



現実を直視しよう

泉南市に当塾が発足してから、50年を超えています。さらに、月刊情報誌『春夏秋冬』は、426号(36年+α)になります。初期の『春夏秋冬』は、ジャストシステムの「一太郎」で書いていました。「一太郎」は、そのころでは、最も先進的な技術を取り入れ、図や票の取り扱いも簡単に行えていました。しかし、理系の仕事では、数式の扱いが決定的に重要で、間もなく一般の科学者にも普及し始めた TeX に全ての原稿を変更しました。

また、当塾のインターネットのホームページは随分古く、初期には「日本のホームページ 2000」にも簡単な紹介がありました。やむなく、何度かのプロバイダーの変更を経て、現代に至っています。その間の IT 技術の進歩は著しく、80歳を超えた筆者が、それらの多くの点で追従していく事が困難となってきました。

無念ではありますが、当塾の主張・構想は殆ど実現しておらず、ぼちぼち一区切りを考えねばならない時期に差し掛かっています。

本質的議論ではありませんが、一つ気になることがあります。筆者が 1983 年に書いた工学の日本語の論文には、以下のような 1 次元の圧縮性熱流体 (燃焼ガス) の双曲型偏微分方程式の記述があります。

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho(u^2/2 + e) \\ \rho y \end{bmatrix} + \frac{\partial}{\partial x} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho(u^2 + e + p/\rho)u \\ \rho y u \\ -\frac{\rho u}{F} \frac{dF}{dx} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\rho \left\{ \frac{u^2}{F} \frac{dF}{dx} + \left(\frac{4f}{d} + \zeta \right) \frac{|u|u}{2} \right\} \\ \rho \left\{ q_p - \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} (u^2/2 + e + p/\rho)u \right\} \\ -\rho y u \frac{1}{F} \frac{dF}{dx} \end{bmatrix}$$

ρ : 密度, u : ガス速度, y : ガス組成, e : 内部エネルギー密度, p : 圧力, F : 管断面積, f : 管摩擦係数, ζ : 管曲がり損失係数, q_p : 管壁からの損失, y : ガス組成

生成 AI がどのように進化しても、自らの課題や目的・意図・目標などを AI に明確に伝えなければ、AI との的確な協働などできるはずはありません。数式も言葉です。1983 年当時の数学的表現で、世界共通に認められていたのは TeX だけでした。その後も、筆者のあらゆる文の原稿は、テキストエディター「秀丸」を用いて TeX の規格に従って書いてきました (逆に言えば、筆者はその後全く進歩していません)。現在の多くの科学者が、どんな規格に従った文法で論文の原稿を書いておられるのか知りませんが、AI を介して少しでも数式に関わる「知的創造的内容」の議論を進めよう

とするならば、式を含む厳格な表現の規格が欠かせないことを理解しておかねばなりません。

もう一つ、気がかりなことがあります。1983 年、米国機械学会が主催した熱機関関係の学会があり、筆者は論文講演での招待状を受け取っていました。飛行機は、伊丹空港、成田空港、オハイオ国際空港、インディアナポリス空港と乗り継ぎました (旅行会社に全ての予約をしてもらいましたが、40 歳の筆者が、初めて一人で飛行機に乗り外国へ行きました)。オハイオ国際空港での米国への入管で 5 分ほどやり取りしたのですが埒が明きません。仕方なく講演依頼状を見せると、瞬時に全てが片付きました。ジャパニアズナンバーワンの威力です。科学技術的内容での議論は、殆ど高校生レベルの英語力で十分で、今なら日本語で科学技術的内容について講演しても、人間の通訳を介するより AI が間違いなく正確に通訳してくれると考えられます。

講演の後、同じ分野で圧倒的に世界をリードしていた米国の研究室 (Rowland S. Benson 教授) のメンバーから共同研究の提案を受けました。しかし、筆者は、すてにより優れた解析法の論文を書いていました (その同じ年の日本語の学会誌に掲載)。その後、教授の研究室では、より本格的な解析法を開発しました。教授の 3 冊の著書は今も処分しないで残しています。

現在既に殆どの理系の本は、何らかの形で、閲覧可能になっています。筆者は、未読の数学書、塾生に役立つであろう参考書などを除き、殆どの専門書・辞書・全集・読み物などは、処分しました。

ついでに書いておきますが、当塾には、中学生、大学受験生に役立つであろう厳選した非常に多くの本が、未だ残されています。当塾で、少しでも学習しようとする人には、無料で、進呈します。

未だに「全ての人に四技能英語力」など時代錯誤が横行しており、このまま進めば、この国の科学技術力は後退の一途を突き進むこと間違いのないと思われます。全エネルギーを「知的創造的実績」の実現に集中すべきです。

何度も引用してきましたが、「人工知能は人間を超えるか」(松尾豊著、2015 年初版)には、2025 年には機械翻訳が「実用的なレベルに達するため、翻訳や外国語学習という行為そのものがなくなるかもしれない」とあります。その後分かってきたことは、これは政策的な問題であることです。

残念ながら、周りを見渡せば、目も当てられぬほど日に日にこの国の科学技術と労働の生産性は、凋落の限りを尽くしています。

小学高学年・中学生段階での学習すべき内容 (『中学数学基礎』など) については、既にかなり詳しく書いてきました。したがって、その面での『春夏秋冬』の役割は殆ど終了し、今回で、しばらくお休みすることになるかもしれません。

複数の人は、次のように主張します。

経済成長率という統計の数値に囚われることよりも、社会が生み出すべ

き基本的な財について考えをめぐらせることのほうが急務なのだ。すなわち、医療、教育、環境である。それらの財は統計にはコストとしてしか表れないが、われわれが何としても守るべき最も重要な財なのである。(敢えて、この言葉の出典は伏せておきます。)

筆者に十分な理解・確信などありませんが、ここには筆者の考える将来あるべき社会と重なる部分が非常に多くあります。「医療、教育、環境」を財と見なせば、その創出は間違いなく「知的創造的実績」であるはずです。

表面的には、そして組織的には、「知的創造的能力」に関わる議論は殆ど進展していませんが、間違いなく変化の胎動は聞こえてきます。しかし、遅すぎます。その暁には、当塾は既に閉鎖に追い込まれていると予想します。各個人が立ち上がるのは、今を措いてはありません。

とりあえず、次回の『春夏秋冬 427号』は、教育内容ではなく、当塾の教育制度の改革案のみをまとめて書く予定にしています。

道は一つしか残されていない！

1 当塾の HP に以下の様に書きました。

(1) 8月28日の朝日新聞のトップ記事は、「iPS 研究 猛追される日本」でした。山中伸弥教授が iPS 細胞で 2012 年にノーベル医学生理学賞を受賞したことは、日本の iPS 細胞の研究と応用のための技術開発は間違いなく世界をリードしていましたが、いまや、論文・特許は海外が上回る、というレポートです。

(2) いまや、ごく一部(たとえば半導体製造装置など)を除いて、この国の基礎医学を含む殆どの分野の基礎科学・基礎技術が低迷状況にあります。

目だった分野、航空機やロケットの開発、最先端の半導体製造では、日常的にいやというほどこの国の技術開発の遅れを見せつけられています。

(3) 日本の基礎科学・基礎技術で、世界をリードするものは日に日に失われています。こんな状況で、ずるずると労働人口が減少していけば、早晚、この国が極めてみじめな破綻国家になることは、目に見えています。河合雅司著の「未来の年表」シリーズには、その哀れな姿が良く描かれています。(ただし河合氏が合理的な処方案を提案している、と言っているではありません。)

(4) その挽回には、この国が他国より、より多くの人がより優れた「知的創造的能力」を獲得するしか道はない、と考えられます。殆どの政治家、役人、教育関係者、投資家はそのことから目を背けています。

(5) 各個人が、それぞれの立場で、立ち上がるしか道は開きません。

その一方で、8月29日、「日本学術会議のあり方を検討する有識者懇談会」の初会合が開かれ、日本学術会議の組織の形態や機能の見直しの議論が始まりました。学術会議を国の機関として残すか、独立した民間法人に改めるかなどが焦点となるそうです。

日本学術会議は、昭和 23 年に制定された日本学術会議法に基づいて内閣総理大臣の所轄とするもので、内閣に恣意的にその趣旨や運営を変更する権利はありません。「会員は、推薦に基づいて、内閣総理大臣が任命する」とあります。「任命」は、形式的なもので、決してや気に入らない会員を拒否する権利などどこにもありません。そして現代でも、5人の

会員を拒否し続けており、学術会議の機能マヒをもたらしています。歴代の政府は、学術の振興を自らの政治的目標の下に置いており、日本の科学技術の大幅な後退は、こうした歴代の内閣のサボタージュの上に進行したことを忘れてはなりません。この国の「知的創造的能力」、科学技術と労働の生産性の大幅な後退は、歴代政府の恣意的な科学技術政策によってもたらされた、とも言えます。勿論、その背景には、知的創造的能力→科学技術力→労働の生産性の強い因果関係を無視した前近代的な教育政策を忘れることはできません。

過去には、主に原子力政策の推進のため、文部省の外に科学技術庁を設置しましたが、ことごとく裏目に出て、現在は文部科学省に統合されています。

改革に猶予はありません。直ちに取り組みねば、この国は取り返しのつかないハンディを背負うことになります。

2 『春夏秋冬 425号』でも引用した『未来の年表 業界大変化』(河合雅司著、講談社現代新書)の「第1部 人口減少日本のリアル」では、人口減少によって起こる数々の不都合な事態が列挙されています。

そして、「第2部 戦略的に縮むための『未来のトリセツ』」の書き出しは以下です。

日本人が消滅せんとする、わが国は始まって以来の危機なのである。昨日までと同じことをしてうまくいくはずはない。現状維持バイアスを取り除き、社会の変化に応じて発想を変えたならば違った未来が見えてくる。その先にこそ、人口減少に打ち克つ方策があるのだ。

そうした視点に立って、河合氏は人口減少に打ち克つ「10のステップ」を示しています。筆者は、『未来の年表』シリーズから、無数のことを学んできましたが、残念ながらこうした広範な課題に一貫した反論を行なえるほどの広い教養と情報を持ち合わせていません。しかし、そんな筆者にも、河合氏の主張には決定的な問題点・過ちがあることは、十分理解できます。特に目につくことは、「IT 人材 80 万人不足」「全従業員のスキルアップを図る」などに代表されるように、多くの方面での「スキルアップ」が重要な役割を果たす、とされていることです。

確かに、この国の現実の多くの困難、例えば、今物議をかもしている「マイナンバー制度」での守備範囲の違いはあるかもしれないが、既に多くの国では問題なく機能しているにも関わらず、この国での数々のトラブルは、責任ある IT 技術者がしっかり取り組んでいないに過ぎないのではないかと、予想されます。このことについては、『春夏秋冬 422号』の中で、内田樹氏の「夜明け前(が一番暗い)」を引用しながらかなり詳しく議論しました。

筆者の全般的な主張は、『春夏秋冬 422号』の中の「猶予はありません」と「道は一つしか残されていない！」に書いています。是非再度お読み頂きたい。

世の殆どの議論は、この国の数々の困難・後退の根本原因が「知的創造的能力」の後退・欠落にあることに眼を瞑り、当面の経済政策・金融政策と「即興力」であるスキルアップに期待していることです。

ICT と AI、それらによる自動化はその領域を次々と広げ、

人が関わらざるを得ない領域は、どんどん狭くなっています。しかし、それでも人が関わらざるを得ない広範な領域も厳然として存在する、その典型が「知的創造的領域」です。AIも人よりも効果的に「知的創造的能力」を發揮する部分もありますが、その一方で厳然として、人が関わらざるを得ない領域も広範に存在します。人は、AIや自動化だけでは対応できない、人こそがその「知的創造的能力」を發揮しなければならない大きな飛躍を含む分野に対応する能力を持たねばなりません。ここにこそ、現代が要請する教育の主要な課題があり、それが主要な目標となっています。AIが全ての面で人を凌駕するのならば、教育はその主要な目標を失うこととなります。

3 以下が、これまでも繰り返し書いてきた、筆者の主要な主張の概要です。

現代が主要に要請する「知的創造的能力」を育成するには、どういう教育を行わねばならないのか、それを怠れば、何が起こるのか、を首尾一貫して考えなければならない。

朝日新聞8月29日によると、政府は2020年を見据えた国土のあり方を示す「国土形成計画」を8年ぶりに策定した。人口減少に直面する中、10万人を目安にして、デジタルとリアルが融合した「地域生活圏」の構想を打ち出した。

既に『春夏秋冬425号』で展開した通り、地域の10万人生活圏構想に、「知的創造的能力」の最大の源泉である人の多様性(個性)・文化の媒体として、およそ30万人の地域を構想できる。

「ワーケーション」「デュアルスクール構想」を一体として実現する考えもある。しかし、そこには、「創造性」に対する認識が欠如している。

繰り返しますが、そこには、以下の様に書きました。そこには、基本的には徒歩で通える距離にある多数の幼稚園・小学校、基本的には自力で通える距離に一貫した中等教育を担う複数の中高一貫校がなければならないだけでなく、必ずしもその地域になくても自宅から通える距離に基本的には基礎科学を軸に大学学士課程教育を行う大学(又はその分校)がなければならない。小学上級生では、中高一貫校のいくつかの講義に参加できるようにしておけばよい。

要約すれば、現代では、全ての児童(小学上級生)・生徒(中学生・高校生)はその個性・能力・意欲に応じて「知的創造的能力」に向けての教育を受ける権利を持ち、地域はその体制を整える義務がある。これらの学校は、国立・公立・私立の学校の枠を越えて、地域の文化的な共同体の要素として稼働するように組織しなければならない。

最早、一刻の猶予もありません。可能な人・可能なことから、取り組み始めなければなりません。

創造性教育を！

『春夏秋冬401号』の「命題論理とユークリッド幾何学」において、ユークリッド幾何学の学習で、命題論理が如何に深くかかわっているかを議論した。勿論、ユークリッド幾何

学の理解でさえ、命題論理を超えた議論が多数必要であることは言うまでもない。ここでは、応用例を取り上げる。

1 否定

命題Aの否定を \bar{A} と表現することが多い。また、ド・モルガンの法則 $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}$, $\overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$ の証明は、簡易的にベン図で考えれば良い。

例題で、否定の練習をしておく。

〔例題1〕 次の命題を否定せよ。

- (1) 「3と5で割り切れる」
「3か5の少なくとも一方で割り切れない。」
- (2) 「3か5のどちらかで割り切れる」
「3でも5でも割り切れない。」

〔例題2〕 次の命題の論理的否定を答えよ。

「太郎が花子の少なくともどちらかは、犬と猫を両方飼っている。」

この命題を論理的構造がわかりやすいように書きなおすと、

「(太郎は犬と猫の両方を飼っている) または

(花子は犬と猫の両方を飼っている)」

となる。ド・モルガンの法則を適用すると

$\overline{\text{「太郎は犬と猫の両方を飼っている」 かつ$

$\text{「花子は犬と猫の両方を飼っている」}}$

となる。それぞれの部分の否定にさらにド・モルガンの法則を用いると

「(太郎は、犬か猫の少なくともどちらかは飼っていない) かつ

(花子は、犬か猫の少なくともどちらかは飼っていない)」

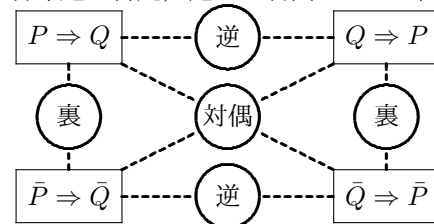
となる。したがって、

「太郎も花子も、犬か猫の少なくともどちらかは飼っていない。」

2 逆の命題

条件法による命題「 $P \Rightarrow Q$ 」について、条件節Pを「前件」、帰結節Qを「後件」といった。

命題と各命題の否定、逆とは右図のような関係にある。



命題「PならばQである」において、Pを仮定、Qを結論という。命題「PならばQである」に対して、命題「QならばPである」をもとの命題の「逆」の命題という。逆の命題ではもとの命題の仮定と結論が入れ替わっている。

逆は必ずしも真ならず

〔例題1〕 次の各例の逆をいい、それが真(○)か偽(×)を答えよ。

- (1) $x > 5$ ならば、 $x > 3$ である。
 $x > 3$ ならば、 $x > 5$ である。 (×)
- (2) その犬が赤子を生んだならば、その犬は雌である。
その犬は雌であるならば、その犬は赤子を生んでいる。 (×)
- (3) $a > 0, b > 0$ ならば、 $ab > 0$ である。
 $ab > 0$ であるならば、 $a > 0, b > 0$ である。 (×)
- (4) $a = 0$ または $b = 0$ ならば、 $ab = 0$ である。
 $ab = 0$ であるならば、 $a = 0$ または $b = 0$ である。 (○)
- (5) 二等辺三角形の2つの底角は等しい。

三角形で2つの角が等しいならば、それは二等辺三角形である。(○)

[例題2] 「 $x=2$ ならば、 $x^2=4$ 」にたいして、その対偶、逆、裏の命題を作り、それぞれの真偽を考えてみよ。

もとの命題は真である。

$x=2$ とする。両辺を2乗して、 $x^2=4$

対偶… $x^2 \neq 4$ ならば、 $x \neq 2$ (○)

逆… $x^2=4$ ならば、 $x=2$ (×)

$x^2=4$ とする。 $x=-2$ はこれを満たす。 $x=2$ ではない。

裏… $x \neq 2$ ならば、 $x^2 \neq 4$ (×)

$x \neq 2$ とする。 $x=-2$ はこれを満たす。 $x^2=4$ である。

ここまでのまとめとして、2017年度センターテストの数学I・数学Aの問題を示しておこう。

実数(単なる数のことである) x に関する2つの条件 p, q を

$p: x=1, \quad q: x^2=1$

とする。また条件 p, q の否定をそれぞれ \bar{p}, \bar{q} で表す。

(1) 次の「ケ」, 「コ」, 「サ」, 「シ」に当てはまるものを、下の①から③のうちから一つずつ選べ。ただし、同じものを繰り返し選んでもよい。

q は p であるための「ケ」。 \bar{p} は q であるための「コ」。

(p または \bar{q})は q であるための「サ」。 (\bar{p} かつ q)は q であるための「シ」。

① 必要条件だが十分条件でない。 ② 十分条件だが必要条件でない。

③ 必要十分条件である。 ④ 必要条件でも十分条件でもない。

(2) 実数 x に関する条件 r を $r: x>0$ する。次の「ス」に当てはまるものを、下の①から⑦のうちから一つ選べ。

3つの命題 $A: (p \text{ かつ } q) \Rightarrow r$ $B: (q \Rightarrow r)$ $C: (\bar{q} \Rightarrow \bar{p})$

の真偽について正しいものは「ス」である。

① Aは真, Bは真, Cは真 ② Aは真, Bは真, Cは偽

③ Aは真, Bは偽, Cは真 ④ Aは真, Bは偽, Cは偽

⑤ Aは偽, Bは真, Cは真 ⑥ Aは偽, Bは真, Cは偽

⑦ Aは偽, Bは偽, Cは真

(ケ0 コ3 サ3 シ1 ス2)

3 背理法

矛盾とは、「 P かつ P ではない」という主張である。

論証にとって、矛盾は排除しなければならない。

「 P かつ P ではない」ということはない…(矛盾律)

「 P 」の証明を次のように行う。

「 P でない」と仮定すると矛盾が導かれる。

したがって「 P 」である。

これが背理法である。したがって、背理法は「否定」の定義に関わる原理である。

楚人に盾と矛とを鬻ぐ者あり。これをほめていはく、「わが盾の堅きこと、よく陥すものなきなり。」と。またその矛をほめていはく、「わが矛の利なること、物において陥さざるなきなり。」と。ある人はいはく、「子の矛をもつて子の盾を陥さばいかん。」と。その人応ふることあたはざるなり。

(韓非子 下)

「 $\sqrt{2}$ は無理数である。」の証明には背理法が不可欠であ

る(無理数のところを参照して下さい。)また集合の証明にはすでに背理法を用いています。

「 P ではない」を証明するため、「 P 」を仮定して矛盾を導く、これも背理法である。

論理の議論としては、否定を規定する際、「矛盾律」ともう一つの重要な原理、「排中律」が背景にあった。

排中律…「 P または(P ではない)」

(どちらかで、中間を排するという意)

さて、「 P ならば Q 」を示したい、しかし明示的には「 P 」が書かれていない、このようなときにも「 P 」を適切にとって証明すべき命題を「 P ならば Q 」の形式にし、何らかの矛盾を導けばよい。さらに「 Q 」であることを示すのに、「 P 」としていろいろな命題をとることができるときもある。一般的に言えば、間違った仮定から矛盾を導き出して、その仮定が正しくなかったことを証明すればよい。

[例題1] $\sqrt{2}$ が無理数であることを証明せよ。

背理法ではあるが、教科書等と違う矛盾を導いてみよう。

$\sqrt{2}$ を無理数でないとする。

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}, \quad p, q \text{ は整数}$$

$$2p^2 = q^2$$

左辺では、素因数2は奇数個、右辺は偶数個となる。矛盾! ゆえに $\sqrt{2}$ は無理数である。

[例題2] $\sqrt{3}$ が無理数であることを使って、 $5+2\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

$5+2\sqrt{3}$ を有理数だとし、

$5+2\sqrt{3} = a$, a は有理数 とおく。 $\sqrt{3} = \frac{a-5}{2}$ 。右辺は有理数の四則だから有理数となり、左辺が無理数だという仮定に矛盾する。よって $5+2\sqrt{3}$ は無理数。

[例題3] 以下の「素数は無数に存在する」ことの証明の、空欄をうめよ。(解答は整数のところを参照して下さい。)

素数が有限個しかない」と仮定して、素数を小さい順に、

$$p_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N; N \text{ は有限の素数を表す定数})$$

とする。そうすると $q = p_1 p_2 \dots p_N + 1$ は p_1, p_2, \dots, p_N のいずれかを因数に持つが、素数かのいずれかである。 q は p_1, p_2, \dots, p_N のいずれで割っても余りが□だから、 p_1, p_2, \dots, p_N のいずれの因数も持たない。よって、 q は□である。これは p_1, p_2, \dots, p_N のいずれとも違う数だから、素数が N 個だとする仮定に□する。よって、素数は無限個存在する。

[例題4] 正多面体の各面は、正三角形か正方形か正五角形のいずれかであることを証明せよ。(『中学数学基礎』には全ての可能な正多面体を導いていますが、この問だけなら、簡単に答えられます)

いずれでもないとして、まず正六角形を考える。このとき、一つの頂点には最低3つの面が集まるから $120^\circ \times 3 = 360^\circ$ となり、多面体の頂点にはならない。正七角形、…と辺の数を増やせば、なおさら多面体は出来ない。よって正多面体の各面は正三角形か正方形か正五角形のいずれかである。

4 対偶証明法

命題 P 、命題 Q に対して、命題「 $P \Rightarrow Q$ 」とその対偶の命題「 $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ 」は同値である。

「同値」とは、同じ価値であること、互いに一方が真ならば、他方も真であることを言う。すなわち、命題 P と命題 Q が同値とは $P \Rightarrow Q$ が成り立つだけでなく、その逆も成り立つことである。したがって、同値の時はある命題に対して、命題 P だ、と言っても命題 Q だと言っても同じことになる。こうして、

「 $P \Rightarrow Q$ 」を証明するには、その対偶「 $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ 」を証明することになる。この証明法を「対偶証明法」という。命題「 $P \Rightarrow Q$ 」を直接証明するのではないから、間接証明法の一つである。

対偶証明法は次のように背理法によって証明される。

「 P ならば Q 」とする。もし「 $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ 」が偽だとする。すなわち、「 $\bar{Q} \Rightarrow P$ 」が起こりうるとする。このとき、「 P ならば Q 」だから結局、「 $\bar{Q} \Rightarrow Q$ 」となり、矛盾が起きる。よって、「 $\bar{Q} \Rightarrow \bar{P}$ 」は真である。その意味で、対偶証明法は背理法の一つだということができる。

[例題1] 次の命題を証明せよ。

「 $x + y \neq 0$ ならば、 $x \neq 0$ または $y \neq 0$ である。」
対偶は「 $x = 0$ かつ $y = 0$ ならば、 $x + y = 0$ である」。 $0 + 0 = 0$ よりこれは真。よってもとの命題は証明された。

[例題2] 次の命題を証明せよ。

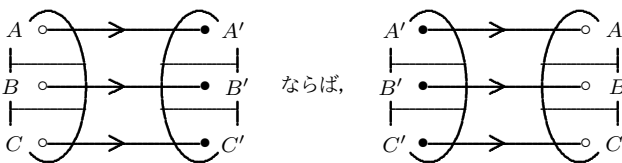
「 a, b に対して、 $a^2 + b^2 = 0$ ならば、 $a = 0$ かつ $b = 0$ である。」
「 $a = 0$ かつ $b = 0$ 」の否定は「 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ 」である。したがってもとの命題の対偶は
「 a, b に対して、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば、 $a^2 + b^2 \neq 0$ 」である。
 $a \neq 0$ ならば、 $a^2 > 0, b^2 \geq 0$ よって、 $a^2 + b^2 > 0$
 $b \neq 0$ ならば、 $a^2 \geq 0, b^2 > 0$ よって、 $a^2 + b^2 > 0$
どちらの場合も $a^2 + b^2 > 0$ 。したがって、 $a \neq 0$ または $b \neq 0$ ならば、 $a^2 + b^2 \neq 0$ よって、もとの命題は証明された。

[例題3] 次の命題を証明せよ。

「整数 a, b の積が3の倍数ならば、 a または b は3の倍数である。」
「 a または b は3の倍数である」の否定は「 a も b も3の倍数でない」である。
 a, b も3の倍数でないとする、 $a = 3m \pm 1, b = 3n \pm 1, m, n$ は整数とおける。このとき $ab = 3(3mn + m + n) + 2, 3(3mn - m + n), 3(3mn + m - n), 3(3mn - m - n) - 2$ のいずれかとなり、いずれも3の倍数でない。すなわち、 ab は3の倍数ではない。

5 てんかんぼう
転換法

簡単のため、場合の数(仮定となる命題の数)が3つについて考える。



である。
元の事柄は A か B か C のいずれかであり、 A, B, C は互いに重なる要素はないとする。また結果の事柄も A' か B' か C' のいずれかであり、互いに重なる要素はないとする。そして $A \Rightarrow A', B \Rightarrow B', C \Rightarrow C'$ がなりたてば、その逆

$A' \Rightarrow A, B' \Rightarrow B, C' \Rightarrow C$ がなりたつ。

なぜなら、たとえば $A' \Rightarrow A$ が成り立たないことがあると、 $A' \Rightarrow B$ あるいは $A' \Rightarrow C$ となる要素が A' の中に最低一つあることになる。しかし $B \Rightarrow B', C \Rightarrow C'$ だからこの要素は B' あるいは C' にふくまれる。これは矛盾である。(これは、「背理法」によって転換法を証明したことになっている。)

[例題1] $\triangle ABC$ について、

$$\begin{aligned} AB > AC &\Rightarrow \angle C > \angle B, \\ AB = AC &\Rightarrow \angle C = \angle B, \\ AB < AC &\Rightarrow \angle C < \angle B \end{aligned}$$

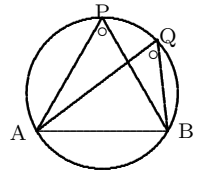
である(証明は三角形のところを参照して下さい)。これは転換法の条件を満たしている。したがって、

$$\begin{aligned} \angle C > \angle B &\Rightarrow AB > AC, \\ \angle C = \angle B &\Rightarrow AB = AC, \\ \angle C < \angle B &\Rightarrow AB < AC \end{aligned}$$

である。

[例題2] 円周角の定理の逆

「2点 A, B を結ぶ直線の同じ側に点 P, Q があり、 $\angle APB = \angle AQB$ のとき、この4点は同じ一つの円周上にある。」



$\triangle APB$ の外接円を円 O とし、点 Q は直線 AB に関して点 P と同じ側にあるとする。このとき円周角の定理を用いると、次のことが証明できる。

点 Q の位置は次の3つの場合があり、それぞれ次の関係が成り立つ。

- (1) 点 Q が円の外にある $\Rightarrow \angle AQB < \angle APB$
- (2) 点 Q が円周上にある $\Rightarrow \angle AQB = \angle APB$
- (3) 点 Q が円の内にある $\Rightarrow \angle AQB > \angle APB$

したがって $\angle AQB = \angle APB$ となるのは点 Q が円周上にあるときだけである、すなわち「円周角の定理」の逆、「 $\angle AQB = \angle APB$ ならば点 Q が円周上にある」が成り立つ。

[例題3] 2次方程式 $ax^2 + bx + c = 0, a \neq 0$ の解がないときは、方程式の判別式を $D = b^2 - 4ac$ とすると、 $D < 0$ であることを証明せよ。

2次方程式を直接解くことによって

- (1) $D > 0 \Rightarrow$ 2つの異なる解
- (2) $D = 0 \Rightarrow$ 一つの解(重解)
- (3) $D < 0 \Rightarrow$ 解なし

が得られる。仮定および、結論はそれぞれ D および解の個数について全て尽くしており、それぞれ共通部分はないから、転換法によって、(1), (2), (3) の逆も成り立つ。よって解がないならば、 $D < 0$ となる。

勿論、(1), (2) の逆は(解を A, B あるいは重解を A として)直接法によって簡単に証明できる。

$$D = b^2 - 4ac = a^2(A - B)^2 \geq 0$$

(3) の逆を君はどのように直接法で証明しますか。まず、解がないとはどういうことか、を考えて、 $ax^2 + bx + c$ がどんな x に対しても常に正か、常に負の場合である、とする。

$a > 0$ の場合、 $ax^2 + bx + c = a(x + \frac{b}{2a})^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}$ が常に正となるためには $D = b^2 - 4ac < 0$ となる。 $a < 0$ の場合、常に負となるのも同じ条件となる、とか少しややこしいですね。それでも、こうした証明では不十分です。どこか、考えてみて下さい。

[例題4] 「任意の三角形において、2つの内角の2等分線の長さが等しければ、その三角形は二等辺三角形である」(ちょっと難問)

(1) $\triangle ABC$ の $\angle B, \angle C$ の2等分線が AC, AB と交わる点を D, E とす

ると、 $\angle B < \angle C$ ならば、 $CE < BD$ を証明する。

AE 上に点 F を $\angle ABD = \angle ECF$ となるようにとる。 $\angle B < \angle BCF$ より、BF 上に点 G を、 $BG = CF$ となるようにとる。BD 上に点 H を $GH \parallel FC$ となるようにとると、 $\triangle BGH \cong \triangle CFE$ となる。したがって、 $CE = BH$ 。よって、 $CE = BH < BD$ 。

(2) (1) より、同様に $\angle B > \angle C$ ならば、 $CE > BD$ となる。したがって、 $CE = BD$ ならば、 $\angle B = \angle C$ となる。すなわち、 $\triangle ABC$ は二等辺三角形となる。

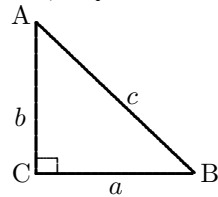
以下は、簡単だが、命題論理の枠を越えた論理である。

6 同一法

もう一つの間接証明法は「同一法」と呼ばれている証明法である。ここでは、論理構造を明確にしないで、分かりやすい例で考えよう。

「三平方の定理」が証明されているとする。

「直角を挟む 2 辺を a, b 、
斜辺を c とすると、
 $a^2 + b^2 = c^2$ 」



それでは、この三平方の定理の逆

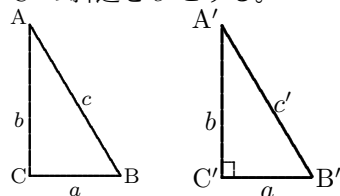
「 $a^2 + b^2 = c^2$ ならば、直角を挟む 2 辺を a, b 、斜辺を c とする直角三角形となる。」

はどのようにして証明したのだろうか。実は、これは非常に簡単であった。

まだ直角三角形かどうか分からない、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ三角形を $\triangle ABC$ とし、 a, b を直角を挟む 2 辺とする直角三角形を $\triangle A'B'C'$ 、 $\triangle A'B'C'$ の斜辺を c' とする。

仮定より

$a^2 + b^2 = c^2$ 、
 $a^2 + b^2 = c'^2$ 、
したがって $c = c'$ 。



故に、2 つの三角形は 3 辺がそれぞれ等しく、合同となる。よって $\angle ACB = \angle A'C'B'$ 。したがって $\triangle ABC$ は直角三角形となり、三平方の逆の定理が証明された。

上の三平方の逆の定理の証明で、 $c = c'$ となり、 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ を用いた。仮定から結論を導くのに、結論に合う三角形をつくっておいて、これが仮定で示している三角形と一致することを示すことによって結論を導いた。すなわち、仮定を満たす図形はただ一個 (合同であるという意味) であることが証明の根拠になっている。これを一般化すると、「 P ならば Q 」を証明するのに、まず P の条件を満たす R を考え、 Q と R とが一致することから結論を導く。これが同一法である。

これは通常、次の形で使われる。

「 P ならば Q という定理が真で、性質 Q をもつものがただ一つしかないならば、 Q ならば P という逆の定理も成り立つ」

三角形の合同条件の一つは「2 つの三角形で、2 辺とその間の角がそれぞ

れ等しいならば、その 2 つの三角形は合同である」である。

合同な図形の性質から、「2 つの三角形が合同ならば、2 辺と 1 角はそれぞれ等しい」。その逆「2 辺と 1 角がそれぞれ等しければ、2 つの三角形は合同である」は成り立たなかった。それは、もとの定理の結論である、「2 辺と 1 角がそれぞれ等しい」三角形が一般には 2 つ存在し、同一法の条件を満たさないからである。

三平方の定理の逆の証明は同一法を適用した。同一法は、三角形の合同条件、三角形の相似の意味、接弦定理の逆の定理、重心の定理、チェバの定理やメネラウスの定理の逆の定理、その他ありとあらゆるところで、知らず知らずの内に用いられている。それが話のわかり難さの原因になっていることが多く、多くの場合、同一法を意識化する事で解決する。

しかし、同一法を適用する時最も重要なことは、「性質 Q をもつものがただ一つしかない」ことの明確な証明が必要である。三平方の逆の定理の証明では「 $c = c'$ 」に相当する。明確な証明がない限り同一法は無効である。

6 「述語論理」は命題論理の枠をこえた論理であり、これを整理してここで展開することは出来ない (『中学数学発展』は、不十分ではあるが、述語論理の展開を行っている)。ここではベン図を援用して、実用に供することを考える。

[例題 1] 次の推論が正しいか、間違いかを答えよ。

「ムササビは鳥ではない。鳥は卵生である。したがって、ムササビは卵生ではない。」

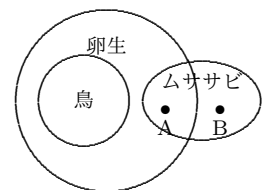
結論が正しいかどうかを尋ねているのではないだけでなく、推論が正しいか、正しくないかの結果のみを求めているのでもない。そう判断した論拠を示すこと (正しいときはその証明を、正しくないときはその旨の証明 = 通常反例を示すこと) がこの問題に対する解答である。

論理的な関係を明確に表現すると、

「(ムササビは鳥ではない) かつ (鳥は卵生である) ならば、
(ムササビは卵生ではない)」

となる。したがってベン図は右図となるが、ムササビは要素 A の場合と要素 B の場合が考えられる。

すなわち、仮定からは要素 A のムササビが卵生の場合も、要素 B のムササビが卵生でない場合もある。ムササビは卵生でないと結論しているわけだから、この推論は間違っている。



[例題 2] 次の各推論について、それが推論の方法として正しいものに○、間違っているものに×をつけよ。

- (1) すべての母は女である すべての女は男ではない
ゆえに、すべての男は母ではない (○)
- (2) すべての人間は生物である ある生物は動物である
ゆえに、ある人間は動物である (×)
- (3) ある女性は看護師である ある看護師は美人である
ゆえに、ある女性は美人である (×)
- (4) ベートーヴェンは作曲家である ある作曲家は運命を作曲した
ゆえに、運命交響曲を作曲したのはベートーヴェンである (×)
- (5) すべての日本人は人間である すべての日本人はゴジラではない
ゆえに、すべてのゴジラは人間ではない (×)