百の位の数 B, 十の位の数 C, 一の位の数 D である4桁の整数をつくる。このとき、次の問いに答えよ。」(洛南高)

(a) A, B, C, D が全て異なる整数は何通りか。

(b) 全部で何通りつくれるか。

(c)  $A \leq B, C \leq D$  である整数は何通りつくれるか。

(d)  $A + B + C + D = 9$  である整数は何通りつくれるか。

(a) は 1,2,3,4 の順列だから  $4! = 24$  通り

(b) は各 A, B, C, D は4通りずつだから,  $4^4 = 256$  通り

(c) は  $A \leq B$  を満たす A, B の組は 10通り,  $C \leq D$  も 10通りだから,  $10 \times 10 = 100$  通り

(d) この問題が主なテーマである。複雑な問題は「場合分け」を行う。

4を1個用いる場合... (4, 2, 2, 1), (4, 3, 1, 1) の2組だけ。

これを A, B, C, D に配分するだけだから  $\frac{4!}{2!} \times 2 = 24$  通り

4は用いず, 3が2個... (3, 3, 2, 1) の組だけ。  $\frac{4!}{2!} = 12$  通り

4は用いず, 3が1個... (3, 2, 2, 2) の組だけ。3が A, B, C, D のどれか。4通り, 合計 40通り

(5) 8個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 を使って3桁の整数をつくる時、次の問いに答えよ。(灘高)

(1) 同じ数字を何回使ってもよいとすれば、何個できるか。

(2) 3つの異なる数字を使ってつくる時、3の倍数は全部で何個できるか。

(3) (2) でできた整数すべての和を求めよ。

(1)  $8^3 = 512$  通り

(2) (1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (1, 6, 8), (2, 3, 4), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 8), (2, 6, 7), (3, 4, 5), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 7, 8), (4, 5, 6), (4, 6, 8), (5, 6, 7), (6, 7, 8) の20通り  
 それぞれが6個, 全部で,  $20 \times 6 = 120$  個

(3) 百の位だけに注目する, 3または6になるものが各18個,

1,2,4,5,7,8になるものが14個,

全120個の整数の百の位のみを加え合わせると

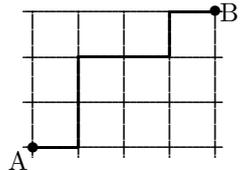
$$(3+6) \times 18 + (1+2+4+5+7+8) \times 14 = 540$$

求める総和は  $540 \times (100 + 10 + 1) = 59940$

(D) 大小のサイコロを同時に投げたときの場合の数の議論では縦に大の、横に小のサイコロの目を座標のように並べた表を使うとわかりやすことも知っている。

(E) ルートの数

図のような点Aから点Bに向かうルートの数を求めてみよう。一つずつ数えてもできるが、一寸だけ工夫してみる。



AからBに進むには右向けに必ず4段左から順番に進まねばならず, 上向きに必ず3段下から順番に進まねばならない。右向けに1段進むことを a, 上向きに進むことを b で表すとたとえば, 右上上右右右というルートは abbaaba と表せる。a が4個, b が3個あわせて7個の順列である。7個の順列は  $7!$  だったが, 4個の a, 3個の b は同じものだからそれぞれ  $4!$ ,  $3!$  だけ重複して数えていることになる。したがって  $\frac{7!}{4!3!} = 35$  通り  
 AからBに進むには右向けに必ず4段左から順番に進まねばならず, 上向きに必ず3段下から順番に進まねばならない。右向けに1段進むことを a, 上向きに進むことを b で表すとたとえば, 右上上右右右というルートは abbaaba と表せる。a が4個, b が3個あわせて7個の順列である。7個の順列は  $7!$  だったが, 4個の a, 3個の b は同じものだからそれぞれ  $4!$ ,  $3!$  だけ重複して数えていることになる。したがって  $\frac{7!}{4!3!} = 35$  通り

(F) 『中学数学基礎』の2022年版までには、須磨学園高の過去問に答えるためフィボナッチ数列の議論も行っていたが、2023年版から、『中学数学発展』に移動した。論理的結びつきが弱かったからである。

今回は、2023年3月10日に実施された大阪府下公立高校の一般選抜の学力テストの数学の問題について、コメントする予定です。