



当塾の教育改革の提言

1 偶然のことであるが筆者は中学生の中ごろから欠かさず複数の新聞を読んできており、ただ一度も離れることがなかったのが朝日新聞であった。その朝日新聞が「確かな学びをサポートする教育情報紙」として、希望する読者に無料で配布しているのが、月刊の朝日新聞「EduA」である。その9月号(vol.75)には、いろいろ有益な情報もあるのだが、なんとその特集は「今こそ留学」であった。

さらに留学にもいろいろあるが、筆者に強い違和感を抱かせたのは、留学の主要な目的・目標が、筆者が考える「現代が多くの若者に主要に要請する知的創造的能力」の獲得とは全く無縁であることである。そして、非常に残念なことではあるが、この国の教育のどの局面を見ても、この状況は殆ど変わらない。

この数年、『春夏秋冬』ではこの国の基礎科学力・先端技術力・労働の生産性の大幅な後退を指摘してきた。そして『春夏秋冬 417号』以降、毎回当塾の教育改革案に言及してきた。ここで、改めてその概要を書いておきたい。

2 初めにこうした議論の経緯を示しておこう。
日本の科学技術の大幅な後退を 社会学的手法 を全面的に適用して明らかにしたのは、

「科学立国の危機」(豊田長康氏著 2019年2月発行) であり、豊田氏は、その中で、
「大学の教育研究力、イノベーションの量と広がり
を促し経済成長に貢献する正循環モデル」
を提唱した。

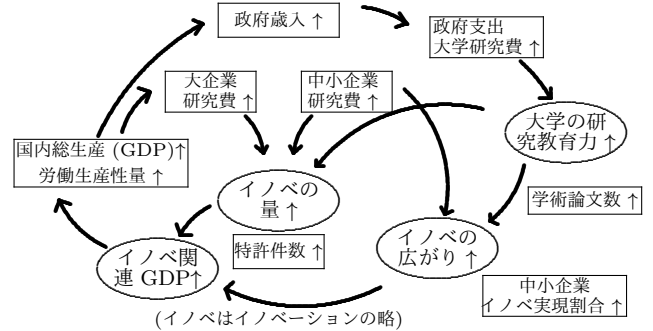
勿論、この国の理系の科学教育の大幅な後退を指摘したのは、豊田氏が初めてではない。

ジャパンアズナンバーワンの時代は1991年のバブル崩壊で完全に終焉した。並行して1980年度から2010年代初期まで「ゆとり教育」が実施された。あらゆる意味での学力後退が進行した。こうした中で私立の中高一貫校が隆盛を極めるようになった。私立の中高一貫校は、一流大学進学や技能職としての医師免許取得の為の医学部合格を主要な目標に教育を進めた。

西村和雄氏は1980年代の後半から、この国の理系の学力の後退を指摘していた。『春夏秋冬 289号』(2012年5月号)では、西村和雄氏らの調査研究に基づいて、『点数ができない大学生 21世紀の日本が危ない』(西村和雄氏共編著、2010年)で世間に警鐘を鳴らしていたことを指摘していた。

しかし、非常に残念なことであるが、こうした議論が真に現在に要請する主要な学力「知的創造的能力」と結びついたものではなかったことである。バブル崩壊以降、誰の目にもこの国の基礎科学力・科学技術力・労働の生産性はひたすら低迷していることが明らかとなった。

豊田氏の「正循環モデル」は以下のようなものである。



確かに、現実のイノベーションとGDP・労働の生産性の向上は、このモデルに近い形で発展しているように見える。しかし、当塾の長年の主張通り、大学の研究・教育力は、その上に、教育の振興のサイクルがかぶさる。

またしても、2018年度ノーベル生理学・医学賞の本庶佑氏の言葉
「アカデミアがシーズを生めば、長期的に、しかも桁違いの
経済効果を生むことは歴史が証明している。」

を引用しなければならない。

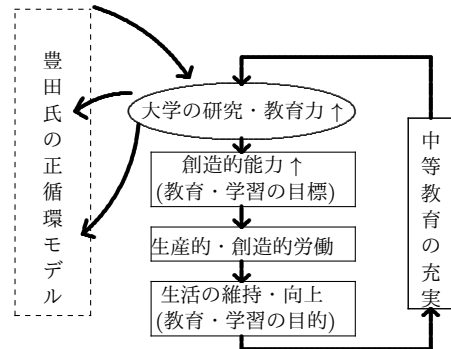
『春夏秋冬 368号』(2018年12月号)では、

能力は手法(技能) < 技術 < スキルにしたがって、幅を広げ、より一般性と合理性を深めていくが、その基礎にある能力が、学力であると位置づけることができる。本庶佑氏の言葉、
「基礎科学が、重要なんです。」

をしっかり受け止めておかねばならない。「学力」は基礎科学力に極めて近い概念のはずだ。

と書いていた。

したがって、『春夏秋冬 417号』以前から、大学の教育・研究力には、下図のような教育自身の成長循環があるはずだと主張してきた。



これによって、豊田氏の正循環モデルは完結するはずだ。

3 何度も書いたが、『春夏秋冬 420号』にしたがって、当塾の 教育改革の構想 をもう一度示しておこう。

(1) 「現代に要請する主要な教育目標」は「知的創造的能

力育成」の教育であり、その実現は僅かでも「知的創造的実績」を持った教師によってしか実現できない。「知的創造的成果(基礎科学)」を理解すること、自らが知的創造性を発揮することとは、天と地ほどの隔りがあるからだ。確立した科学をいくら正確に理解していても、自らが知的創造的実績を出せる保証はどこにもない。「知的創造的実績」を出す確かな方策は、科学を正確に理解するだけでなく、どうした具体的(歴史的)契機を媒介にして創造性が獲得されるのか、創造性を発揮した人たちは他の人が持っていなかったどんな資質=多様性・個性(特異性)がその実績に寄与したのか、を学んでおかねばならない。確立した科学を正確に修得し、如何に要領よく「即興的」に既に解かれた課題にマニュアルに従って応えることができたとしても、その人の「知的創造的能力」を検定したことにはならない。現代の教育の主要な目標は「知的創造的な能力」自身であり、その一方、実績を持たない人の基礎科学教育の担当能力は未知数である。現代でも当然のごとく多くの大学院では創造的実績を持った人が教授を務めている(現実には怪しげな教授も多数いる)ことになっているが、それと全く同様の理由によって、中等教育や大学の学士課程教育においても知的創造的実績をもった人でなければ、創造性教育を担当することはできないだろうことを意味する。

(2) この国の低迷の根本的な原因は、高度な知的創造的活動に専念できる人の絶対数が少ないことによる。研究開発費の倍増ではなく、多様な課題に答え得る大量の知的創造的能力を持った人材の育成こそが必要である(このことについては、[\[4\]](#)でも繰り返し書く)。

一方で、研究開発者は、広い意味で常に何らかの自らの後継者の養成に関わらざるを得ない。それを、大学院の教授だけでなく、中等教育・大学学士課程の知的創造的実績のある教師にも拡張すればよい。したがって、中等教育・大学学士課程の「創造性教育」における教師の資格は、「知的創造的実績」のある人である。

(3) 中等教育・大学学士課程の教師の教育ノルマを週2日程度以内に制限し、残りの全ての時間を研究・開発的労働に従事させる。身分保障・生活保障は、その教育ノルマだけで行えばよい。

一般に、どの教科においても、教育には多くの補助的な労働が伴う。そうした労働には、現在の学卒程度の学力を持ち、少々の教師としての訓練を受けた多くの人たちが分担すればよい。彼らに、「知的創造的実績」は必ずしも必要はない。広い意味での教育は、従って、学校教育は国民全体の課題であり、それぞれは、自らの能力に応じた貢献ができるよう組織しなければならない。

(4) 「知的創造的能力」の重要な要素の一つは、基礎科学を完璧な完成したもとしてではなく、進歩・発展の歴史(論理)の中で理解すること、二つ目には、各自の創造性の源泉は各自を特徴づける多様性・個性にある。それによって、同じことを学んでも、同じ現実に接しても、他の人とは異なる受け止め・理解ができる。自らの持つ多様性・個性は感性と言われることもあり、それが合理性と結合したとき、創造性

に発展する可能性を持っている。

(5) 母語や地域文化は多様性の宝庫である。初等・中等教育は自力で通える距離に、大学学士課程の大学は自宅から通える距離に、当面理学教育においては(いずれ社会科学においても)それぞれの生徒・学生の意欲と能力に応じた最適な教育コース・カリキュラムを開設しておく必要がある。

これについては、[\[5\]](#)にも繰り返し書く。結果として、中学生が大学学士課程の講義を受講することも可能なように組織しなければならない。

(6) 中等教育においても、半年前にはシラバスや講義要綱(参照:当塾のHPの「電磁気学メモ」「電磁気学講義詳細」)を公開し、受講選択の指導はあっても、最終的には受講者の責任において受講する、という形式にすればよい。

「デジタル教科書」は、教育の無償化に大きく貢献できる。普及すれば、授業の進め方は、一変するだろう。基礎科学教育、即ち大学学士課程教育にまでそうしたものが進行すれば、学びは大きく変わるだろう。しかし、対面での原理の確認・ディベート、協働での実験・観察・資料の整理などの従来からの学びの基礎は欠かせない。そこには、多くの補助的な教師が必要となる。

(7) 「即興力」を検定する各種入学テスト、各種学力テストは、全面的に廃止すべきだ。

(8) 現代の学校は非常に多くの、しかも重要な任務を持っている。また、どの教科においても、教育には多くの補助的な労働が伴う。それぞれには、それぞれの課題を熟知した専門家を配すべきだ。

(9) 現在、一部の私立中学校・高校や公立中学校では「教科センター方式」の授業が行われている。これを中学、高校、大学学士課程教育全体に拡張すればよい。

そのためには、まず一切の高校入試を廃止し、該当年齢の全ての生徒を公立・私立・国立などのいずれかの中高一貫校に受け入れる。

障害には身体障害・知的障害・精神障害があるが、何れの障害者も可能な限り中高一貫校に受け入れるべきだ。それらの障害は、かけがえのない個性でもあり、他の人とは違った知的創造的活動の可能性を秘めていることは、ホーキング氏やポントリアーギン氏の実績を見ればよく分かる。

直ちに、一部のカリキュラムは、公・私、中高・大の壁を越えて、多様な生徒・学生が受講できるように改革すべきだ。勿論、教育は、全て無償が原則である。優れた教育への投資は、十数年後には、二倍どころか、何十倍もの経済効果を必ずもたらす。

(10) 言い換えれば、生徒は、意欲と能力に応じて、最大限、教科書のレベルを超えて自主的に学習できる体制に移行すべきである。指導用書籍等の全面的な公開(誰でも適切に入手できることを含む)は、直ちに実現できる改革の重要な一歩となりえる。デジタル教科書は、自動的に、そうしたことが可能なように、編集することができる。あらゆるところで、あらゆる局面で、私立・公立・国立の学校や大学の枠を越えて、生徒・学生が自らの責任で、自らの意欲と能力に応じた教育が無償で受けられるよう組織すべきだ。それを支援するのが、行政と補助的教育労働を行う教師の仕事だ。

基本的に以上が当塾の教育改革構想であるが、以下では、

少しその背景となるいろいろな主張との整合性を議論しておこう。

4 『春夏秋冬 424 号』では以下の様に書いた。
北欧の高い労働の生産性は、無償のリカレント教育・生涯学習・成人教育などが大きくかかっていると言われている。

リカレント教育とは、「学校教育を一度離れて社会で活動していた人が再度教育や訓練を受ける学習機会を得ることができ、それによって自らのキャリアを高め、職業生活や社会生活に生かすことを可能とする教育」のことだ。学習の目的は 仕事に生かすための知識やスキルの獲得 である。

リカレント (recurrent) とは、「繰り返す」、「循環する」という意味である。生涯学習は、政府広報オンラインによると、生涯にわたり行うあらゆる学習で、学校教育や社会教育、さらには文化活動、スポーツ活動などだ。ボランティア活動や趣味など仕事に無関係なことや「生きがい」に通じる内容も学習の対象に含まれる。

社会が必要とする多くの労働の実質的な内容は次々と変化する。それに応じて、働く人も自らの能力を転換またはスキルアップしなければならない。北欧のリカレント教育・生涯学習・成人教育はそれらを無償で保障してきた。それに拠って、当面の労働の生産性は高い水準で維持されてきたのだ。

しかし、この状況が何時までも続くとは考えられない。それらの主な目標は、仕事に生かすための知識やスキルである。端的に言えば、リカレント教育・生涯学習・成人教育の目指すものは、技能であり、「即興力」である。多くの技能・即興力に関わる能力は、ICT や AI の進展によって、次々と自動化される。勿論、全ての部分がそうなることなどありえないが、人が関わらざるを得ない部分は相対的にどんどん少なくなっていくということだ。すなわち、北欧の高い労働の生産性の原動力であったリカレント教育・生涯学習・成人教育など大きくかかわる時代は、徐々に終末を迎えつつあると言える。それに代わって、少なくとも当面、徐々にではあるが、人が関わらざるを得ない部分、AI や自動化などだけでは対応できない「知的創造的能力」がクローズアップされてくる。勿論、北欧が「知的創造的能力」育成を怠っていると主張しているわけではない。

現在でも人が関与しなければ、一歩も前に進まない分野は無数にある。AI であっても、徐々に「知的創造的能力」を獲得しているはずだが、現在でも人の「知的創造的能力」の関与によって始めて解が得られるだろうことは無数にある。AI は、主に無数のデータと過去の人間の「知的創造的実績」から学ぶが、課題によっては、AI だけでは乗り越えることのできない大きな飛躍が欠かせないことも多数あるはずだ。ここにこそ、人の「知的創造的能力」の関与が欠かせない。

AI だけでは獲得できない「人の知的創造的能力の源泉」が、どこにあるのかを考えておかねばならない。まじめに近年のデータや過去の知的実績を学習する (AI はすでにそうした能力をかなり獲得している) だけでは、AI を乗り越えることができない事は明らかだ。その人の存在に関わる多様性 (ダイバーシティ)、即ちその人の持つ個性・信念・民族・

経験・価値観などが一体として作用するところに、その人の「知的創造的能力」の一つの源泉があると考えられる。その人が、その時点で、AI や他の人がなし得なかった「知的創造的能力」を発揮するには、それだけの根拠があるはずだ。

表層的ダイバーシティには、性別・人種・国籍・年齢・SOGI (性的指向・性自認)・障害の有無などが含まれていると言われている。

一方、深層的ダイバーシティには、宗教・経験・嗜好・第一言語・受けてきた教育・コミュニケーションの取り方が含まれていると言われている。

即ち、個人は、自らに備わっている多様性・個性を有効に活用してこそ、AI や他の人ができなかった「知的創造的実績」を実現することが可能となる。

勿論、全ての人が、「知的創造的能力」を活用する立場になる、ことなどありえないが、自らの個性を活かした生き方こそが、その社会の活性化に結び付く。現在の社会は、筆者の独断だが、およそ3割の人に、「知的創造的能力」を要請している、と推測する。

現代社会が主要に要請する「知的創造的能力」をもった多数の若者を意識的に育成しなければ、その社会は間違いなく徐々に後退を始める。教育・学習の主要な目標を「知的創造的能力」に置くのではなく、「技能習得」や入試などの「即興力」に傾注しては、次世代の科学・技術を担う人材が育たないのは、火を見るよりも明らかだ。

繰り返すが、現代では、

知的創造的能力 → 科学技術力 → 労働の生産性

の強い因果関係を、誰も否定することはできない。にもかかわらず政策作成段階で、これを無視あるいは軽視し続けてきたこの国では、結果として、国際比較での労働の生産性は、どんどん低下し続けている。現在では、根幹部分の後退は、必然的に全ての方面での後退に結び付く。

2014 年、安倍晋三総理大臣は OECD 閣僚理事会で「学術研究を深めるのではなく、もっと社会のニーズを見据えたもっと実践的な職業教育を行う。そうした新たな取り組みを、高等教育に取り込みたい」と発言した。これは、かなり多くの文系出身者の政治家が陥る共通した誤った認識だ。その延長上に政府は、ついに科学者が民主的に推薦した学術会議の会員候補のうち、単に気に入らないという理由だけで、6 人の候補者を拒否する、と言う暴挙に出たのだ。これが如何にこの国の科学技術の閉塞をもたらしているかを彼らは理解できない。

日本の研究力が年々低下している現状に対して、2023 年 9 月、文部科学省は初の「国際卓越研究大学」の認定候補大学を東北大に決定した。基礎科学の (創造的・独創的な) 新しい芽は、あちこちで吹き出るものであり、莫大な資金が必要な研究・開発は、明らかに特定の大学の枠を越えた別の枠組みを作って共同研究・共同開発を行うのが合理的であるはずだ。

筑波大と弘前大のチームは、ノーベル賞級の研究成果を上げるには、研究費の配分で「選択と集中」ではなく、少額の研究費を多くの研究者に配る (広く浅く支援する) ほうが良い、という至極自明な分析結果を発表している。「国際卓越研究大学」という構想自身が創造性・独創性と相反する指向性を持っている。「現代」を理解しようとしたくない人たちによる、的外れな政策は休み休みにしていただきたいものだ。

5 ここに至って、初めて『春夏秋冬 425 号』に述べた改革案が出てくる。

『未来の年表 業界大変化』（講談社現代新書）の著者で、ジャーナリストの河合雅司氏は、

「国交省は、人口 10 万人程度の商圏であれば大半の業種が存続可能だとしています。10 万人都市をつくれということではなく、複数の自治体でこれぐらいの商圏規模を維持できれば生活に不可欠なサービスを概ね維持し得るとのシミュレーションです。全国で道路網が整備されましたし、デジタル技術も使えばかなり多くの地域で 10 万人商圏を形成することはできると思います。」

と言っている。言い換えれば、消費生活を基準にすれば、人口 10 万人を一つの単位とすることができる。

一方、明石市は、元市長の泉房穂氏が子育て支援を充実させたことで、明石に引っ越す人が増え、人口（現在約 30 万人余り）も増加した。

これらを合わせると、大都市以外の日本の全ての地域を 10 万から 30 万人程度の 一つの文化圏として発展させることが、この国の活性化に大きく貢献することになる、と解釈できる。よって[3]で書いたように以下となる。

基本的には 徒歩で通える距離にある多数の幼稚園・小学校、基本的には 自力で通える距離に一貫した中等教育を担う複数の中高一貫校がなければならぬだけでなく、必ずしもその地域になくても 自宅から通える距離に基本的には基礎科学を軸に大学学士課程教育を行う大学（又はその分校）がなければならぬ。小学上級生では、中高一貫校のいくつかの講義に参加できるようにしておけばよい。

全ての生徒は、その文化圏で（国立・公立・私立を問わず）開講される如何なる基礎科学の講義にも、事前に公開されるシラバスと講義要綱を基に、基本的には自分の責任で受講する権利を与えるべきだ。小学上級生にも、中高一貫校のいくつかの講義に参加できるようにしておけば尚良い。

全自動で無料のコミュニティーバスを充実させれば、年齢や障害の有無にかかわらず、域内での移動は全く問題なく行え、それぞれの独立した豊かな文化圏（多様性の実態）の成立を支えることができる。

中等教育や大学学士課程教育の大都市への集中は、都市部以外に住む人達の尊厳の否定であるだけでなく、多様性（「知的創造的能力」の重要な源泉）の無視による「知的創造的能力」の育成の決定的な阻害要因になる。

この国にも、「天賦の才を持つ人」という意味で「ギフテッド」と呼ばれるような同世代の子どもよりも先天的に高い能力を持っている人や、IQ(Intelligence Quotient, 知能指数)が非常に高い人が次々と現れている。しかし、残念ながら日本で未だそうした人から、ノーベル賞級の「知的創造の実績」を出した人は現れていない。

いずれにしても、この国の現在の教育・研究・開発体制は、この国で、多くの内外の「知的創造的能力」獲得を目指す若者の育成を軽視し、その一方、明らかに貴重な人的資源さえ無駄遣いし続けている。後はないことを自覚するべきだ。

『春夏秋冬 426 号』の「現実を直視しよう」を合わせて是非読んで頂きたい。数学はそれ自身科学であるとともに、科学の言葉でもある。科学技

術の研究・開発では例（1 次元の圧縮性熱流体である燃焼ガスの双曲型偏微分方程式）の様に、従来考慮さえされていなかった因子を連立偏微分方程式に取り込む時、それを正確に表現できなければ、どんな AI が開発されても、その時点での知的創造的活動の AI との協働は成り立たない。

既に『春夏秋冬』は書くべきことは書いた。世の反応が今のままならば、何時『春夏秋冬』を休刊するか予測できない。

創造性教育を！

今回は何も書かないつもりだったが、これまでの習慣でこのままでは余りにも寂しいので、自著の『中学数学発展』（塾生以外には非公開）に基づいて、中高生に要請される集合の議論をスペースが許す範囲で書くことにした。ただし、筆者は数学者でも論理学の専門家でもなく、基本的展開についてのオリジナリティーはどこにもないはずである。

有限集合の議論は、命題論理と完全に対応する。さらに続きは、次号『春夏秋冬』に書くかもしれない。

1 数学的に明確に定義された物や事柄の集まりを集合という。美人の集まりは集合ではない。その集合に属するものを要素あるいは元^{げん}という。 x が集合 A の要素であることを $x \in A$ (あるいは $A \ni x$) と表す。また、 x が集合 A の要素でないことは $x \notin A$ と表す。集合 A と要素 x に関して、

$x \in A$ か $x \notin A$ のいずれか一方が成り立ち、両方が同時に成り立つことはない。

とする。集合 A の要素の個数を $n(A)$ と表す。要素の個数が有限個の場合を有限集合、無限個の場合を無限集合という。集合の表し方には、大きく分けて 2 通りの方法がある。

その一つは「列挙型の記法」である。 x_1, x_2, \dots, x_n を要素とする集合を $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ などと、要素を列挙して括弧 $\{\}$ で囲む方法である。無限集合の場合も、たとえば自然数全体の集合を $\{1, 2, \dots\}$ などと表すこともある。

もう一つの集合の表し方は「内包的な記述」による方法である。集合の要素を特徴づける性質や条件を明示して、それに属する要素の集まりであることを示す。

一般的な形は $\{x | \dots\}$

となる。 x は集合の要素を表す仮の記号で、 \dots の部分にこの x の性質・条件を書く。さらにその x の範囲を表す集合 D に限るときは、 $\{x \in D | \dots\}$ と表すこともある。

要素を一つも持たない集合を空集合といい、ギリシャ文字 ϕ で表す。即ち $\phi = \{\}$ である。また、あらかじめ考えているもの全体を全体集合といい、記号 U を用いる。

2 つの集合 A, B において、 A の全ての要素が B に属するとき、 A は B の部分集合といい、

$A \subset B \iff$ 全ての x に対して、 $x \in A$ ならば $x \in B$

と表す。この関係 $A \subset B$ を包含関係という。（ $A \subset B$ を

$B \supset A$ と書くこともある。今後、こうしたことは断らない) 包含関係には明らかに次の性質が成り立つ。

$$A \subset A, \phi \subset A \subset U, \quad A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$$

[演習] 次の例について、上の全てを確認してください。

$$U = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}, \quad A = \{a, c, f\}$$

$$B = \{a, c, d, e, f\}, \quad C = \{a, c, d, e, f, g\}$$

このような列挙型の有限集合の場合は例から自明ではあるが、論証の道場と見なし、一般の集合についての証明を試みてください。

たとえば、 $A \subset B, B \subset C \Rightarrow A \subset C$ については、次のようになる。

$x \in A$ の任意の x にたいして (今後はこれを、 $x \in A$ とする、と略記)、 $A \subset B$ より $x \in A$ だから $x \in B$ 。さらに、 $B \subset C$ より $x \in B$ だから $x \in C$ 。よって、 $x \in A$ ならば $x \in C$ 。したがって $A \subset C$ 。

$A \subset B$ かつ $B \subset A$ のとき、 A と B は等しいと言う。

$$A = B \iff A \subset B \text{ かつ } B \subset A \\ \iff \text{「全ての } x \text{ について、} x \in A \iff x \in B \text{」}$$

A と B が等しくないことを $A \neq B$ と表す。

また、 $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき、すなわち、 A は B の部分集合であるが、 B の中に、 A に属さない要素があるとき、 A は B の真部分集合といい、

$$A \subsetneq B \iff A \subset B \text{ かつ } A \neq B$$

と表す。(\subsetneq を \subset と表す人もあるから注意。)

[例題 1] $A = \{4n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$, $B = \{2n + 1 | n \in \mathbb{Z}\}$ であるとき、 $A \subset B$ かつ $A \neq B$ であることを証明せよ。ただし、 \mathbb{Z} は整数全体の集合である。

$x \in A$ とすると、 $x = 4n + 1$ (n は整数) と書ける。このとき、 $x = 2(2n) + 1$ 。 $2n$ は整数であるから、 $2(2n) + 1 \in B$ 、すなわち、 $x \in A$ ならば、 $x \in B$ であるから、 $A \subset B$ 。また、 $3 \in B$ であるが、 $3 \notin A$ 。したがって、 $A \neq B$

[例題 2] \mathbb{Z} を整数全体の集合とすると、次の集合 A, B は等しいことを証明せよ。

$$A = \{2x + 3y | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}, \quad B = \{3x + 5y | x \in \mathbb{Z}, y \in \mathbb{Z}\}$$

まず、 $A \subset B$ を証明

$a \in A$ ならば、 $a = 2m + 3n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$) と表される。また、 $a = 2m + 3n = 3(-m + n) + 5m$ 、 $-m + n \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$ であるから、 $a \in B$ よって、 $A \subset B$

つぎに、 $B \subset A$ を証明

$b \in B$ ならば、 $b = 3m + 5n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$)。また、 $b = 3m + 5n = 2n + 3(m + n)$ 、 $n \in \mathbb{Z}, m + n \in \mathbb{Z}$ であるから、 $b \in A$ よって、 $B \subset A$ $A \subset B$ かつ $B \subset A$ であるから、 $A = B$

[例題 3] 整数全体の集合 \mathbb{Z} と集合 $A = \{19m + 12n | m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}\}$ について、 $A = \mathbb{Z}$ であることを証明せよ。

$a = 19m + 12n$ ($m \in \mathbb{Z}, n \in \mathbb{Z}$) は整数である。よって $A \subset \mathbb{Z}$ $19, 12$ は互いに素だから、 $19m + 12n = 1$ となる整数 m, n が存在する。任意の $z \in \mathbb{Z}$ について、 $z = 19mz + 12nz$ $mz \in \mathbb{Z}, nz \in \mathbb{Z}$ より、 $z \in A$ 。よって $\mathbb{Z} \subset A$ したがって、 $A = \mathbb{Z}$

全体集合 U に属し、集合 A に属さない要素の集合を A の補集合といい、 \bar{A} と表す。

$$\bar{A} = \{x | x \notin A \text{ かつ } x \in U\}$$

補集合には次の性質がある。 $x \in U$ について、

$$x \notin A \iff x \in \bar{A}, \quad x \in A \iff x \notin \bar{A}$$

$$\bar{\bar{A}} = A, \quad A \subset B \Rightarrow \bar{A} \supset \bar{B}$$

必ず各自証明を試みて下さい。その後、下の”証明”を参照して下さい。

$x \notin A$ とする。よって $x \in \bar{A}$ 。また $x \in \bar{A}$ とする。よって $x \notin A$ 。

$x \in A$ とする。 $x \in \bar{A}$ と仮定すると、 $x \notin A$ 。これは矛盾。よって $x \notin \bar{A}$ 。

また $x \notin \bar{A}$ とする。 $x \notin A$ と仮定すると $x \in \bar{A}$ 。これは矛盾。よって $x \in A$ 。即ち、これらは \bar{A} の定義そのものである。

$x \in \bar{A}$ とする。 $x \notin \bar{A}$ 、よって $x \in A$ 。また $x \in A$ とする。 $x \notin \bar{A}$ 、 $x \in \bar{A}$ $A \subset B$ とする。 $x \in \bar{B}$ かつ $x \notin \bar{A}$ なる x が存在したとする。 $x \in A$ 、 $A \subset B$ より、 $x \in B$ 。これは $x \in \bar{B}$ と矛盾。したがって、 $x \in \bar{B}$ ならば、 $x \in \bar{A}$ 。ゆえに $\bar{A} \supset \bar{B}$ 。

2 2つの集合 A, B の要素を全てあわせて得られる集合を和集合 (結び) といい、 $A \cup B$ と表す。

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

である。

「 P または Q 」とは、「少なくとも P または Q が真である」、という意味であり、 P も Q も真、 P だけ真で Q は偽、 P は偽で Q は真、の3つの場合がある。集合の定義や、論理展開の中に既に「論理」の考えが入っており、「集合と推論」のところで、その関係がより明確になる。「かつ」「ならば」「否定」「矛盾」などの用語も同じである。ここでの学習の目的は、集合の公理系を明らかにすることではない。

和集合の定義からただちに、

$$x \in A \cup B, x \notin A \Rightarrow x \in B$$

$$x \in A \cup B, x \notin B \Rightarrow x \in A$$

が得られる。

$x \in A \cup B, x \notin A$ とする。もし、 $x \notin B$ を仮定すると、 x は A にも B にも属さないから、 $x \notin \{x | x \in A \text{ または } x \in B\} = A \cup B$ となり、 $x \in A \cup B$ と矛盾。したがって、 $x \in B$ 。

また明らかに和集合について次の性質が成り立つ。

$$C \supset A, C \supset B \Rightarrow C \supset A \cup B \cdots \text{「和の導入則」}$$

$$A \cup B \supset A, A \cup B \supset B \cdots \text{「和の除去則」}$$

$C \supset A, C \supset B$ とする。 $x \in A \cup B$ ならば、 $x \in A$ または $x \in B$ 。よって $x \in A \subset C$ または $x \in B \subset C$ 。いずれにしても、 $x \in C$ 。したがって、 $C \supset A, C \supset B \Rightarrow C \supset A \cup B$

$x \in A$ とする。このとき、 $x \in A$ または $x \in B$ 。よって $x \in A \cup B$ 。したがって、 $A \subset A \cup B$ 。

「和の導入則」と「和の除去則」は、 $A \cup B$ は A, B をともにも含む集合であって、そのような集合のうち、要素の数が一番小さい集合であることを意味し、対で和集合の定義と考えることもできる。したがって、「導入」「除去」という語は相対的な呼び方に過ぎない。

「和の導入則」と「和の除去則」は和集合の定義と考えることができる、ということをもう少し詳しく見ておこう。

2つの定義が同値であることを示すためには、

$$\text{和集合の定義を } A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\}$$

$$\text{和の導入則を } C \supset A, C \supset B \Rightarrow C \supset f(A, B)$$

$$\text{和の除去則を } f(A, B) \supset A, f(A, B) \supset B$$

としたとき、 $A \cup B \subset f(A, B)$, $f(A, B) \subset A \cup B$ を示せばよい。
 $x \in A \cup B$ とする。すなわち、 $x \in A$ または $x \in B$ 。 $x \in A$ のとき、 $A \subset f(A, B)$ より、 $x \in f(A, B)$ 。 $x \in B$ のとき、 $B \subset f(A, B)$ より、 $x \in f(A, B)$ 。いずれにしても、 $x \in f(A, B)$ 。したがって、 $A \cup B \subset f(A, B)$ 。
 また、 $x \in f(A, B)$ とする。 $C \supset A, C \supset B$ なる、 $C = A \cup B$ が存在する。 $C \supset f(A, B)$ より、 $C \ni x$ 。したがって、 $f(A, B) \subset A \cup B$ 。
 こうした定義からただちに

$$A \cup \bar{A} = U \cdots (\text{命題論理の排中律に相当})$$

$$A \cup \phi = A$$

が成り立つことがわかる。

和の除去則 $A \cup B \supset A$ すなわち、「 $x \in A$ ならば、 $x \in A \cup B$ 」を、補集合で表現すると、「 $x \notin \bar{A}$ ならば、 $x \notin \overline{A \cup B}$ 」となる。さらに明らかに、

$$A \cup A = A \cdots (\text{等中則})$$

$$A \cup B = B \cup A \cdots (\text{交換法則})$$

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \cdots (\text{結合法則})$$

が成り立つ。

和の除去則より、 $A \cup A \supset A$ また、和の導入則と $A \supset A$ より $A \supset A \cup A$ 。したがって $A \cup A = A$

和の除去則より、 $C = A \cup B$ とおく。 $C \supset A, C \supset B$ 。順序を入れ替えて、 $C \supset B, C \supset A$ 。よって和の導入則より、 $A \cup B = C \supset B \cup A$ 同様に、 $A \cup B \subset B \cup A$ 。ゆえに、 $A \cup B = B \cup A$

$D = (A \cup B) \cup C$ とおく。和の除去則を用いると、 $D \supset A, D \supset B, D \supset C$ となる。 $D \supset B, D \supset C$ に和の導入則を適用すると、 $D \supset B \cup C$ 。 $D \supset A, D \supset B \cup C$ に和の導入則を適用すると $D \supset A \cup (B \cup C)$ となる。すなわち、 $(A \cup B) \cup C \supset A \cup (B \cup C)$ 。全く同様にして、 $A \cup (B \cup C) \supset (A \cup B) \cup C$ 。したがって、 $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

3 2つの集合 A, B の両方に共通の要素をすべて集めて得られる集合を共通部分 (交わり, 積集合) といい、 $A \cap B$ と表す。したがって、

$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\}$$

である。明らかに共通部分について次の性質がある。

$$C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B \cdots (\text{積の導入則})$$

$$A \cap B \subset A, A \cap B \subset B \cdots (\text{積の除去則})$$

$C \subset A, C \subset B$ とする。 $x \in C$ ならば $x \in C \subset A$ かつ $x \in C \subset B$ 。よって $x \in A \cap B$ 。したがって、 $C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset A \cap B$

$x \in A \cap B$ とする。 $x \in A$ 。したがって、 $A \cap B \subset A$ 。

「積の導入則」と「積の除去則」は、 $A \cap B$ は A, B の両方に含まれる集合であって、そのような集合の内、要素の数が最大のものを意味し、積集合の定義と考える事もできる。

[演習] 「積の導入則」と「積の除去則」は積集合の定義と同値であることを証明せよ。

2つの定義が同値であることを示すためには、

$$\text{積集合の定義を } A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$

$$\text{積の導入則を } C \subset A, C \subset B \Rightarrow C \subset f(A, B),$$

積の除去則を $f(A, B) \subset A, f(A, B) \subset B$

としたとき、 $A \cap B \subset f(A, B)$, $f(A, B) \subset A \cap B$ を示せばよい。
 $x \in A \cap B$ とする。すなわち、 $x \in A, x \in B$ 。したがって、 $x \in C, C \subset A, C \subset B$ なる C が存在する。(例 $C = \{x\}$)。

$C \subset f(A, B)$ より、 $x \in f(A, B)$ 。したがって、 $A \cap B \subset f(A, B)$ また、 $x \in f(A, B)$ とする。 $f(A, B) \subset A, f(A, B) \subset B$ より $x \in A, x \in B$ よって $x \in A \cap B$ 。したがって、 $f(A, B) \subset A \cap B$ 。

$$A \cap \bar{A} = \phi \cdots (\text{命題論理の矛盾律に相当})$$

$$A \cap \phi = \phi \cdots (\text{統治則})$$

が成り立つことがわかる。

積の除去則の対偶は「 $x \notin A$ ならば、 $x \notin A \cap B$ 」となる (対偶は論理のところで説明する。矛盾の考えが論拠)。これを補集合で表現すると、 $x \in \bar{A}$ ならば、 $x \in \overline{A \cap B}$ となる。さらに明らかに、

$$A \cap A = A \cdots (\text{等中則})$$

$$A \cap B = B \cap A \cdots (\text{交換法則})$$

$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \cdots (\text{結合法則})$$

が成り立つ。

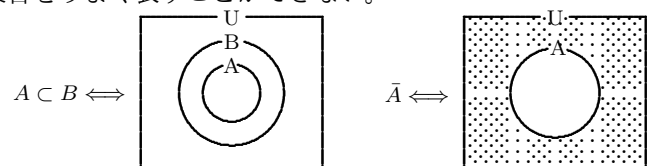
[演習] $A \cap A = A, A \cap B = B \cap A, (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$ が成り立つことを証明せよ。

積の除去則より、 $A \cap A \subset A$ また、積の導入則と $A \supset A$ より $A \subset A \cap A$ 。したがって $A \cap A = A$

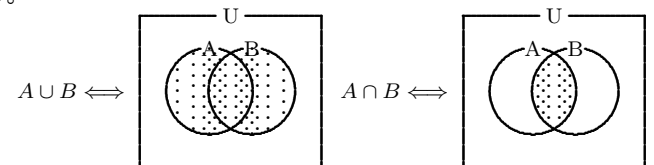
$C = A \cap B$ とおく。積の除去則より、 $C \subset A, C \subset B$ 。順序を入れ替えて、 $C \subset B, C \subset A$ 。よって積の導入則より、 $C = A \cap B \subset B \cap A$ 。同様に $B \cap A \subset A \cap B$ ゆえに、 $A \cap B = B \cap A$

$D = (A \cap B) \cap C$ とおく。積の除去則を用いると、 $D \subset A, D \subset B, D \subset C$ となる。 $D \subset B, D \subset C$ に積の導入則を適用すると、 $D \subset B \cap C$ 。 $D \subset A, D \subset B \cap C$ に積の導入則を適用すると $D \subset A \cap (B \cap C)$ となる。すなわち、 $(A \cap B) \cap C \subset A \cap (B \cap C)$ 。全く同様にして、 $A \cap (B \cap C) \subset (A \cap B) \cap C$ 。したがって、 $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

集合の範囲, 包含関係を図式化したものを一般に「ベン図」という。ただしベン図は4つ以上の集合の共通部分や和集合をうまく表すことができない。



集合の演算 $A \cup B, A \cap B$ をベン図で書くと次のようになる。



確率・統計に必要な場合の数の議論や命題論理の構成を含め、話はまだまだ続くが、複数の読者に読んで頂けるようならば、次号にでも書くかもしれない。