

高校進学に備える

中学数学基礎

2023年

「中学数学基礎」は、中学卒業時点でこれくらいは理解しておいてほしい、という視点で中学数学を整理したものです。したがって、これは受験勉強の基礎ともなります。自習教材としては教科書を一通り学習し終わった生徒を対象にしていますが、当塾では、早い生徒は中1のはじめから、遅くとも中3のはじめからこれをテキストにして学習します。

(2023.7.12 改訂 由良忠義)

名	前

概要

『中学数学基礎』の公開を始めてから三十年ほどになり、毎年改良を重ねてきた結果、少しずつ充実したものとなってきた。しかし、その間、数学をはじめとするこの国の基礎科学力は、国際比較で、一貫して後退を続け、結果として、この国の科学技術力は目も当てられないほどの後進国へと転落してしまった。その主要な原因は、生徒・学生や教育する側の努力が足りなかったのではなく、教育・学習の目標が、時代にそぐわなくなってきたからである。即ち、各種試験・各種入試などに要する「即興力」ではなく、現代が要請する主要な教育目標「知的創造的能力の育成」に焦点を当てた教育に転換してこなかったからである。

新興の科学技術力を少し伸ばした国はいくつもある。そして、それらは必ずしも「知的創造的能力の育成」のプログラムを実施しているわけではない。中等教育において、日本を遥かに凌ぐ長時間教育、一部の富裕層の子弟への徹底した学校外での受験教育をやった結果に過ぎない。この国と同様に、それらの国での人口ボーナスの恩恵は、間もなく崩れる。

この国の教育を、学力に対する意識的な転換、即ち「学力」＝「知的創造的能力」に対応した教育に全面的に転換するしか道はない。教育を授ける側も教育を受ける側も、一体となって、可能な限りこの原則の実現に努力することなくこの国の再生はあり得ない。

現状の入試は、全く学力を問うものではなく、ひたすら短時間での「処理能力」即ち「即興力」を問うものである。したがって、受験対策は全く否定的な機能しか持たない。

学習活動の勝敗は、大学・大学院、ましてや中学・高校でつくものではなく、研究・開発の現場を通してのみ決せられる。

ユークリッドは「それを学んだことによって、私にどんな得があるでしょうか」とたずねた生徒にたいして、奴隷を呼んで次のように言ったそうだ。「彼に3オボロスの小銭をおやり、彼は学んだことから利益を得なければならないのだから」と。われわれの学習の目標は、創造的な個性の獲得であり、大学合格、ましてや高校合格などでは絶対にあるえない。「短時間で解が解明済みの課題にできるだけ多く正解する」ことは、「知的創造的能力」と殆ど相関がないことが知られている。多くの場合、「知的創造的能力」の結果は、査読が確立した国際誌への科学論文の掲載である。

『中学数学基礎』は、勿論、完璧なあるいは十分に推敲したメモでもないし、また紙数の制限から随分端折っているところ、また間違っているところ、不適切なところもあるかも知れない。しかし、最初の原稿は三十年ほど前に1カ月あまりで書き上げたものだったが、塾生の協力によって毎年少しずつ改善してきた。ここに至って、中身はそれほど変わってはいないが、学習目標の明確化に伴い、その編集の大幅な転換を図らざるを得なくなった。疑問、質問、意見があれば寄せてほしい。もっと良いものになるだろう。

また、塾生用にかなり整理した演習プリントを用意している。さらに、『中学数学発展』では、集合と論理、三角関数などより進んだ議論を展開している。合わせて利用すれば、学習効果は、飛躍的に進むと期待する。ただし、これらは塾生以外には、非公開である。

繰り返すが、23年度版は、基本的には大きな変更はないが、かなり多くの点で22年度版を、意識的に「知的創造的能力」育成に向けた展開に変更した。ただし、不毛な入試が続く現状では、ある程度受験に備える機能も継続せざるを得なかった。

このテキストは、従来通り、学習塾 樽井文化センター のホームページにアップしている。

URL <http://taruibunka.la.coocan.jp>

ただし、筆者高齢化につき、突如ホームページを閉鎖せざるを得なくなる可能性もある。勿論その時でも従来通り、塾生には、最新版をプリント・略式製本し、配布を続けるつもりだ。

当塾への連絡は、とりあえず、下記の電話に直接連絡いただきたい。

電話 072-484-2295

目次

第 1 章	整数	3
1.1	文字, 記号	3
1.2	整数	3
1.2.1	素数, 素因数分解	3
1.2.2	公約数, 公倍数	6
1.2.3	整数の割り算	8
1.3	位取り記数法	14
1.4	集合の要素の数	15
1.4.1	要素の数の求め方	15
1.5	確率, 統計	19
1.5.1	確率	19
1.5.2	資料の整理	25
1.5.3	偏差値について学習しておこう	27
第 2 章	式の計算	30
2.1	計算の法則	30
2.2	色々な式	35
2.2.1	指数を含む式	35
2.2.2	比の式	35
2.2.3	大小関係…不等式	37
2.3	式の取り扱い	38
2.3.1	多項式の整理	38
2.3.2	展開, 因数分解	40
2.3.3	検算の論理	47
第 3 章	図形の基礎	49
3.1	小学校で学んだこと	49
3.1.1	長さ・距離, 角度…省略	49
3.1.2	長方形と三角形の面積	49
3.1.3	円の面積	50
3.2	作図と図形の学習法	51
3.3	直線, 平行線, 角	56
3.4	図形の移動	60
3.5	図形の合同	64
3.6	二等辺三角形, 直角三角形	66
3.7	平行四辺形	68
3.8	三角形の等積移動	70
3.9	円	71
3.9.1	円と直線, 円と円の関係	71
3.9.2	円周角	72
3.9.3	円と接線	75
3.10	相似	77
3.10.1	相似の基礎	77

3.10.2	相似の応用	80
3.11	多角形の面積	86
3.12	図形のテクニック	90
第4章	三平方の定理と平方根	95
4.1	三平方の定理	95
4.2	平方根と無理数	98
4.3	三角形	107
4.4	正多角形と円周率	111
第5章	空間図形	113
5.1	2直線, 平面	113
5.2	平面と直線	113
5.3	2平面	114
5.4	多面体, 正多面体	115
5.5	空間図形の表現, 展開図と最短距離	117
5.6	空間図形の平面による切断…延長法	119
5.7	錐体の体積	122
5.8	球の計量	123
5.9	多面体の計量	125
第6章	関数, 一次関数	130
6.1	一次関数, 直線の式	130
6.2	連立方程式	135
6.3	関数とグラフ	137
6.3.1	関数とは	137
6.3.2	グラフと連立方程式の解	139
6.4	不等式	140
6.5	一次関数の応用	143
第7章	二次関数と二次方程式	148
7.1	2乗に比例する関数	148
7.1.1	2乗に比例する関数のグラフ	148
7.1.2	2乗に比例する関数のいくつかの性質	148
7.2	二次関数	153
7.2.1	いろいろな移動	153
7.2.2	放物線	156
7.3	二次方程式	158
7.4	その他の関数	163
7.4.1	絶対値, ガウス記号を含む関数	163
7.4.2	三次関数	163
7.4.3	二次曲線	165
第8章	受験のための数学チェックポイント	167

第1章 整数

1.1 文字, 記号

数学では、日常の自然言語だけでは厳密な表現や、複雑な内容の記述ができないので、数や量、集まり、時には論理的内容、を斜体(イタリック)の文字たとえば x で表したり、明確に定義された関係を表す記号、たとえば = 等の記号を用いる。数を直接 $3, 1.5, \dots$ と書くのではなく、文字で表すようになって、はじめて数学が飛躍的に進歩するようになった、といわれている。文字や = などの記号は数学の表現手段として中心的な位置を占める。全ての科学も同様である。誤解が起これないように、意味がわかりやすいような的確な扱いが基礎である。また、このメモでは、イタリックの l は全て ℓ で表した。手書きの時誤解を避けるため、 ℓ を用いてほしい。不等号「 \leq 」などは「 \leq 」を使っても良い。数学といえども、記号は全て世界共通、というわけではない。集合の包含関係の記号 \subset などは本文の中の定義に従って欲しい。

また、同じような性質をもつ量は、たとえば a_1, a_2, a_3 などと添数 (suffix, 添え字) を下に小さくつけて表すこともある。

数が一定の順序で並んでいるとき、たとえば、

$$\frac{1}{1^2}, \frac{1}{2^2}, \frac{1}{3^2}, \frac{1}{4^2}, \dots$$

を数列という。3番目の数、という意味で $a_3 = \frac{1}{3^2}$ となる。添数は必ずしも自然数で表さねばならないのではなく、自明な順序で他の要素と区別できさえすればよい。

また、教科書では定義していない絶対値記号 $|x|$, 階乗 $n!$, ${}_n C_r$ など、必要に応じて用いる。数学にとって一番重要なことは、首尾一貫した論理で展開することである。したがって、いろいろな主張、定理、定義には多くの場合順序が重要である。しかし、このメモでは論理的矛盾がない範囲で、一部でこの順序に反すること、たとえば整数の議論のところで平方根記号 (\sqrt{x}) を用いることもある。中学数学を一体として理解するために欠かせないからだ。

1.2 整数

1.2.1 素数, 素因数分解

整数 (integer) は小学校で学んできたが、ここでは、大切なことを復習を兼ねて学習しておこう。整数は、 $\dots, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots$ の全てをいう。したがって、整数には負の整数、0、正の整数がある。正の整数を一言で自然数 (natural number) ともいう。幼児がものを数え始めると、一つ、二つ、三つ、 \dots となる。これが自然数である。0, 1, 2, 3, \dots と数えたら、その赤ちゃんは天才だそうだ。その意味で0は自然数には入れない。しかし、これは極めて重要なことだ。この節の以後の議論は、整数とは「0及び自然数」と限定して話を進める。(自然数の中に、0を含む流儀もある。間違いと言うのではなく、重要なことは首尾一貫した用語法に従うことである。)

整数 A が $A = m \times a$ (m, a は整数) と積の形に分解できるとき、 m, a は A の「約数」または「因数」と言い、 A は m, a の「倍数」と言う。 $6 = 1 \times 6 = 2 \times 3$ だから、6の約数は1, 2, 3, 6である。

しかし、たとえば $12 = 3 \times 4 = 2 \times 6 = \dots$ など因数の積で表したとき、いろいろな表現が現れる。これを統一するには、「素数」の考えが不可欠だ。

素数とは、1及びその数自身以外の約数を持たない、1より大きな自然数

と定義する。2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, ... である。1 を含まないことは重要である。そうすると、 $24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3$ と書ける。2 や 3 だけでなく、4, 6, 12 も、また 1 や 24 も約数であるが、そのうち、素数は 2, 3 だけである。約数のうち、素数であるものを「素因数」という。

$$24 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 = 2^3 \times 3$$

このように、素因数の積で表すことを「素因数分解」という。元の数に積で表したときの構成要素というような意味合いである。したがって、素因数分解とは素数の因数の積に分解することである。また、素因数分解したとき、同じ因数の積は「累乗」で表す。

$$3 \times 3 = 3^2, \quad 2 \times 2 \times 2 = 2^3$$

a^m となったときの m を「累乗の指数」という。ここでは a は自然数だが、一般には分数や小数でも、負の数でもかまわない。指数は中学では自然数だが、高校ではこれも拡張される。

素数は無限個存在する

素数 (prime number) については多くのことが知られており、また、わからない事もたくさんある。

「素数は無限個存在する」ことは次のような「背理法」で簡単に証明できる。これは、後で述べる、ギリシャ時代の『ユークリッドの原論』に書かれている。

そのために、準備として、「自然数が無数 (いくらでも大きい自然数) に存在する」ことについて、次のような「証明」を容認しよう。

任意の整数 n にたいして、となりの 1 だけ大きい整数 $n + 1$ が存在するとする。これを繰り返せば、いくらでも大きな整数が存在することになる。このことを、次のように表現する。今仮に、整数が有限個しか存在しないと、その自然数の最大値を N とする。 N は自然数だから、 $N + 1$ も自然数である。これは、 N が最大の自然数であるとした仮定に矛盾する。したがって、自然数は無数に存在する。

さて、素数が有限個 (N 個) しかないと仮定して、素数を小さい順に、

$$p_i, \quad (i = 1, 2, 3, \dots, N; N \text{ は有限の自然数を表す定数})$$

とする。そうすると $q = p_1 p_2 \cdots p_N + 1$ は p_1, p_2, \dots, p_N のいずれかを因数に持つか、素数かのいずれかである。 q は p_1, p_2, \dots, p_N のいずれで割っても余りが 1 だから、 p_1, p_2, \dots, p_N のいずれの因数も持たない。よって、 q は素数である。これは p_1, p_2, \dots, p_N のいずれとも違う数だから、素数が N 個だとする仮定に矛盾する。よって、素数は無限個存在する。

もっと簡単な証明もある。上と同じ様に p_1, p_2, \dots, p_N を定義し、 $q = p_1 p_2 \cdots p_N$ とすると、 $q - 1$ は p_1, p_2, \dots, p_N のいずれかの p_j で割り切れる。 q も p_j で割り切れるから、 $q - (q - 1) = 1$ も p_j で割り切れる。これは、 $p_j \geq 2$ に矛盾する。

「素数が無限個存在すること」の証明はいろいろあるが、このことについてはこれ以上立ち入らないで、具体的な素数の求め方を考えよう。よく知られている素数を求める方法は、「エラトステネスの篩^{ふるい}」を用いる方法である。自然数を小さい順に並べて、既知の素数の倍数を全て消す、その作業を小さい素数から順次大きい方の素数に進める、というやり方である。

自然数 97 が素数かどうかを判定するには、 $9^2 = 81, 10^2 = 100$ を考慮すると、97 が 9 以下の素数の倍数でないことを調べればよい。なぜなら、97 が 9 より大きな素数を約数に持てば、97 をその約数で割った商は 9 より小さい整数となり、97 は 9 より小さな約数を持ったことになるからだ。一般に、「 n が素数ならば、 \sqrt{n} 以下の素数を約数に持たない」となる。

いずれにしても、こうした方法で大きな素数を求めることは困難になる。さらに、非常に大きな数が、素数であるかどうかを判別するのも困難である。2005 年、特殊な形をした非常に大きな素数 $2^{30,402,457} - 1$ が発見され話題になった。2013 年には $2^{57,885,161} - 1$ が発見された。

2018 年 1 月 3 日、探査プロジェクト「GIMPS」は、「史上最大の素数を発見。50 番目となるメルセンヌ素数は、2324 万 9425 桁で、400 次詰め原稿用紙 5 万 8000 枚分」と発表した。

$$2^{77,232,917} - 1 \quad \text{だそうだ。}$$

近年の進歩は、知らない。大きな素数は「暗号化」に用いられる。

自然数 $A \geq 2$ の素因数分解 $A = x^p y^q z^r \dots$ は、かける順番を除けば一意的である。

「一意的」とは「^{いちいてき}意味や値が一つに確定しているさま」をさす日常用語であるが数学でもよく用いられる。今の場合、これはほとんど自明である。「^{じめい}自明」とは、証明や説明、解説をしなくても、それ自体ではっきりしていることをさすが、しばしば自明だと思っていることも意外と証明しようとするとなし、あるいは自明でないこともある。素因数分解に基づくあらゆる議論の背景にある基本的事項だから証明しておこう。

その前に、 $A = x^p y^q z^r \dots$ と表したときの \dots の表現は厳密な表現ではないが、添え字を増やしてわかりにくくする事を避けるための略記である。この場合はその後に 有限個 の因数が続くことを意味している。慣れてくると厳密な表記を用いた方がわかりやすくなる。

A の2通りの素因数分解があったとして、

$$(A =) p_1^{a_1} p_2^{a_2} \dots p_m^{a_m} = q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_n^{b_n}, \quad (m, n \text{ は自然数, 各 } i \text{ について, } p_i, q_i \text{ は素数, } a_i, b_i \text{ は自然数})$$

とする。 p_1 は A の約数だから、 $q_1^{b_1} q_2^{b_2} \dots q_n^{b_n}$ の約数である。したがって、 p_1 は q_1, q_2, \dots, q_n のいずれかと一致する。素数の並べ方の順序を決めておくと $p_1 = q_1$ と仮定しておくことができる。さらに、 A は $p_1^{a_1}$ で割れるので右辺を見ると、 $b_1 \geq a_1$ である。ところが、 $b_1 > a_1$ とすると、右辺は $p_1^{a_1+1}$ で割れることになり、左辺と矛盾する。したがって、 $b_1 = a_1$ となる。両辺を $p_1^{a_1}$ で割って同じ事を繰り返すと $p_2 = q_2, a_2 = b_2$ となる。これを続けていくと両辺同じ最後の素因数のところまで終了する。

整数 A が $A = x^p y^q z^r \dots$ (x, y, z, \dots はそれぞれ別の素数, p, q, r, \dots は自然数) と素因数分解されると、 A の約数は $x^i y^j z^k \dots$ ($i = 0 \sim p, j = 0 \sim q, k = 0 \sim r, \dots$) となる。したがって、

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x \\ \vdots \\ x^p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ y \\ \vdots \\ y^q \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ z \\ \vdots \\ z^r \end{pmatrix} \times \dots$$

例 $A = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
したがって、360 の約数は
 $(3+1) \times (2+1) \times (1+1) = 24$ 個

と書いたとき、各列から1つずつ選んで積をとった数はすべて A の約数である。

よって、 A の約数の個数は $(p+1)(q+1)(r+1)\dots$ となる。

これを横に並べ各数の間に $+$ を入れると

$$(1+x+\dots+x^p)(1+y+\dots+y^q)(1+z+\dots+z^r)\dots$$

となり、 A の全ての約数の和になる。

例 $A = 360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$
の約数の総和は
 $(1+2+2^2+2^3)(1+3+3^2)(1+5) = 1170$
となる。

〔例題1〕 36 を素因数分解すると、 $36 = 2^2 \times 3^2$ となります。36 の約数を表のようにすべて書くと、約数の総和は 91 と求められます。次の問いに答えなさい。

1	2	4
3	6	12
9	18	36

- (1) 432 の約数の総和を求めなさい。
- (2) 自然数 A を素因数分解したところ、 $A = 3^3 \times a^2$ となり、その約数の総和は 2280 となりました。素数 a を求めなさい。
- (3) 自然数 B を素因数分解したところ、 $B = 2^2 \times m \times n$ となり、その約数の総和は 392 となりました。素数 m, n を求めなさい。ただし、 $2 < m < n$ とします。
 - (1) について、1240, (2) について、 $(1+3+3^2+3^3)(1+a+a^2) = 2280, a = 7$
 - (3) について、 $(1+2+2^2)(1+m)(1+n) = 392$ より $(m+1)(n+1) = 56, 2 < m < n, m, n$ は素数を考慮して、 $m = 3, n = 13$

〔例題2〕 120 を素因数分解して、つぎの問いに答えなさい。

- (1) 120 の全ての (正の) 約数の積を求めなさい。
- (2) 120 の全ての “(正の) 約数の逆数” の和を求めなさい。
 - (1) 素因数分解は $120 = 2^3 \cdot 3 \cdot 5$
約数を小さい順に並べると 1, 2, 3, 4, 5, \dots , 40, 60, 120
両端から一つずつとり、その積を作ると、 $1 \times 120, 2 \times 60, 3 \times 40, \dots$
で、120 の約数の総数 16 個だから、積は 8 個できる。したがって、 120^8
 - (2) 逆数の列は $\frac{1}{1}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots, \frac{1}{40}, \frac{1}{60}, \frac{1}{120}$
これを通分すると $\frac{120}{120}, \frac{60}{120}, \frac{40}{120}, \dots, \frac{3}{120}, \frac{2}{120}, \frac{1}{120}$
これら分子は 120 の約数の全てである。120 の約数の総和は 360 だから、これらの総和は $\frac{360}{120} = 3$

〔例題 3〕 正の約数の個数が 28 個である最小の正の整数を求めよ。(08, 早稲田大・商) 大学入試問題だが、数学の強力な問題解決法(場合分け)を身につけて欲しい。略解を示す。

p, q, \dots を素数, a, b, \dots を自然数とする。各場合について、最小の組を求める。

$$(1)p^a \text{ のとき, } a = 27, p = 2, \quad 2^{27}$$

$$(2)p^a q^b \text{ のとき, } (a, b) = (1, 13), (3, 6), \quad pq^{13} \text{ のとき, } p = 3, q = 2, \quad 3 \cdot 2^{13}$$

$$(3)p^a q^b r^c \text{ のとき, } (a, b, c) = (1, 1, 6), \quad pqr^6 \text{ で, } p = 3, q = 5, r = 2, \quad 3 \cdot 5 \cdot 2^6$$

$$(4)p^a q^b r^c s^d \text{ のとき, } a, b, c, d \text{ は存在しない。5 つ以上の素数がある場合も解なし。}$$

最小のものは, $3 \cdot 5 \cdot 2^6 = 960$

〔例題 4〕 次の二つの条件を同時に満たす自然数 n の値を求めなさい。(20 年度大阪府)

$$\textcircled{1} \quad 2020 - n \text{ の値は } 93 \text{ の倍数である。}$$

$$\textcircled{2} \quad n - 780 \text{ の値は素数である。}$$

$$\textcircled{1} \text{ より, } 2020 - n = 93m \quad (m : \text{整数}) \text{ よって, } n = 2020 - 93m$$

$$\text{これを} \textcircled{2} \text{ に代入して, } n - 780 = 1240 - 93m = 31(2^3 \times 5 - 3m)$$

$$\text{これが素数となるよう } m \text{ を決めればよい。よって, } 2^3 \times 5 - 3m = 1 \quad m = 13$$

$$\text{したがって, } n = 2020 - 93 \times 13 = 811$$

1.2.2 公約数, 公倍数

整数 A, B に対して,

$$A = ma, \quad B = mb, \quad (a, b, m \text{ は整数})$$

のとき, m を「公約数」という。また公約数のうち最大のものを「最大公約数」(greatest common divisor) という。2 数の最大公約数が 1 のとき, すなわち, 1 以外の共通な因数を持たないとき, その 2 数は「互いに素」という。

したがって, 2 つの整数 A, B の最大公約数を G とすると,

$$A = Ga, \quad B = Gb, \quad (a, b \text{ は互いに素な整数})$$

となる。

2 つ整数 A, B に対して,

$$mA = nB \text{ となる整数, } (m, n \text{ は整数})$$

のことを「公倍数」という。0 以外で, 最小の公倍数を「最小公倍数」(least common multiple) という。

整数 A, B の最大公約数を G , 最小公倍数を L とすると

$$A = Ga, \quad B = Gb, \quad a, b \text{ は互いに素, } L = Gab, AB = GL \quad \text{である。}$$

が成り立つ。

A, B の最大公約数を G , 最小公倍数を L とする。このとき, $A = Ga, B = Gb$, (a, b は互いに素な自然数) であった。 L は A の倍数だから $L = mA$, (m は自然数) と表せる。 A を代入して, $L = ma \cdot G$ となるが, これが $B = b \cdot G$ の倍数であるためには ma が b の倍数でなければならない。 a, b は互いに素であるから, m が b の倍数でなければならない。その 0 ではない最小の数は $m = b$ である。よって, $L = Gab$ 。

〔例題 1〕 「和が 90 で最小公倍数が 108 である 2 つの自然数を求めよ。」

2 数を A, B , 最大公約数を G とし, $A = Ga, B = Gb$, (a, b は互いに素) とすると,

$$G(a + b) = 90, Gab = 108. G \text{ は } 90, 108 \text{ の最大公約数 } 3^2 \times 2 \text{ の約数だから, } 18, 9, 6, 3, 2, 1 \text{ が候補である。}$$

$G = 18$ のとき, $18(a + b) = 90, 18ab = 108, (a, b) = (2, 3), G = 9$ のとき, $9(a + b) = 90, 9ab = 108$, 解なし, その他も解なし。よって $G = 18$ 。したがって, 36, 54

最大公約数と公約数, 最小公倍数と公倍数には重要な関係がある。

「整数 A, B のすべての公約数は最大公約数の約数であり, すべての公倍数は最小公倍数の倍数である。」
 全ての自然数は素数の累乗の積の形で表される。したがって, $A = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n} \times x, B = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n} \times y$ (x, y は互いに素) としたとき, $G = p_1^{a_1} p_2^{a_2} \cdots p_n^{a_n}$ であり, 他の公約数 m は, $m = p_1^{b_1} p_2^{b_2} \cdots p_n^{b_n}, (b_1 \leq a_1, b_2 \leq a_2, \dots, b_n \leq a_n)$ で, m は G の約数となる。

〔例題 2〕 小学算数の復習をしておこう。

「2つの整数 24, 18 の最大公約数, 最小公倍数を求めよ。」

素因数分解を行い, 各因数を下のように並べてみる。

$$\begin{array}{r} 24 = 2^3 \times 3 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \\ 18 = 2 \times 3^2 = 2 \times 3 \times 3 \end{array}$$

最大公約数は共通な因数の積 ② × ③ = 6 であることがわかる。また最小公倍数は ② × 2 × 2 × ③ × 3 = 2³ × 3² = 72 であることがわかる。

通常, これを積み算で行う。最大公約数が既知であれば, 最初から最大公約数で割っても良い。

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \) \ 24 \ 18 \\ \underline{\textcircled{3} \) \ 12 \ 9} \\ \ 4 \ 3 \end{array}$$

最大公約数は ② × ③ = 6

最小公倍数は ② × ③ × 4 × 3 = 72

〔例題 3〕 次の通分を「例題 2 の結果を用いて行いなさい。」

$$\begin{aligned} & \frac{5}{24} + \frac{7}{18} \\ &= \frac{5 \times \boxed{3}}{24 \times \boxed{3}} + \frac{7 \times \boxed{4}}{18 \times \boxed{4}} \\ &= \frac{15}{72} + \frac{28}{72} \\ &= \frac{43}{72} \end{aligned}$$

分母 24, 18 の最小公倍数は

72 = ② × 2 × 2 × ③ × 3 である。

24 = ② × ③ × 2 × 2 だから,

72 = 24 × $\boxed{3}$

18 = ② × ③ × 3 だから,

72 = 18 × $\boxed{4}$

$\boxed{3}, \boxed{4}$ は積み算の最後の行に出ている。

〔例題 4〕 「48 と 60 の最大公約数を求め, 公約数の個数を答えよ。」

48 と 60 の最大公約数は 12 = 2² × 3。したがって公約数の数は (2 + 1) × (1 + 1) = 6 個

また, よく知っているであろう 3 つ以上の整数の最大公約数, 最小公倍数について確認しておく。「整数 A, B, C にたいして, A と B の最大公約数を g, g と C の最大公約数を G とすると, G は A, B, C の最大公約数である。」

A = ga, B = gb, a, b は互いに素, また g = Gg', C = Gc, g', c は互いに素, とすると, A = Gg'a, B = Gg'b, C = Gc となる。このとき, g'a, g'b, c の最大公約数は 1 となる。なぜなら, もし, 公約数 m (m > 1) があれば, g'a は m の倍数となるが, g' と c は互いに素だから, a が m の倍数となる。同様に b も m の倍数となり, a, b が互いに素であることに矛盾する。よって, G は A, B, C の最大公約数である。

4 つ以上の整数について最大公約数を求めるには, これを繰り返せばよい。すなわち, A, B の最大公約数と C との最大公約数を求め, それと D との最大公約数を求め, ... と続けられよい。

公約数が簡単に見つかる場合の例を見ておこう。

〔例題 5〕 小学算数の復習です。

「3つの整数 120, 168, 252 の最大公約数, 最小公倍数を求めよ。」

素因数分解を行い, 各因数を下のように並べてみる。

$$\begin{array}{r} 120 = 2^3 \times 3 \times 5 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \\ 168 = 2^3 \times 3 \times 7 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 7 \\ 252 = 2^2 \times 3^2 \times 7 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 7 \end{array}$$

最大公約数は共通な因数の積 ② × ② × ③ = 12 であることがわかる。

また最小公倍数は ② × ② × 2 × ③ × 3 × 5 × 7 = 2³ × 3² × 5 × 7 = 2520

であることがわかる。

通常, これを右のように積み算で行う。最大公約数が既知であれば,

最初から最大公約数で割っても良い。

$$\begin{array}{r} \textcircled{2} \) \ 120 \ 168 \ 252 \\ \underline{\textcircled{2} \) \ 60 \ 84 \ 126} \\ \textcircled{3} \) \ 30 \ 42 \ 63 \\ \underline{2 \) \ 10 \ 14 \ 21} \\ \underline{7 \) \ 5 \ 7 \ 21} \\ \ 5 \ 1 \ 3 \end{array}$$

〔例題 6〕 「例題 4」の結果を利用して, 次の計算を行いなさい。

$$\begin{aligned} & \frac{7}{120} + \frac{5}{168} + \frac{1}{252} \\ &= \frac{7 \times \boxed{}}{120 \times \boxed{21}} + \frac{5 \times \boxed{}}{168 \times \boxed{15}} + \frac{1 \times \boxed{}}{252 \times \boxed{10}} \\ &= \frac{\boxed{}}{2520} + \frac{\boxed{}}{2520} + \frac{\boxed{}}{2520} \\ &= \frac{\boxed{}}{\boxed{}} \quad (= \frac{29}{315}) \end{aligned}$$

120, 168, 252 の最小公倍数が, 通分の分母となるから 2520 = ② × ② × ③ × 2 × 3 × 5 × 7

120 = ② × ② × ③ × 2 × 5
だから 2520 = 120 × 3 × 7 = 120 × $\boxed{21}$

168 = ② × ② × ③ × 2 × 7
だから 2520 = 168 × 3 × 5 = 168 × $\boxed{15}$

252 = ② × ② × ③ × 3 × 7
だから 2520 = 252 × 2 × 5 = 252 × $\boxed{10}$

〔例題 7〕 3つの正の整数 $y, 54, 300$ の最大公約数が6, 最小公倍数が5400となるような y の値の個数を求めよ。(’10, 洛南高)

右の表のように, $y = 2^\ell 3^m 5^n$ とおくと, 最大公約数が6, 最小公倍数が5400となるためには, $\ell = 3, m = 1, 2, 3, n = 0, 1, 2$ である。

y	$=$	2^ℓ	\times	3^m	\times	5^n
54	$=$	2	\times	3 ³		
300	$=$	2 ²	\times	3	\times	5 ²
5400	$=$	2 ³	\times	3 ³	\times	5 ²

よって 可能な y は $1 \times 3 \times 3 = 9$ 通り。

小学生の分数計算, 整数問題の練習が不十分な人は, 当塾の小学生向けのプリントを利用して下さい。

1.2.3 整数の割り算

さて, 以上の関係をしっかりした根拠に基づいて議論するには, 整数の割り算を明確に定義しておかねばならない。整数同士の和, 差, 積は全て整数になるが, 整数 \div 整数は必ずしも整数にならないからである。整数のことを知ろうとすれば, 整数の割り算のことを知らねばならない。

整数の割り算

自然数 A, B に対して, 整数 q を商, 整数 r を余りとする。

$$A \div B = q \text{ 余り } r \quad \longleftrightarrow \quad A = qB + r, \quad (0 \leq r < B)$$

r が0のとき, 割り切れる, あるいは A は B の倍数, B は A の約数であった。

この割り算が一意的であることは周知の事実ではあるが, 本来, 全てのことは証明しておかねばならない。

以下は, 少し高度な議論を含むが, 「文字式による説明」の練習と考えると, 頑張ってみて欲しい。

まず, 簡単な例題を考えておこう。

〔例題 1〕 「 m, n を自然数とする。 m を7で割ると3あまり, $m^2 + n$ を7で割ると1余る。このとき, n を7で割るといくら余るか。(10 倉敷芸術科学大)

$m = 7k + 3$ (k は整数), $n = 7\ell + r$ (ℓ は整数) と書ける。

$$m^2 + n = (7k + 3)^2 + (7\ell + r) = 7(7k^2 + 6k + 1 + \ell) + (2 + r)$$

$m^2 + n$ を7で割ったあまりは, $2 + r$ を7で割ったあまりに等しい。

$r = 0, 1, 2, \dots, 6$ の場合, $2 + r$ を7で割ったあまりは, 2, 3, 4, 5, 6, 0, 1, あまりが1となるのは $r = 6$ のとき。

一般の整数の割り算は, $A = qB + r, (0 \leq r < |B|)$ と定義される。この節では, 議論をほんの少し簡単にするため, 整数を0と自然数(非負の整数)に制限している。

まずはじめに, 割り算の存在と一意性の証明をしておこう。 $A < B$ ならば, $q = 0, r = A$ がこれを満たす。

$A \geq B > 0$ ならば, $q = 1, 2, 3, \dots$ と増加していくと, r は $r_1 = A - B \geq 0, r_2 = A - 2B, r_3 = A - 3B, \dots$ とだんだん減少し, いくらでも r を小さくできる。従っていずれかの q で負になる。 $r_q = A - qB \geq 0, r_{q+1} = A - (q+1)B < 0$ とすると, この r_q は $0 \leq r_q < B$ をみたく。よって, 割り算における q, r が確かに存在する。

もし2つの割り算 $A = qB + r, (0 \leq r < B)$ と $A = q'B + r', (0 \leq r' < B)$ が存在していたならば, $(q - q')B = r' - r$ となるが, $r' - r < B - r \leq B$ だから, $q - q' < 1$ でなければならない。同様に $q' - q < 1$, よって $q = q'$ 。従って, $r = r'$ となる。以上で, 割り算は一意的となる。

次の例題によって, 暗黙の内に用いていることを確認しておこう。

〔例題 2〕 「 m が整数 A, B の公約数ならば, 整数 p, q にたいして, m は $pA + qB$ の約数である。」

$A = ma, B = mb$ (a, b は整数) とおけるから, $pA + qB = m(pa + qb)$ となり, m は $pA + qB$ の約数である。また, これは, 「整数 A, B が整数 m の倍数で, p, q が整数ならば, $pA + qB$ は m の倍数である」と言い換えることもできる。

〔例題 3〕 「3桁の整数について, 各桁の数の和が9の倍数ならば, その数は9の倍数である。」

これは, 例題2の応用である。

整数の百の位を a , 十の位を b , 一の位を c とすると,

$$100a + 10b + c = (99 + 1)a + (9 + 1)b + c = 9(11a + b) + (a + b + c) \text{ となる。} 11a + b \text{ は整数より,}$$

$$9(11a + b) \text{ は9の倍数。したがって, } (a + b + c) \text{ が9の倍数の時, } 100a + 10b + c \text{ は9の倍数。}$$

〔例題 4〕 「 A が B の倍数(約数)であり, かつ B が A の約数(倍数)であるならば, $A = B$ である。」

自然数 A, B に対して, $A = aB, B = bA$, a, b は自然数とする。代入すると, $A = abA$ だから,

$ab = 1$ となる。 $a \geq 1, b \geq 1$ を満たす a, b はそれぞれ 1 以外にない。よって $A = B$ 。

〔例題 5〕 「 m と n が A の約数ならば, A は m と n の公倍数である。」

m は A の約数だから, A は m の倍数である。同様に A は n の倍数である。したがって, A は, m と n の共通の倍数である。故に, A は m と n の公倍数である。

さて, すでに記した次の定理はどのように証明できるだろうか。

「2つの整数のすべての公倍数は最小公倍数の倍数である。」

A, B の最小公倍数を L , 任意の公倍数を ℓ とし, $\ell = qL + r$, ($0 \leq r < L$) とする。

L も ℓ も A の倍数だから, $L = cA, \ell = dA$, c, d は整数とおくと, $r = \ell - qL = A(d - qc)$ で, r は A の倍数となる。同様に r は B の倍数となり, r は A, B の公倍数となる。 $0 \leq r < L$ だが, もし $r \neq 0$ ならば, L より小さな正の公倍数が存在したことになり, L が正の最小の公倍数であることと矛盾する。よって $r = 0$ となる。したがって, すべての公倍数は最小公倍数の倍数である。

「2つの整数のすべての公約数は最大公約数の約数である。」

整数 A, B の最大公約数を G , 任意の公約数を g とし, G と g の最小公倍数を ℓ とすると, A は G と g の公倍数だから, ℓ の倍数である。 B についても同様だから, ℓ は A, B の公約数である。よって $\ell \leq G$ 。また, ℓ は G, g の最小公倍数だから, $G \leq \ell$ 。よって $\ell = G$ 。したがって, g は G の約数である。

また, すぐ後で述べるユークリッドの互除法の証明を先に済ませておくと, この証明の前段(「これを続けて」以降)で, A, B の任意の公約数を m とすると, m は 1 行目より r_0 の約数, 2 行目から r_1 の約数, ... となり, 結局 m は r_k の約数となる。この r_k は最大公約数だったから, 公約数は最大公約数の約数となる。

おそらく, 塾生にとって, 上 2 つの定理の証明がこのメモでの最初の壁になったのではないかと、思う。すでに上 2 つの定理は, 一つの定理として証明済みであった。したがって, これは意味のないことではないかと思われるかも知れない。しかし, 整数の性質を広い視点(整数環)で見直そうとすると, この証明は欠かすことができない。あらゆる学習の動機は, 当面の課題に答える, ということだが, それを通じて, その先に何か新しいことが開けないか, という好奇心も重要である。このメモはそうした視点で書いている。

いずれにしても, こうした議論には, 常に最大公約数を求める手続き(アルゴリズム)を持っていないければならない。

整数 A, B の公約数を m とし, $A > B$ とする。

$A = ma, B = mb, A = qB + r$, a, b, q は整数, $0 \leq r < B$

$$r = A - qB = m(a - qb)$$

となる。すなわち, A を B で割った商を q , あまりを r とすると, m は B と r の公約数でもある。同様に m は B を r で割った余りと r の公約数でもある。「ユークリッドの互除法」はこれを繰り返し利用して最大公約数を求める方法である。やり方は右の例でわかるだろう。

		例					
2	84	35	2	1	221	130	1
	70	28			130	91	
2	14	⑦		2	91	39	3
	14				78	13	
	0				⑬	0	

ユークリッドの互除法は以下のように証明できる。

自然数 $A, B (A > B$ としておく) にたいして, 一意的に $A = q_0B + r_0$, ($0 \leq r_0 < B$) が成り立つ。

$r_0 = 0$ ならば, A は B の倍数であり, 最大公約数は B である。

$r_0 \neq 0$ ならば, $B = q_1r_0 + r_1$, ($0 \leq r_1 < r_0$)

$r_1 = 0$ ならば, B は r_0 の倍数であり, A も r_0 の倍数であるだけでなく, r_0 は A, B の最大公約数でもある。

なぜなら, 最大公約数を G とすると, G は r_0 の約数であり, また r_0 は A と B の公約数であるから,

r_0 は G の約数である。したがって $r_0 = G$ となる。

$r_1 \neq 0$ ならば, $r_0 = q_2r_1 + r_2$, ($0 \leq r_2 < r_1$)

これを続けて、

$$\begin{aligned} A &= q_0 B + r_0, \quad (0 < r_0 < B) \\ B &= q_1 r_0 + r_1, \quad (0 < r_1 < r_0) \\ r_0 &= q_2 r_1 + r_2, \quad (0 < r_2 < r_1) \\ r_1 &= q_3 r_2 + r_3, \quad (0 < r_3 < r_2) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \\ r_{k-3} &= q_{k-1} r_{k-2} + r_{k-1}, \quad (0 < r_{k-1} < r_{k-2}) \\ r_{k-2} &= q_k r_{k-1} + r_k, \quad (0 < r_k < r_{k-1}) \\ r_{k-1} &= q_{k+1} r_k \end{aligned}$$

となるところで終了する。

計算の一段ごとに r_i は少なくとも 1 ずつ小さくなるから、 k は必ず有限である (およそ何回以内の操作で終了するか、の理論もある)。

下の式から順次見ていくと、 r_{k-1} は r_k の倍数、 r_{k-2} も r_k の倍数、 \dots 、 r_0 も r_k の倍数、 B も A も r_k の倍数となる。したがって、 r_k は A, B の最大公約数 G の約数である。一方、上から順次見ていくと、最大公約数 G は r_0 の約数であり、 r_1 の約数、 \dots 、 r_k の約数となる。したがって $G = r_k$ である。

〔演習 1〕 次の各組の最大公約数を求めよ。

$$(138, 114) \cdots 6, (323, 437) \cdots 19, (667, 203) \cdots 29, (527, 1517) \cdots 1$$

〔演習 2〕 $(104, 156, 234)$ の最大公約数を求めよ。

$$(104, 156) \text{ の最大公約数は互除法で } 52, (52, 234) \text{ の最大公約数は } 26. \text{ よって最大公約数は } 26$$

〔演習 3〕 $\frac{5}{1147} - \frac{6}{1517}$ を計算せよ。 $\left(\frac{19}{47027}\right)$

ユークリッドの互除法の証明の過程で、次の重要な定理が見えてくる。

ベズーの等式

整数 A, B の最大公約数を G とすると、整数 p, q が存在して、 $pA + qB = G$ とすることができる。

互除法の証明で、下から 2 番目の式で r_k を r_{k-1}, r_{k-2} で表し、その r_{k-1} に下から 3 番目の式から r_{k-2}, r_{k-3} だけで表した式を代入し、 r_k を r_{k-2}, r_{k-3} だけで表す。順次これを行って、 r_k は B と A だけの一次結合で表すことができ、しかも、係数は全て整数となる。したがって、 $r_k = pA + qB$ 、 p, q は整数となる。こうした証明を「構成的な証明」と言い、この証明を後で活用する。

従来、「数学の視点」(上野健爾著)の「非構成的な証明」も示していたが、23 年版から、これを「新体系・高校数学の教科書 上」(芳沢光雄著)の以下の「非構成的な証明」に変更した。

互いに素な自然数 A, B に対して、 $pA + qB = 1$ となる整数 p, q が存在する、ことを証明する。

$pA + qB$ は、 p, q によって値が変わるが、その中で、正の最小値 d_0 、その時の p, q を p_0, q_0 とおく。

$p_0 A + q_0 B = d_0$ 。 A を d_0 で割った商を A' 、余りを r 、 B を d_0 で割った商を B' 、余りを s とする。

$A = A'd_0 + r (0 \leq r < d_0)$ 、 $B = B'd_0 + s (0 \leq s < d_0)$ より

$$r = A - A'd_0 = A - A'(p_0 A + q_0 B) = A(1 - p_0 A') - Bq_0 A' \cdots \textcircled{1}$$

$$s = B - B'd_0 = B - B'(p_0 A + q_0 B) = B(1 - q_0 B') - Ap_0 B' \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ は $pA + qB$ の形で、 $r > 0$ ならば $r \geq d_0$ 、 $s > 0$ ならば $s \geq d_0$ 。したがって、 $r = 0, s = 0$ 。よって、 d_0 は A と B の公約数である。 A と B は互いに素だから、 $d_0 = 1$ 。

A, B が互いに素の時は $G = 1$ だから、このとき、 $pA + qB = 1$ となる。さらに、互いに素な 2 整数 A, B に対して、 p, q を求めるには、互除法を逆にたどればよいこともわかる。

〔例題 6〕 つぎの各等式が成り立つような整数の組 (m, n) を求めよ。

(1) $272m + 119n = 17$

$A = 272, B = 119$ の最大公約数を求めてみる。

(1)	$A = q_0 B + r_0$	$272 = 2 \times 119 + 34$
(2)	$B = q_1 r_0 + r_1$	$119 = 3 \times 34 + 17$
(3)	$r_0 = q_2 r_1$	$34 = 2 \times 17$

これより、 A, B の最大公約数は $r_1 = 17$ であることがわかる。

(2) より、 $r_1 = B - q_1 r_0 = B - q_1(A - q_0 B) = -q_1 A + (1 + q_1 q_0)B = -3A + 7B$ である。よって、 $m = -3, n = 7$

(2) $19m + 12n = 1$

$A = 19, B = 12$ の最大公約数を求めてみる。

(1)	$A = q_0 B + r_0$	$19 = 1 \times 12 + 7$
(2)	$B = q_1 r_0 + r_1$	$12 = 1 \times 7 + 5$
(3)	$r_0 = q_2 r_1 + r_2$	$7 = 1 \times 5 + 2$
(4)	$r_1 = q_3 r_2 + r_3$	$5 = 2 \times 2 + 1$

これより、 A, B の最大公約数は $r_3 = 1$ 、すなわち A, B は互いに素である。

(4) より、 $r_3 = r_1 - q_3 r_2 = r_1 - 2(r_0 - q_2 r_1) = -2r_0 + (1 + 2 \times 1)r_1 = -2r_0 + 3(B - q_1 r_0) = 3B - (2 + 3 \times 1)r_0 = 3B - 5(A - q_0 B) = 3B - 5(A - 1 \times B) = -5A + 8B$ である。よって、 $m = -5, n = 8$

(3) 右辺が A, B の最大公約数の整数倍のとき、たとえば、 $272m + 119n = 34$ のとき

あらかじめ, $272m' + 119n' = 17$ の解 $m' = -3, n' = 7$ を求めておき, $m = 2 \times m', n = 2 \times n'$ とすればよい。
 また, A, B が互いに素の場合, 右辺はどんな整数であっても, たとえば, $19m + 12n = 13$ の解は求まる。
 右辺が $A = 272, B = 119$ の最大公約数の倍数でない場合, たとえば, $272m + 119n = 6$ などの解は存在しない。

以上の議論は「存在の定理」についてである。ここまで学習してきた読者は、「一意性」についての議論の進め方はすぐ思いつくであろう。

一般に, 整数 A, B, C が与えられたとき, $pA + qB = C$ となる整数組 (p, q) , のほかに, 別の組 (p', q') があつたとする。すなわち,

$$pA + qB = C, p'A + q'B = C \text{ とする。このとき, } (p' - p)A + (q' - q)B = 0$$

したがって, $mA + nB = 0$ を満たす任意の整数の組 (m, n) (m, n は無数に存在する) に対して, $(p+m, q+n)$ も $pA + qB = C$ の解となる。したがって, 解は一意的ではないが, その差は (m, n) で表される量だけである。

上のことを利用すると, $pA + qB = C$ となる整数の組 (p_0, q_0) を求める“うまくない”方法がでてくる。ただし, C はあらかじめ, A, B の最小公倍数で割ったときの余りの形になっていたとする。

A, B の最大公約数を G とし, $A = GA', B = GB'$ とする。 $pA + qB$ の値は, (p_0, q_0) と $(p, q) = (p_0 + kB', q_0 - kA')$, (k は任意の整数) で同じとなる, すなわち, p は B' , q は $-A'$ 増えるごとに同じ値になる。したがって, まず, $p = 0$ で q を計算し, 整数かどうかを調べる。そうでなかったら, $p = 1$ で同じ計算をして, q が整数かどうかを調べる。これをくりかえし, $p = B' - 1$ までのいずれかで, 必ずそれに対応した整数の q が見つかる。これが解である。

〔例題 7〕 つぎの等式が成り立つような, 整数の組 (a, b) を求めよ。ただし, a は 34 より大きい自然数, b は 32 より小さい自然数である。 $20a + 33b = 1085$ (15 大阪後期改)

20, 33 は互いに素より, $20p + 33q = 1$ を互除法で解いて, $p = 5, q = -3$ をえる。したがって, $20a + 33b = 1085$ の 1 つの解は, $a = 5 \times 1085 = 5425, b = -3 \times 1085 = -3255$ となる。 a は $a - 33k, b$ は $b + 20k$ だけずらして, a, b の範囲の条件に合うように整数 k を選ぶ。 $a > 0$ の範囲で最小となる a のとき, $k = 164$ で, $a = 13, b = 25$ となるが, これは, $a > 32$ に反する。 $k = 163$ である。よって, $20 \times 46 + 33 \times 5 = 1085$ となる。 $a = 46, b = 5$ 。

もちろん, 上の例題は, もっと簡単に解ける。20 と 1085 の最大公約数が 5 だから, $33b$ は 5 の倍数, したがって, b も 5 の倍数で, $b = 5b' < 32$ とおく。問題は, $4a + 33b' = 217, b' \leq 6, a > 34$ となる。 b' は奇数だから, $b' = 5, 3, 1$ のいずれかで, $b' = 1$, よって, $a = 46, b = 5$ となる。

さらに, 整数の性質など殆ど勉強しなくても, $a = \frac{1085 - 33b}{20} > 34$ より, $b \leq 12$ だから, $b = 1, 2, \dots, 12$ を順次代入して, $b = 5, a = 46$ を得ることもできる。

〔演習 1〕 つぎの等式を満たす整数の組 (p, q) が存在しないことを証明せよ。

$$222p + 282q = 46$$

〔演習 2〕 つぎの等式が成り立つような, 整数の組 (p, q) を求めよ。ただし, p, q は, 正あるいは負の 2 桁の整数とする。 $158p + 130q = 2018$ 答え $(p, q) = (86, -89), (21, -10), (-44, 69)$

〔演習 3〕 つぎの等式が成り立つような, 一つの整数の組 (p, q) を求めよ。

$$2023 \text{ 年 } 2 \text{ 月, } 3 \text{ 月入試対策問題 } 4097p + 3791q = 2023$$

(一般解 $p = 223n + 19, q = -241n - 20, n$: 整数)

$$2024 \text{ 年 } 2 \text{ 月, } 3 \text{ 月入試対策問題}$$

$$\text{(簡単)} \quad 3256p + 3608q = 2024$$

$$\text{(複雑)} \quad 3064p + 2776q = 2024$$

(一般解 $p = 41n + 25, q = -37n - 22, n$: 整数) (一般解 $p = 347n + 248, q = -383n - 273, n$: 整数)

計算知能“WolframAlpha”は極めて優秀である。たとえば「solve indeterminate equation $760p + 620q = 2020$ 」と入力すれば, 一般解「 $p = 31n + 10, q = -38n - 9, n$ は整数」を答えてくれる。しかしこうした課題の「構造」を理解するため, 自力で一般解を求めておこう。(indeterminate equation : 不定方程式)

定理「 A, B が互いに素の時, $pA + qB = 1$ となる p, q が存在する。」は, A, B が互いに素, ということの便利な表現と見なすことができる。たとえば, (A, B) の最小公倍数 L , 最大公約数 G のとき, $GL = AB$ などの証明のところで) 互いに素な整数の性質,

「整数 A , 互いに素な整数 B と C について, AB が C の倍数ならば, A は C の倍数である。」を簡単に証明できる。

B, C は互いに素だから、 $pB + qC = 1$ となる整数 (p, q) が存在する。両辺に A をかけて、 $A = pAB + qAC$ 。 pAB, qAC は C の倍数だから、 A も C の倍数となる。

その他、整数の議論を行うとき必要な多くの性質（ユークリッドの『原論』には多数掲載されている）に適用できる。

「 A, B がともに C に対して互いに素であれば、 AB も C と互いに素である。」

整数 p, q, p', q' が存在し、 $pA + qC = 1$ 、したがって、 $B = pAB + qCB$ 。これを $p'B + q'C = 1$ に代入して、

$$pp'AB + (Bqp' + q')C = 1 \quad \text{よって、} AB \text{ と } C \text{ は互いに素。}$$

「整数 A, B 、素数 x について、

AB が x の倍数ならば、 A, B のうち少なくとも一方は x の倍数である。」

AB が x の倍数であり、 A も B も x の倍数でないと仮定する。

x は素数だから、 x の約数は 1 と x だけである。したがって、 A が x の倍数でないということは、 A と x は互いに素を意味する。よって、 $pA + qx = 1$ となる整数 (p, q) が存在する。両辺に B をかけて、 $B = pAB + qBx$ 。

これより、 AB は x の倍数だから、右辺は x の倍数となり、 B は x の倍数となる。これは仮定に反し、 A, B のうち少なくとも一方は x の倍数となる。

これを2度適用して、3整数の積が素数 x の倍数ならば、少なくともその一つの整数は x の倍数となる。またこの性質を繰り返し利用すると、

「整数 A, n 、素数 x について、 A^n が x の倍数であれば、 A は x の倍数である。」 が導かれる。

(適用例：背理法によって $\sqrt{2}$ が無理数であることの証明)

「整数 A, B が互いに素であれば、 A^m, B^n (m, n は任意の自然数) は互いに素となる。」

$pA + qB = 1$ となる整数 p, q が存在する。 $pA = -qB + 1$ の両辺を m 乗すると、

$$p^m A^m = \{(-q)^m B^{m-1} + m(-q)^{m-1} B^{m-2} + \dots + m(-q)\} B + 1$$

となる。したがって、 $p^m A^m + q^m B = 1$ (p, q は整数) となり、 A^m と B は互いに素である。

したがって、改めて、 $p'A^m + q'B = 1$ とおくと、 $q'B = -p'A^m + 1$ となる。両辺を n 乗して、同様にして、 B^n と A^m は互いに素となる。

整数の応用には、「不定方程式」(indeterminate equation) への適用がある。一般に、等式の数が未知数の数より少ないとき、解は無数に存在するが、そこに「未知数は整数」などの条件を付けて、解を有限個にすることがある。これを例題で考えておこう。

[例題 8] 「等式 $xy - x + y = 5$ を満たす自然数の組 (x, y) を全てとめよ。」

$$(x+1)(y-1) = 4, \quad x, y \text{ は自然数より, } x+1 \geq 2, y-1 \geq 0 \text{ だから, } (x+1, y-1) = (4, 1), (2, 2).$$

したがって、 $(3, 2), (1, 3)$

[問題] 方程式 $3xy + 3x + y = 5$ を満たす2つの整数 x, y の組を全て求めよ。(10 倉敷芸術科学大)

$$(3x+1)(y+1) = 6, \quad 3x+1 \text{ は } -2 \text{ と } 1 \text{ のみ。} (x, y) = (-1, -4) \text{ と } (x, y) = (0, 5)$$

[問題] 「 $xy^2 - x - 3y^2 - 12 = 0$ を満たす正の整数 x, y の組 (x, y) を全て求めよ。」

$$(x-3)(y+1)(y-1) = 15, \quad x \geq 4, y \geq 2 \text{ を考慮すると, } (x, y) = (4, 4), (8, 2)$$

[例題 9] 「 $x^2 - 4xy - 8yz - 4z^2$ を因数分解すると \square となり、 $x^2 - 4xy - 8yz - 4z^2 = 1, x + 2y + z = 8$ を同時に満たす整数 x, y, z の組を求めると、 $(x, y, z) = (\square, \square, \square)$ となる。」

$$(x+2z)(x-4y-2z). \quad y, z, x+2z, x-4y-2z, 8-2y-z \text{ が整数の時, } x \text{ は自動的に整数となり}$$

$$(x+2z)(x-4y-2z) = 1 \text{ に } x = 8 - 2y - z \text{ を代入して, } (8 - 2y + z)(8 - 6y - 3z) = 1 \text{ したがって,}$$

$$(8 - 2y + z, 8 - 6y - 3z) = (1, 1), (-1, -1). \text{ 整数の組は } (5, 3, -3).$$

[例題 10] 「10進法で表された6けたの自然数 $abcdef$ と $bcdefa$ の比は 3:2 である。

(1) 5桁の自然数 $bcdef$ を K とおくと、 K を a を用いて表せ。

(2) 自然数 $abcdef$ をすべて求めよ。」

$abcdef = x, bcdefa = y$ とおくと、 $x = 10^5 a + 10^4 b + 10^3 c + 10^2 d + 10e + f, y = 10^5 b + 10^4 c + 10^3 d + 10^2 e + 10f + a$ となり、 $y = 10K + a, K = x - 10^5 a$ となる。したがって、 $x : y = (K + 10^5 a) : (10K + a) = 3 : 2$ これより、 $K = \frac{2 \times 10^5 - 3}{28} a = \frac{28571}{4} \times a$ 。 a は一桁の偶数より、 $a = 4, 8$ 。したがって、 x は、 $428571, 857142$

整数の議論はあらゆる数学の分野に関わるだけでなく、数学の基礎に関わる重要な課題が無限に広がる。三平方の定理のところも参照して欲しい。議論をここでうち切り、基本の練習問題で頭を鍛えておく。

- 1 次各組の最大公約数を求めよ。
 $(493, 1073) \cdots 29$
 $(2 \times 3 \times 5, 2^2 \times 5, 2^3 \times 3 \times 5) \cdots 10$
- 2 次各組の最小公倍数を求めよ。
 $(1029, 413) \cdots 60711$
 $(54, 24, 36) \cdots 216$
 $(2^2 \times 3 \times 5, 2^3 \times 3 \times 5^2, 2 \times 3 \times 5^3) \cdots 3000$
- 3 48 を自然数 N で割ると、商と余りが等しくなった。全ての N を求めよ。(47, 23, 15, 11, 7)
- 4 4 で割っても、6 で割っても 2 余る 3 桁の自然数のうち、もっとも小さい数を求めよ。(110)
- 5 100 から 200 までの自然数のうち、7 の倍数であり、かつ 4 の倍数である数はいくつ。(4 つ)
- 6 和が 90 で最小公倍数が 108 である 2 つの自然数をもとめよ。(ヒント: G は 90, 108 の公約数、すなわち 18 の約数、18 のみに対応) (36, 54)
- 7 分母、分子の差が 18 で、約分すると $\frac{16}{13}$ となる分数の分子はいくらか。(ヒント: $\frac{A+18}{A} = \frac{16}{13}$) (96)
- 8 5 で割ったときのあまりが 4 となる正の数と、あまりが 1 となる正の数がある。この 2 つの整数の積を 5 で割ったときのあまりを求めよ。
 (ヒント: $A = 5a + 4, B = 5b + 1$) (4)

以下は 2011 年以前だが比較的新しい入試問題である。それに答えておこう。

- 1 「正の整数 n に対して、 $M = (2n+3)^2 + (2n+5)^2 + (2n+7)^2 - 11$ とする。
 (1) M を 24 で割った余りをもとめよ。
 (2) n が 1000 以下の正の整数であるとき、 M が 60 の倍数となる n は何個あるか、その個数を求めよ。」(東大寺学園高)
 (1) について、 $M = 12n^2 + 60n + 72 = 12(n^2 + 5n + 6) = 12(n+3)(n+2)$ だから、 M は 12 の倍数、しかも $(n+3)(n+2)$ は連続整数の積だから 2 の倍数、したがって、24 の倍数である。
 (2) について、 M が 60 の倍数になるためには $(n+3)(n+2)$ が 5 の倍数であればよい。
 $n = 2, 3, 7, 8, 12, 13, \dots, 997, 998$ 。したがって、4 0 0 個
- 2 「5000 を自然数 n で割るとあまりが商の半分である。これを満たす自然数 n をすべてもとめよ。」(履正社高)
 $5000 = 2^3 \times 5^4$ だから、余りを a とすると、 $2^3 \times 5^4 = 2a \times n + a = a(2n+1)$ 、 $n > a$
 $2n+1$ は奇数だから $a = 2^3, 2^3 \times 5$ だけである。
 $a = 2^3$ のとき、 $2n+1 = 5^4$ 、 $n = 312$ 、 $a = 2^3 \times 5$ のとき、 $2n+1 = 5^3$ 、 $n = 62$
 よって $n = 312, 62$
- 3 「記号 $\{x\}$ は数 x の小数第一位を四捨五入した整数を表す。たとえば、 $\{12.3\} = 12$ 、 $\{12.5\} = 13$ である。このとき、次の問いに答えよ。
 (1) $\{\frac{n-m}{3}\} \times \{\frac{n+m}{3}\} = 11$ を満たす整数 m, n の組は全部で何組あるか。ただし、 $0 < m \leq n$ とする。
 (2) $2004 = 200 \times 10 + 4$ のように、全ての自然数は $10a+b$ (a, b は整数) の形にあらわすことができる。 $\{\frac{n}{10}\} + \{\frac{n}{5}\} = 12345$ を満たす整数 n を全て求めよ。」(清風南海改)
 (1) について、 $11 = 1 \times 11$ より、 $0.5 \leq \frac{n-m}{3} < 1.5$ 、 $10.5 \leq \frac{n+m}{3} < 11.5$ 、したがって、 $n-m = 2, 3, 4$ 、 $n+m = 32, 33, 34$ 、ところが、 $n-m, n+m$ の偶数、奇数である性質は同じ。よって、整数の組は 5 組
 (2) について、 $\{\frac{10a+b}{10}\} + \{\frac{10a+b}{5}\} = 12345$ 、 $0 \leq b \leq 9$ 。これより $3a + \{\frac{b}{10}\} + \{\frac{b}{5}\} = 12345$
 $b = 0, 1, 2$ のとき、 $a=4115$ 、 $b = 8, 9$ のとき、 $a=4114$
 したがって、 $n = 41150, 41151, 41152, 41148, 41149$
 [問題] 自然数 n について、 n 以下の自然数で n との最大公約数が 1 となる自然数の個数を $\langle n \rangle$ で表すことにする。たとえば、10 以下の自然数で 10 との最大公約数が 1 となる自然数は、1, 3, 7, 9 の 4 個あるので $\langle 10 \rangle = 4$ となる。また、 $\langle 1 \rangle = 1$ である。次の各問いに答えなさい。(清風南海高)
 (1) $\langle 21 \rangle$ を求めなさい。
 (2) p を素数とすると、 $\langle p \rangle$ を p で表しなさい。
 (3) p を 5 でない素数とすると、 $\langle 5p \rangle$ を p を用いて表しなさい。
 (4) 2 つの素数 p, q が $\langle pq \rangle = 24$ を満たすとき、組 (p, q) を全て求めなさい。ただし、 $p < q$ とする。
 (1) 12 (2) $p-1$ (3) 1 から $5p-1$ で、5 の倍数は $(p-1)$ 個、 p の倍数が $5-1=4$ 個、5 と p の公倍数は なし。 $\langle 5p \rangle = (5p-1) - (p-1) - 4 = 4p-4$ 個
 (4) $(pq-1) - (p-1) - (q-1) = (p-1)(q-1) = 24$ 、 $p < q$ より、 $(p-1, q-1) = (1, 24), (2, 12), (3, 8), (4, 6)$ 。
 p, q が素数となるのは $(p, q) = (3, 13), (5, 7)$
- 4 「 n を自然数とする。 $\frac{1}{n}$ を小数で表したとき有限小数(小数第何位かで終わる小数)となるものを考える。 n が 2 以上 200 以下の自然数であるとき、 $\frac{1}{n}$ が有限小数となる n は何個あるか。」(甲陽学院高)
 $2 \leq 2^x 5^y \leq 200$ 、 $x, y = 0, 1, 2, \dots$ となる整数 x, y の組を数えればよい。
 $y = 0$ のとき、 $x = 1, 2, \dots, 7$ の 7 組、 $y = 1$ のとき、 $x = 0, 1, 2, \dots, 5$ の 5 組、
 $y = 2$ のとき、 $x = 0, 1, 2, 3$ の 4 組、 $y = 3$ のとき、 $x = 0$ の 1 組 合計 18 個
- 5 「記号 $[x]$ は x を越えない最大の整数を表す。たとえば、 $[3.5] = 3$ 、 $[2] = 2$ 、 $[-1.2] = -2$ である。
 このとき、 $\left[\left(\frac{x-1}{2} \right)^2 \right] = \frac{x}{2} + 3$ を満たす x は である。」(大阪星光学院高 1 次)
 何処で取り上げるべき問題か明確ではないが、簡単に答えておこう。
 とりあえず左辺は整数だから、右辺も整数になるためには x は 2 の倍数。 $x = 2n$ 、 n は整数とする。代入して、 $n^2 - 2n - 3 = 0$ 、 $n = -1, 3$ となる。よって、 $x = -2, 6$
- 6 $m^2 + 4mn + 4n^2 - 36$ を因数分解すると である。また、 $m^2 + 4mn + 4n^2 - 36$ が素数となるような自然数 m, n の組を全て求めると、 $(m, n) =$ である。(大阪星光学園 '10)
 因数分解は $(m+2n+6)(m+2n-6)$ で、積が素数になるためには、一方は 1、他方は素数でなければならない。 $m+2n+6$ が 1 だとすると、 $m+2n = -5$ で m, n が自然数であることに反する。したがって、 $m+2n-6 = 1$ 、 $m+2n = 7$ これを満たす自然数は $(m, n) = (1, 3), (3, 2), (5, 1)$

7 次の各問いに答えよ。(清風南海高 '10)

- (1) 2009 を素因数分解しなさい。
 (2) a, b は自然数で、いずれも 7 の倍数であるとする。 $a^2 + b^2 = 2009$ をみたす $a, b (a \leq b)$ を 1 組求めなさい。
 (3) l, m, n は自然数で、いずれも 7 の倍数であるとする。 $l^2 + m^2 + n^2 = 2009$ をみたす $l, m, n (l \leq m \leq n)$ を 1 組求めなさい
 (4) p, q, r, s, t は自然数で、いずれも 7 の倍数であるとする。 $p^2 + q^2 + r^2 + s^2 + t^2 = 2009$ をみたす $p, q, r, s, t (p \leq q \leq r \leq s \leq t)$ を 1 組もとめなさい。
 いずれも簡単だから、答えだけを示す。ただし、一度は自分でやっておく方が、テストで、あわてなくて良い。(1) $7^2 \times 41$
 (2) $a = 28, b = 35, (3) l = 7, m = 14, n = 12$ (4) $p = 7, q = 14, r = 14, s = 28, t = 28$ (または $p = 14, q = 14, r = 14, s = 14, t = 35$)

こうした問題は、最近でも出題されている。

1 m, n を 2 桁の自然数とすると、 $m^2 + 610^2 = n^2 + 611^2$ を満たす m, n の値をそれぞれ求めなさい。(大阪府前期 '15)
 簡単だから、解説は要らないだろう。 $m = 61, n = 50$

2 $f(x) = x^3 + 2x^2 + 2$ とする。 $|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる整数 n をすべて求めよ。(京都大学 '19)
 [解答例、駿台予備校] 条件「 $|f(n)|$ と $|f(n+1)|$ がともに素数となる」を条件 (A) とする。
 $f(n) = n^3 + 2(n^2 + 1)$ より、 $f(n)$ と n^3 の偶奇は一致する。
 よって、 $f(n)$ と $f(n+1)$ の偶奇は異なるので、 $|f(n)|, |f(n+1)|$ のいずれかは偶数となる。偶数の素数は 2 のみなので、条件 (A) を満たすには、 $|f(n)| = 2$ または $|f(n+1)| = 2$ であることが必要である。
 $|f(n)| = 2$ となる整数 n は (I) $n^3 + 2n^2 + 2 = 2$ より、 $n^2(n+2) = 0 \therefore n = 0, -2$
 (II) $n^3 + 2n^2 + 2 = -2$ より、 $n^2(-n-2) = 4$ これを満たす整数 n は 4 の約数、
 つまり $n = \pm 1, \pm 2$ であるが、いずれも満たさない。
 よって、 $|f(n)| = 2$ となる整数 n は、 $n = 0, -2$ のときのみ。
 また、 $|f(n+1)| = 2$ となる整数 n は、同様にして $n+1 = 0, -2$ 、つまり $n = -1, -3$
 $f(-3) = -7, f(-2) = 2, f(-1) = 3, f(0) = 2, f(1) = 5$ より、 $n = -3, -2, -1, 0$ いずれの場合も条件 (A) を満たす。
 以上より、求める整数は $n = -3, -2, -1, 0$

整数問題は、見かけによらず一般に、多様で高度な技能を要する難問が多い。慎重に学力をつける知恵を持たねばならない。

1.3 位取り記数法

私たちは、日常、数の表現に十進数を用いている。たとえば

$$2345 = 2 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5 \times 1$$

という書き方である。各数字にはそれぞれ位くらいがあり、その位の数がいくらかということを示して一つの数を表現する。たとえばマラソンの記録が 2 時間 23 分 5 秒というのは、時の位が 2 であり、分の位が 23、秒の位が 5 という意味である。面倒だからこれを $2^{\circ} 23' 05''$ などと書くこともある。書き方は自由だ。単に 22305 と書いても誤解は起こらない。それは各数字の位置で位が約束されているからだ。60 秒で 1 分だから 85 秒は 1 分 25 秒などと必ず上の位にその一部を移して表さねばならない。秒から分へ、分から時へ桁上がりは 60 倍ずつである。したがって、時間は 60 進数ということが出来る。ただし、時間から日は 24 時間、だいたい 365 日が 1 年だからここらも違うが。

コンピュータの世界では、2 進数、16 進数がよく用いられる。電気的信号が ON か OFF かがもっとも基本となり、2 進数はこれを並べたもので情報を表現する。ON を 1、OFF を 0 と表すと、たとえば

$$1001101_{(2)} = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 0 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 = 77_{(10)}$$

となる。通常十進数を用いるから、混乱が予想されない限り $77_{(10)} = 77$ と表す。

整数の十進数から二進数への変換は次のように、2 で割ったあまりを記すという方法で行うことができる。

$26_{(10)}$	=	$11010_{(2)}$	$94_{(10)}$	=	$1011110_{(2)}$	$107_{(10)}$	=	$1101011_{(2)}$
13	...	0	47	...	0	53	...	1
6	...	1	23	...	1	26	...	1
3	...	0	11	...	1	13	...	0
1	...	1	5	...	1	6	...	1
			2	...	1	3	...	0
			1	...	0	1	...	1

また小数の場合、たとえば

$$0.390625_{(10)} = 0.011001_{(2)}$$

$$= 0 \times 2^{-1} + 1 \times 2^{-2} + 1 \times 2^{-3} + 0 \times 2^{-4} + 0 \times 2^{-5} + 1 \times 2^{-6}$$

である。

したがって、1 未満の正の 10 進小数を 2 進小数に変換するには、次のような手続きが可能である。

例.

$$0.390625_{(10)} = 0.011001_{(2)}$$

⑦.781250

①.562500

①.125000

⑦.250000

⑦.500000

①.000000

(1) 2 を掛けて整数 1 が現れたら①を,0 ならば②をその桁の 2 進数字とし, その後その整数部を 0 とする。

(2) これを小数第 1 位から順に必要な桁まで行う。

したがって, 一般の小数は, たとえば

$$\begin{aligned} 26.390625_{(10)} &= 26_{(10)} + 0.390625_{(10)} = 11010_{(2)} + 0.011001_{(2)} \\ &= 11010.011001_{(2)} = 1.1010011001_{(2)} \times 2^4 \end{aligned}$$

となる。

こうして, 各位を定めて数表現することを くらいどりきすうほう 位取り記数法 という。

さて, 約数, 倍数という議論はどの位取り記数法を用いるかに関わらず成り立つ議論である。十進数という条件はどこにも使っていない。数学のほとんど全ては位取り記数法とは独立な(無関係な)内容を議論する。しかし, 全てのテーマが位取り記数法と無関係かというところではなく, 十進数や二進数に結びついた課題も無数にある。

- (1) 整数の各桁の和が 3 の倍数ならば, 元の整数は三の倍数である。
- (2) 整数とその各桁の順序を入れ替えてできる整数との差は 9 の倍数である。
- (3) 2^n と n 桁以内の正の二進数との差は各桁の反転 (0 と 1 とを入れ替える) して 1 を加えておけばよい。

位取り記数法は当面教科書から消えている。時期を見て, もう少し詳しく説明する。

1.4 集合の要素の数

1.4.1 要素の数の求め方

集合の要素の個数の求めかたは, 「中学数学発展」の「集合と論理」を参照して下さい。そこには, 以下の公式が証明されています。

集合の要素の個数を求めるには次の公式が役立つ。

- (1) $n(\bar{A}) = n(U) - n(A)$
- (2) $A \cap B = \phi$ のとき, $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$
- (3) $n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$
- (4) $n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(B \cap C) - n(C \cap A) + n(A \cap B \cap C)$
- (5) $n(A \cap \overline{B \cup C}) = n(A) - n(A \cap B) - n(A \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

しかし, これは, ベン図で明らかであり, 実用的には, これらの公式を意識しないで, 場合の数を求めることができる (4 つ以上の部分集合のベン図も考案されている)。

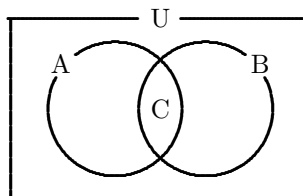
ここでは, これを具体的な例で考える。

[例題 1] 「1 から 200 の整数について, 次の個数をもとめよ。

(1) 3 かつ 4 の倍数の個数 (2) 3 または 4 の倍数の個数 (3) 4 または 51 の倍数の個数」

はじめに全体の集まり (U , 全体集合) を明確にする。つづいて, U に含まれるそれぞれの関係する集まりを明確にし, ベン図に表す。

名前 (定義)	個数
U (1 ~ 200 までの整数)	... 200
A (3 の倍数)	... 66
B (4 倍数)	... 50
C (12 の倍数)	... 16
D (51 の倍数)	... 3



- (1) 3 かつ 4 の倍数とは, その最小公倍数 12 の倍数であるから, 集まり C 自身であり, 16 個
 - (2) 3 または 4 の倍数とは, 図で A の部分と B の部分を合わせた部分だから, $66 + 50 - 16 = 100$ 個
 - (3) 51 の倍数は 51, 102, 153 のみでいずれも 4 の倍数でないから, 4 または 51 の倍数とは B の集まりと, 51 の倍数の 3 個だけである。したがって, $50 + 3 = 53$ 個
- 基本の分類が 3 種類となると少し複雑になる。次の例はある大学の入試問題に出され, 問題集にもよく出てくる問題である。

[例題 2] 「2 桁の自然数の中で, 十の位, 一の位の少なくとも一方が偶数であるものはいくつあ

るか。」

全体集合 U を 2桁の自然数とし、十の位、一の位との少なくとも一方が偶数の集合を A とする。このとき、 \bar{A} は十の位と一の位がともに奇数である数の集合となるから、

$$n(U) = 90, \quad n(\bar{A}) = 5 \times 5$$

したがって、

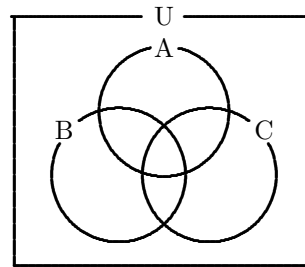
$$n(A) = n(U) - n(\bar{A}) = 90 - 25 = 65$$

〔例題 3〕 「 集団検診で A, B, C の 3種の検査を行った。総人員 83 人中、 A 検査に 55 人、 B 検査に 60 人、 C 検査に 58 人が合格したが、これらのうち、 C, A 両検査に 42 人、 A, B 両検査に 41 人、 B, C 両検査に 45 人が合格した。3 検査のいずれにも合格しなかった人は 6 人だった。3 種の検査とも合格した人は何人か。」

$U(83), A(55), B(60), C(58), A$ かつ $B(41), B$ かつ $C(45), C$ かつ $A(42)$ である。3 種のいずれかに合格した人は全体からいずれにも合格しなかった人数を引けばよいから、 $83 - 6 = 77$ 。したがって、3 種とも合格した人を x 人とする

$$77 = 55 + 60 + 58 - 45 - 42 - 41 + x, \quad x = 32$$

32 人である。



何らかの集まりに対して、ある事柄は何通りあるか、というとき、それをその「場合の数」という言い方をする。一つのサイコロを一度だけ振ったとき、出てくる目は 6 通りある。だから、一つのサイコロの目の場合の数は 6 と言う。中学で出てくる場合の数は、「全てを数え上げる」という操作で数えることができる問題に限定されている。しかし、数が増えてくると、全てをもれなく、重複することなく、数えることは困難になってくる。したがって、事前に代表的な場合の数え方については調べておく必要がある。

1 順列

n 個の異なったものを 1 列に並べることあるいは、並べた場合の数を順列という。

クラスから、委員長一人、副委員長一人、会計一人を選ぶ場合がこれに当たる。

a, b, c, \dots, g の異なった n 個のカードがあると、これを 1 列に並べるとは、 n 個の 1 列に並べた箱を用意し、 n 個の全てのカードをどれかの箱に入れればよい。

1 番目の箱には、 a から g までの全てのカードを入れることができ、それは n 通りある。2 番目の箱では、すでに 1 枚カードが使われてるから、1 枚目のカードが決まったそれぞれに対して $(n - 1)$ 通りの決め方がある。

こうして、全体を並べる方法は、

$$n! = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$$

となる。ここで、教科書では使わないが、非常に便利な記号「!」を導入した。 $5! = 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ で「5の階乗」と読む。ただし、 $0! = 1$ と定義しておく。また、掛ける \times は文字の場合は省略することを知っているが、数字の場合にも使える「 \cdot 」を導入した。 $3 \times 4 \times 5 = 3 \cdot 4 \cdot 5$ の如くである。小数点ドット「 \cdot 」とセンタードット「 \cdot 」を混乱しないように正確に書く必要がある。同様に考えて、異なる n 個のものから r 個取り出し、1 列に並べる場合の数 (これを順列といい、その数を ${}_n P_r$ と表す。) は

$${}_n P_r = n \cdot (n - 1) \cdot (n - 2) \cdots (n - r + 2) \cdot (n - r + 1) = \frac{n!}{(n - r)!}$$

となる。

2 組み合わせ

異なる n 個の中から r 個選ぶときの選び方を組み合わせ、という。選ぶ順序は考えない。クラスから 3 人の炊事当番を選ぶ場合がこれに相当する。何番目に選ばれても、結果は同じだからだ。

もし a, b, c の三人が選ばれたとすると、 $(a, b, c), (a, c, b), (b, a, c), (b, c, a), (c, a, b), (c, b, a)$ の順序を考慮した 6 通りの選ばれ方がある。組み合わせではこれらは全て一通りと見なすから、順列を 6 で割っておけばよいことになる。この 6 は a, b, c の 3 個の異なるものの順列だから $6 = 3 \cdot 2 \cdot 1 = 3!$ である。

異なる n 個の中から r 個選ぶ選び方を組み合わせ (combination) といい、その場合の数を ${}_n C_r$ と

表す。上の例から分かるとおり、一般の組み合わせは、次の式で表される。

$${}_n C_r = \frac{{}_n P_r}{r!} = \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdots (n-r+2) \cdot (n-r+1)}{r \cdot (r-1) \cdots 3 \cdot 2 \cdot 1}$$

${}_n C_r$ は二項展開の係数ともよばれ、次の性質がある。

$${}_n C_r = {}_n C_{n-r}$$

$${}_n C_{n-r} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = {}_n C_r$$

これは、 r 個を選ぶそれぞれに、選ばれなかった $n-r$ 個が対応し、場合の数は同じとなるからである。

$(x+a)^n = {}_n C_0 x^n + {}_n C_1 x^{n-1} a^1 + {}_n C_2 x^{n-2} a^2 + \cdots + {}_n C_r x^{n-r} a^r + \cdots + {}_n C_{n-1} x a^{n-1} + {}_n C_n a^n$ が成り立つ (二項定理と呼ばれている)。それは、

$$\textcircled{1} \quad \textcircled{2} \quad \cdots \quad \textcircled{n}$$

$$(x+a)^n = (x+a)(x+a) \cdots (x+a)$$

のようになれば、 ${}_n C_r x^{n-r} a^r$ は n 個の席の一つずつ入っている a のうち、 r 個の a を選ぶ選び方 (自動的に x は $n-r$ 個が選ばれている) に対応するからである。また、二項係数には次の性質がある。

$$\begin{aligned} {}_n C_r &= {}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r \\ &= \frac{{}_{n-1} C_{r-1} \cdots {}_{n-1} C_r}{(r-1) \cdots 2 \cdot 1} + \frac{(n-1) \cdots (n-r+1)(n-r)}{r(r-1) \cdots 2 \cdot 1} \\ &= \frac{(n-1) \cdots (n-r+1)(r+n-r)}{r(r-1) \cdots 2 \cdot 1} = {}_n C_r \end{aligned}$$

$\begin{array}{cc} \boxed{{}_{n-1} C_{r-1}} & \boxed{{}_{n-1} C_r} \\ & \searrow \quad \swarrow \\ & \boxed{{}_n C_r} \end{array}$

勿論、 ${}_{n-1} C_0 = {}_{n-1} C_{n-1} = 1$ である。

これは、次のようにしても確認できる。

$$\begin{aligned} (x+a)^n &= (x+a)^{n-1}(x+a) \\ &= \{ {}_{n-1} C_0 x^{n-1} + {}_{n-1} C_1 x^{n-2} a^1 + \cdots + {}_{n-1} C_{n-1} x a^{n-1} \} (x+a) \\ &= {}_{n-1} C_0 x^n + ({}_{n-1} C_0 + {}_{n-1} C_1) x^{n-1} a + \cdots \\ &\quad + ({}_{n-1} C_{r-1} + {}_{n-1} C_r) x^{n-r} a^r + \cdots + ({}_{n-1} C_{n-2} + {}_{n-1} C_{n-1}) x a^{n-1} + {}_{n-1} C_{n-1} a^n \end{aligned}$$

これをもとの $(x+a)^n$ の展開と比較すればよい。

$$\begin{aligned} (x+a)^1 &= x+a \\ (x+a)^2 &= x^2 + 2ax + a^2 \\ (x+a)^3 &= x^3 + 3ax^2 + 3a^2x + a^3 \\ (x+a)^4 &= x^4 + 4ax^3 + 6a^2x^2 + 4a^3x + a^4 \\ (x+a)^5 &= x^5 + 5ax^4 + 10a^2x^3 + 10a^3x^2 + 5a^4x + a^5 \end{aligned}$$

[問題1] 空白をうめよ。

$$(x+a)^6 = x^6 + \boxed{\quad} a x^5 + \boxed{\quad} a^2 x^4 + \boxed{\quad} a^3 x^3 + \boxed{\quad} a^4 x^2 + \boxed{\quad} a^5 x + a^6$$

順番に, 6,15,20,15,6

[問題2] $(2x - \frac{1}{2})^8$ の展開の x^3 の係数をもとめよ。

$${}_8 C_3 2^3 (-\frac{1}{2})^5 = -14$$

コインを投げたときのように、「試行に対して結果が2つしかない」ような実験や試行のことをベルヌーイ試行と言う。二項分布はベルヌーイ試行の確率分布である。

ベルヌーイ試行では結果が2つしかないので、成功確率 = 1 - 失敗確率 という関係が成り立つ。

ベルヌーイ試行の条件1 試行の結果は成功か失敗かどちらか

ベルヌーイ試行の条件2 各試行は独立である

ベルヌーイ試行の条件3 成功確率と失敗確率は常に一定である

二項分布では試行回数を n 、成功した回数を k 、成功する確率を p の文字で表すと、 k 回成功した確率は

$$P(X = k) = {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k}$$

二項分布では、試行回数 n 、成功した回数 k 、成功する確率 p があれば、期待値 (平均) と分散を簡単に計算することができる。

二項分布の期待値は 二項分布の期待値 = 試行回数 × 成功する確率 = $n \times p$

二項分布の分散は 二項分布の分散 = $n \times p \times (1-p)$

① 二項分布の期待値 (平均) と分散は、 n が大きくなると、正規分布で近似できる。 ② 正規分布の計算は、高校生にも難しい積分が必要。 ③ よって、二項分布は、中学生にも、確率の学習の出発点を与える。

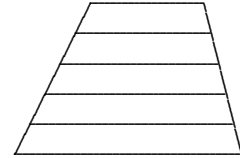
3 辞書式配列, 樹形図の利用

もれなく, 重複なく数えるには工夫が必要である。例で考える。

- [1] 「 a,a,a,b,c から 3 個を選んで一列に並べる場合の数をもとめよ。 」

これは, aaa, aab, aac, aba, abc, aca, acb, baa, bac, bca, caa, cab, cba の 13 通りである。こうして辞書のアルファベット順のように文字を並べる並べ方である。樹形図についてはよく知っているだろう。

- [2] 「図のように, 台形の内部が底辺に平行な直線で 5 つの部分に仕切られている。この 5 つの部分の絵の具で塗り分けたい。使える絵の具の色は, 赤が 3 回まで, 青が 2 回まで, 黄が 1 回までで, 使わない色があっても良い。同じ色を隣り合わせに塗ることができな」と



すると, 全部で何通りの分け方があるか。」(白陵高)
これを辞書式配列と見なそう。赤 (a), 青 (b), 黄 (c) とし, a は 3 個まで, b は 2 個まで, c は 1 個までとし, 隣り合わせに同じ文字は使わない 5 文字の単語の総数とする。

ababa, ababc, abaca, abacb, abcab, abcba, acaba, acbab,

babac, babca, bacab, bacba, bcaba, cabab, cbaba の 15 通り

これは, ほぼ短時間で間違いなく実行できる限界である。「数える」には問題に応じた工夫が必要である。そして的確な工夫は「数える」ことを簡単にする。「場合分け」はその代表的な工夫である。

a が 3 個の場合... 3 通り, a が 2 個の場合... 5+5+2=12 通り, 合計 15 通りなどがある。

- [3] 100 円, 50 円, 10 円の硬貨を使って, 420 円をちょうど支払う方法は何通りあるか。(10 山梨学院大)

100 円, 50 円, 10 円の硬貨の硬貨それぞれ x, y, z とすると, $100x + 50y + 10z = 420$

したがって, $10x + 5y + z = 42$ を $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$ の整数解を求めることになる。

$y \geq 0, z \geq 0$ より, $10x \leq 42$, したがって, $0 \leq x \leq 4$

$x = 0$ のとき, $5y + z = 42$, $y = 0, 1, \dots, 8$ の 9 通り

$x = 1$ のとき, $5y + z = 32$, $y = 0, 1, \dots, 6$ の 7 通り

$x = 2$ のとき, $5y + z = 22$, $y = 0, 1, \dots, 4$ の 5 通り

$x = 3$ のとき, $5y + z = 12$, $y = 0, 1, 2$ の 3 通り

$x = 4$ のとき, $5y + z = 2$, $y = 0$ の 1 通り

よって, $0 + 7 + 5 + 3 + 1 = 25$ 通り

- [4] 「A, B, C, D は, それぞれ 1,2,3,4 のどれかである。千の位の数 A, 百の位の数 B, 十の位の数 C, 一の位の数 D である 4 桁の整数をつくる。このとき, 次の問いに答えよ。」(洛南高)

(a) A, B, C, D が全て異なる整数は何通りか。

(b) 全部で何通りつくれるか。

(c) $A \leq B, C \leq D$ である整数は何通りつくれるか。

(d) $A + B + C + D = 9$ である整数は何通りつくれるか。

(a) は 1,2,3,4 の順列だから $4! = 24$ 通り

(b) は各 A, B, C, D は 4 通りずつだから, $4^4 = 256$ 通り

(c) は $A \leq B$ を満たす A, B の組は 10 通り, $C \leq D$ も 10 通りだから, $10 \times 10 = 100$ 通り

(d) この問題が主なテーマである。複雑な問題は「場合分け」を行う。

4 を 1 個用いる場合... (4, 2, 2, 1), (4, 3, 1, 1) の 2 組だけ。

これを A, B, C, D に配分するだけだから $\frac{4!}{2!} \times 2 = 24$ 通り

4 は用いず, 3 が 2 個... (3, 3, 2, 1) の組だけ。 $\frac{4!}{2!} = 12$ 通り

4 は用いず, 3 が 1 個... (3, 2, 2, 2) の組だけ。3 が A, B, C, D のどれか。4 通り, 合計 40 通り

[問題] 8 個の数字 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 を使って 3 桁の整数をつくる時, 次の問いに答えよ。(灘高)

- (1) 同じ数字を何回使ってもよいとすれば, 何個できるか。

(2) 3つの異なる数字を使ってつくる時、3の倍数は全部で何個できるか。

(3) (2) でできた整数すべての和を求めよ。

(1) $8^3 = 512$ 通り

(2) (1, 2, 3), (1, 2, 6), (1, 3, 5), (1, 3, 8), (1, 4, 7), (1, 5, 6), (1, 6, 8), (2, 3, 4), (2, 3, 7), (2, 4, 6), (2, 5, 8),

(2, 6, 7), (3, 4, 5), (3, 4, 8), (3, 5, 7), (3, 7, 8), (4, 5, 6), (4, 6, 8), (5, 6, 7), (6, 7, 8) の 20 通り,

それぞれが 6 個, 全部で, $20 \times 6 = 120$ 個

(3) 百の位だけに注目する, 3 または 6 になるものが各 18 個, 1, 2, 4, 5, 7, 8 になるものが 14 個,

全 120 個の整数の百の位のみを加え合わせると $(3 + 6) \times 18 + (1 + 2 + 4 + 5 + 7 + 8) \times 14 = 540$

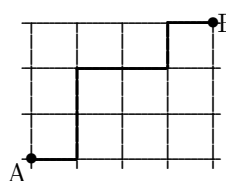
求める総和は $540 \times (100 + 10 + 1) = 59940$

4 大小のサイコロを同時に投げたときの場合の数の議論では縦に大の, 横に小のサイコロの目を座標のように並べた表を使うとわかりやすことも知っている。

5 ルートの数

図のような点Aから点Bに向かうルート^{ちようぶく}の数を求めてみよう。一つずつ数えてもできるが, 一寸だけ工夫してみる。

AからBに進むには右向けに必ず4段左から順番に進まねばならず, 上向きに必ず3段下から順番に進まねばならない。右向けに1段進むことをa, 上向きに進むことをbで表すとたとえば, 右上上右右上右というルートはabbaabaと表せる。aが4個, bが3個あわせて7個の順列である。7個の順列は7!だったが, 4個のa, 3個のbは同じものだからそれぞれ4!, 3!だけ重複して数えていることなる。したがって $\frac{7!}{4!3!} = 35$ 通り



1.5 確率, 統計

1.5.1 確率

結果が偶然に支配される実験や観察を「試行」といい, 試行によって起こった結果を「事象」という。起こりうる全ての事象を全事象といい, U で表す。一つのサイコロを振ったとき, 全事象 U は 1, 2, 3, 4, 5, 6 の 6 通りある。ある事柄 A の起こりうる割合を A の確率 (probability) といい, $P(A)$ で表す。どの事象も同じ割合で起こると期待される事象の集まりを「同様に確からしい (equally likely)」事象の集まりという。全事象をそれ以上細かく分けることができない要素に分割したとき, その一つ一つを根元事象という。事象 A に含まれる根元事象の要素の数を $n(A)$ と表す。根元事象が同様に確からしいとき, 事象 A が起こる確率は

$$P(A) = \frac{n(A)}{n(U)}$$

となる。サイコロを一回振ったとき, 3の倍数が出る確率は

$$P(3 \text{ の倍数}) = \frac{n(3 \text{ の倍数})}{n(\text{全体の日})} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$$

事象 A に対して, 「 A でない事象」を A の余事象といい, \bar{A} と書く。事象 A の起こる確率 $P(A)$ には次の性質がある。

- 確率 $P(A)$ の性質
- (a) $0 \leq P(A) \leq 1$, とくに, $P(\text{何も起こらない}) = 0$, $P(U) = 1$
 - (b) $P(A) + P(\bar{A}) = 1$

〔例題 1〕 「3個のサイコロを同時に投げるとき, 1の目が少なくとも1つ出る確率, 目の和が5以上である確率を求めよ。」

3個のサイコロを投げるのだから, 全体の場合の数は $6^3 = 216$

「1の目が少なくとも1つ出る」事象を A とすると, \bar{A} は「1の目が全く出ない」事象である。 \bar{A} は「2, 3, 4, 5, 6 から3個を重複を許して3個とる」場合だから, $5^3 = 125$

従って, $P(A) = 1 - P(\bar{A}) = 1 - \frac{125}{216} = \frac{91}{216}$

「目の和が5以上」を B とすると、 \bar{B} は「目の和が4以下」の事象となる。

\bar{B} は (1, 1, 1), (1, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 1) の4通り

$$\text{従って、} P(B) = 1 - P(\bar{B}) = 1 - \frac{4}{216} = \frac{53}{54}$$

いずれにしても、確率を計算するためには事象 A に含まれる根元事象の要素の数 $n(A)$ を計算しなければならない。中学では事象は離散的で全て有限個である。しかも樹形図等を示して数え上げることが出来る程度の個数である。「場合の数」で学んだ手法を活かし、丁寧に数え上げることで解けない問題は出題されたことはない。しかし、練習をするときには、出来る限りそれがどんな数学的特性を持った集まりかを考察し、一般化して解くよう心がけて欲しい。

まず、以下に基本練習問題を掲げる。これを自分でやってから次に進んでほしい。塾には、同程度の確率の練習用のプリントが多数用意されているから、活用して欲しい。

- 1 3枚の硬貨を同時に投げるとき、2枚が表で1枚が裏となる確率を求めよ。 $(\frac{3}{8})$
- 2 硬貨を5枚投げるとき、表が2回以上連続して出ない確率を求めよ。 $(\frac{23}{32})$
- 3 2つのサイコロAとBを同時にふり、Aの目を a 、Bの目を b とする。
 - (1) 方程式 $x^2 - 2(a-3)x - b^2 + 9 = 0$ が解 $x = 0$ をもつ確率を求めよ。 $(\frac{1}{6})$
 - (2) 方程式が $(2-a)x^2 + 3x + (b-3) = 0$ が異符号の2つの解を持つ確率を求めよ。 $(\frac{7}{18})$
- 4 赤玉4個と白玉3個が入っている袋から3個を取り出すとき、赤玉2個、白玉1個である確率を求めよ。 $(\frac{18}{35})$
- 5 0,1,2,3,4,5のカードから3枚を選んで並べたとき、3桁の偶数となる確率を求めよ。 $(\frac{13}{30})$
- 6 袋のなかに色だけ異なる12個の球が入っている。その中の3個は赤色、4個は白色、5個は青色である。いま、袋の中をよくかき混ぜて4個の玉をとりだすとき、次の確率を求めなさい。
 - (1) 取り出した玉の色が青色だけ (2) 取り出した玉の色が少なくとも2種類
これは高校生がよく用いる問題集から借りた問題である。数が多く、数え上げが困難である。したがって、式を用いる。
 - (1) $\frac{{}_5C_4}{{}_{12}C_4} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2}{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9} = \frac{1}{99}$
 - (2) 全部赤の確率0、全部白の確率 $\frac{{}_4C_4}{{}_{12}C_4} = \frac{1}{495}$
全部青の確率は(1)と同じ $\frac{1}{99}$ 、したがって、
 $1 - (\frac{1}{99} + \frac{1}{495}) = \frac{163}{165}$
- 7 サイコロを2度続けて投げ、1回目・2回目に出た目の数をそれぞれ a, b とする。 $n = 100a + b$ とするとき、次の確率を求めよ。
 - (1) n が偶数になる確率。 $(\frac{1}{2})$
(6×3通り)
 - (2) n が3で割り切れる確率。 $(\frac{1}{3})$
($a + b$ が3の倍数 = 12通り)
 - (3) n が2でも3でも割り切れない確率。 $(\frac{1}{3})$
($36 - (6 \times 3 + 12 - 6) = 12$ 通り)

しかし、入試には、数え上げ、だけではかなり間違いやすい問題も出題される。そのため、確率の計算を整理しておく簡単な場合が多い。高校の学習を少しだけ先取りする。「集合と論理」の知識が必要で、これは「高校進学に備える中学数学発展」に詳述するが、詳細を知らなくても、以下のことは理解できる。事象 A, B が決して同時に起こることがないとき、事象 A, B は 排反 という。次の定理が成り立つ。

確率の加法定理

(a) 和事象 $A \cup B$ の確率 $\cdots P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

(b) A, B が互いに排反のとき $\cdots P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

これは、集合の要素の数の公式から明らかである。

〔例題 2〕 「2個のサイコロを投げるとき、目の和が偶数となる事象を A 、目の和が3の倍数となる事象を B とする。このとき、 A と B の積事象 $A \cap B$ の確率、 A と B の和事象 $A \cup B$ の確率を求めよ。」

目の和が偶数となるのは偶数+偶数、奇数+奇数の場合だから、 $n(A) = 3 \times 3 + 3 \times 3 = 18$

目の和が3の倍数は (1,2),(2,1),(1,5),(5,1),(2,4),(4,2),(3,3),(3,6),(6,3),(4,5),(5,4),(6,6) の12通り $n(B) = 12$

$n(B)$ のうち、目の和が偶数となるのは6通りだから、 $n(A \cap B) = 6$ 。したがって、 $P(A \cap B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{18}{36} + \frac{12}{36} - \frac{6}{36} = \frac{2}{3}$$

2つの事象 A と B について、事象 A が起こったとしたとき、事象 B が起こる確率を A が起こったときの条件付き確率といい、 $P_A(B)$ で表す。

確率の乗法定理

(A と B がともに起こる確率) = (A の起こる確率) \times (A が起こったとしたときの B の起こる確率)

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B)$$

$$P(A \cap B) = \frac{n(A \cap B)}{n(U)} = \frac{n(A)}{n(U)} \cdot \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = P(A) \cdot P_A(B)$$

〔例題 3〕 くじ引きの問題は後でも考察するが、条件付き確率の理解のため、次の問題を考えよう。

「10本のくじの中に3本の当たりくじがある。このくじを太郎、次郎2人がこの順に引くとする。太郎が当たりくじを引いたときに、次郎が当たる確率はいくらか。また、次郎が当たりくじを引く確率はいくらか。」

太郎が当たることを A 、次郎が当たることを B とする。

太郎が当たりくじを引くと、残りの9本の内、当たりくじは2本だけだから、 $P_A(B) = \frac{2}{9}$

次郎が当たるのは、太郎が当たる場合と、太郎が当たらない場合の2通りだけで、しかも互いに重ならない(排反事象)。すなわち $P(B) = P(A \cap B) + P(\bar{A} \cap B)$

$$\text{また、 } P(A \cap B) = P(A) \cdot P_A(B) = \frac{3}{10} \times \frac{2}{9} = \frac{1}{15} \quad P(\bar{A} \cap B) = P(\bar{A}) \cdot P_{\bar{A}}(B) = \frac{7}{10} \times \frac{3}{9} = \frac{7}{30}$$

$$\text{したがって、 } P(B) = \frac{1}{15} + \frac{7}{30} = \frac{3}{10}$$

事象 A と事象 B が互いに影響を与えないで起こるとき、事象 A と事象 B は独立、あるいは独立事象という。すなわち、 $P_A(B) = P(B)$ 、 $P_B(A) = P(A)$ である。このとき、確率の乗法定理は

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

となる。2つの試行 T_1, T_2 において、どちらの結果も他と無関係に得られるとき、2つの試行 T_1, T_2 は独立という。

独立試行の確率

独立試行 T_1, T_2 を一つに合成した試行 T において、

T_1 では事象 A が、 T_2 では事象 B が起こる事象を C とすると

$$P(C) = P(A)P(B)$$

〔例題 4〕 「受験生 A, B, C の3人がおのおのの志望校に合格する確率を、それぞれ $\frac{3}{5}, \frac{3}{4}, \frac{1}{3}$ とする。

(1) 3人とも合格する確率 (2) 2人だけ合格する確率、 (3) 少なくとも1人合格する確率を求めよ。」

(1) について、3人とも合格する確率は $\frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{20}$

(2) について、 A と B だけが合格する確率 $\cdots \frac{3}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{10}$ B と C だけが合格する確率 $\cdots \frac{2}{5} \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{10}$

C と A だけが合格する確率 $\cdots \frac{3}{5} \times \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{20}$ したがって、 $\frac{3}{10} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} = \frac{9}{20}$

(3) について、 $1 - \frac{1}{15} = \frac{14}{15}$

反復試行の確率

事象 A が起こる確率を p とする。この試行を n 回行うとき、

事象 A がちょうど r 回起こる確率を $P_r(A)$ とすると

$$P_r(A) = nC_r p^r (1-p)^{n-r}, \quad r = 0, 1, 2, \dots, n.$$

1回の試行で、結果が A か \bar{A} の2通りの事象にだけ着目して、これを独立に n 回繰り返す試行をベルヌーイ試行という。サイコロを5回ふって、1の目が2回出る確率を求めてみよう。

1回の試行で1の目が出る確率は $p = \frac{1}{6}$ 、1の目がでない確率は $p - 1 = \frac{5}{6}$ である。5回繰り返し試行を行うと、5回の繰り返し試行のそれぞれは

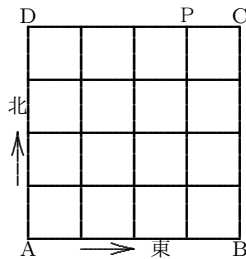
試行	①	②	③	④	⑤
T					

のような表に表すことができる。□には、1の目が出たときだけ、○の印を付けるとする。1の目が2回出る出方は、5個の中から2個選ぶ場合の数だから、 ${}_5C_2$ 通りである。それぞれの確率は等しく、繰り返しの各回の試行は独

立試行だから、 $p^2(1-p)^3 = (\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3$ である。従って、1の目が2回出る確率は ${}_5C_2(\frac{1}{6})^2(\frac{5}{6})^3$ となる。

〔例題 5〕 図のような正方形を16個に等分した街路がある。

AからCに行くのにサイコロをふって、1,2,3,4が出れば東向きに1区画すすみ、5,6が出れば北向きに1区画進むことにする。ところがBC上では北行きは禁止されている。このとき、AからCに行くことのできる確率を求めなさい。ただし、サイコロの目を見て進めない場合は、すべてそこで停止するとする。



点Pに進む確率は、反復試行の公式を使って、
 $(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{1}{3})^4 \times \frac{7!}{3!4!}$ であり、PからCに進む確率は $\frac{2}{3}$ である。
 従って、 $(\frac{2}{3})^3 \times (\frac{1}{3})^4 \times \frac{7!}{3!4!} \times \frac{2}{3} = \frac{2^4 \times 7 \times 5}{3^8} = \frac{560}{6561}$

〔例題 6〕 A, Bの2人がゲームを行っている。A, Bいずれが勝つことも同じように期待できる。1回毎のゲームの引き分けはないものとする。1回勝つ毎に1ポイントを得るとして、このゲームを何回か行い勝負を決める時、次の間に答えよ。

(1) 4回引ポイントの多い方を勝ちとすると、Aの勝つ確率を求めなさい。

Aが4回とも勝つ、Aが3回勝つ場合である。従って、 $\frac{1+4}{2^4} = \frac{5}{16}$

(2) 続けて2回勝つ方を勝ちとすると、3回までに勝負の付かない確率を求めなさい。

3回までに勝負が付くのは、はじめから一方が続けて2回勝つか、はじめに一方が勝ち続いて、他方が2回続けて勝つかのどちらかである。

$$\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times 2 = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$$

3回目までに勝負が付かない確率は $1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$

〔例題 7〕 反復試行の考えを拡張しておこう。

一回の試行で事象A, 事象B, 事象Cが起こる確率をそれぞれ, $p, q, r, (p+q+r=1)$ とし、

n 回の試行でA, B, Cが*i, j, k, (i+j+k=n)*回起こる確率は

$$P = \frac{n!}{i!j!k!} p^i q^j r^k \text{ である。}$$

「十分長い階段がある。1個のさいころを投げて、1または2または3の目が出れば1段登り、4または5の目が出れば2段登り、6の目が出れば3段登る。1個のさいころを3回投げるとき、合計7段登る確率は である。

(灘高)

A … 1または2または3の目が出る $p = \frac{1}{2}$ 1段登る

B … 4または5の目が出る $q = \frac{1}{3}$ 2段登る

C … 6の目が出る $r = \frac{1}{6}$ 3段登る

3回 ($n=3$)で7段登るには、 $i=1, j=0, k=2$ か $i=0, j=2, k=1$ のどちらかである。したがって、

$$P = \frac{3!}{1!0!2!} (\frac{1}{2})^1 (\frac{1}{3})^0 (\frac{1}{6})^2 + \frac{3!}{0!2!1!} (\frac{1}{2})^0 (\frac{1}{3})^2 (\frac{1}{6})^1 = \frac{7}{72}$$

さて、確率の応用を考えてみよう。

1 身近な確率の応用問題は次のようなものである。

「1000本のくじの中に、賞金5000円、1000円、100円の当たりくじがそれぞれ2本、10本、100本ある。このくじを一本引くと、平均いくらあたるか。ちなみに、くじは一本100円で売り出されているとする。」(高校の教科書改)

これは、確率の応用である「期待値」の問題で、分かりやすい例が高校教科書にあったから流用した。各くじを引く確率は表のようになる。

くじ	0円	100円	1000円	5000円	計
確率	0.888	0.1	0.01	0.002	1.0

したがって、得られる賞金額の期待値は

$$0 \times 0.888 + 100 \times 0.1 + 1000 \times 0.001 + 5000 \times 0.002 = 30$$

100円出して、30円があたる、宝くじとはそんなものだ。

ところで、くじを発売する方から考えると、5000円を2本、1000円を10本、100円を100本支払

わなければならないから、一本当たり、

$$(100 \times 100 + 1000 \times 10 + 5000 \times 2) / 1000 = 30$$

30 円を支払わなければならないことになる。確率が有限個の場合の数から計算できる場合に限定すると、このように期待値は確率の考えを使わなくても計算することができる。

- 2 A君とB君はあらゆる面でライバルである。学業成績、人望、ルックスいずれも互角に渡り合っている。試験にしてもどちらが得意な分野が出題されたかによって勝者が変わった。人望、ルックスに至っては第三者の主観的判断によって変わってくる。勝気なA君は自分がB君と同等に見られるのが我慢ならなかった。せめて体力で自分の優越をみんなにアピールしようと考え、B君も得意とする相撲での決着をもくろんだ。温厚なB君は初めその提案を断わったが、執拗なA君の圧力に、それでは昼休みの時間に相撲を取ると言うことで合意した。しかしA君は気負っていたので1回目はB君のはたき込みの前に瞬時に土をつけてしまった。我慢ならないのはA君でもう一度試合をすることを要求し、今度はA君が勝った。A君は自分の方が強いことをみんなにアピールしたかったので更に何度も試合をして勝ち続けてトータルでA君の5勝1敗でチャイムが鳴って打ち切った。A君は勝ち誇った気分で教室へ戻った。しかし冷静なB君は少しの動揺も見せず、ニコニコしながらいい運動ができたと言って教室へ戻っていった。いったいB君にはどんな判断があったのだろうか。

B君は自分がA君と力は互角だと考えている。それは勝ったり負けたり五分五分と言うことを意味する。B君は6回のうち1回勝ったのである。B君の勝ち負けの場合の数は $2^6 = 64$ 通りある。6戦して1勝する場合は6通り、1勝もできない場合は1通りである。したがって6戦して1勝以下しかできない確率は

$$(1+6)/64=0.11$$

となる。これは稀なことでもなんでもない。こういうことは良くあることだ。ずーっと試合を続ければ、五分五分に成る。ここはA君に花を持たせてあげようと考えたのである。こうして、確率の問題には、その予想の確かさを評価する課題があることも理解できる。

- 3 もう一つ易しい例を取り上げる。教科書には、「くじは、先に引いた場合と後に引いた場合とでは、どちらが当たりやすいでしょうか。予想しましょう。」として、次の例題とその解説が掲載されている。

「当たりくじが2本、はずれくじが3本入っているくじを、Aが先に、Bが次に引きます。引いたくじは元へ戻さないものとして、A、Bのどちらが当たりやすいと言えますか。」

すでに「条件付き確率」の例として取り上げた。樹形図を書くと、簡単に理解でき、A、Bともに当たる確率は $\frac{2}{5}$ となるのが分かる。

この例で、学習してほしいことは、限られた範囲ではあるが、常識だと思われている日常的な営みについて、数学的に解釈すればどうなっているのか、数学的な根拠、解釈はどうすれば良いのか、さらにもっと強く言えば、数学的なモデル化をどうすればその意味が理解できるのか、の例である、ということだ。あやふやで、低次元の課題だけに取り組もうとする姿勢の人には、文化の一分野としての数学は必要ない。それは理系、文系のどの専門分野を担うにしても全く同じことだ。「数学など勉強したけれど全く役に立ったことがない」と公言する評論家がいるが、それは「私の評論活動は全く何の役にも立たない」と言っていることに等しい。

〔例題 8〕 「15本のくじの中に当たりくじが2本ある。まず、Aが5本まで順に引き、 k 本目($1 \leq k \leq 5$)に初めて当たったら、引くのをやめて、残ったくじから $5-k$ 本の空くじを取り除く。つぎに、Bが残り10本の中から5本まで順に引き、初めて当たったら引くのをやめる。A、Bどちらが有利か。」

これは高校生用の問題集から借りた。類題が京大で出題されたことがあるそうだ。

A、Bが当たる事象を同じA、Bで表す。余事象 \bar{A} は5本とも空くじで ${}_{13}P_5$ 通り。したがって、

$$P(A) = 1 - \frac{{}_{13}P_5}{{}_{15}P_5} = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}$$

ベン図からつぎの式が成り立つことがわかる。

$$P(B) = P(A \cup B) - P(A \cap B) = 1 - P(\bar{A} \cap \bar{B}) - P(A \cap \bar{B})$$

事象 $\bar{A} \cap \bar{B}$ は、A、Bをとおして、10本とも空くじで、 ${}_{13}P_{10}$ 通り。よって、 $P(\bar{A} \cap \bar{B}) = \frac{{}_{13}P_{10}}{{}_{15}P_{10}} = \frac{2}{21}$

また、事象 $A \cap \bar{B}$ は、Aが当たり、Bは5本とも空くじで、 $P(A \cap \bar{B}) = \frac{({}_{15}P_5 - {}_{13}P_5) \cdot {}_9P_5}{{}_{15}P_{10}} = \frac{2}{7}$

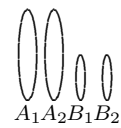
したがって、 $P(B) = 1 - \frac{2}{21} - \frac{2}{7} = \frac{13}{21}$ Bが有利。

4 教科書に書かれている話題に触れておこう。気象庁の「降水確率予報」は一定の時間帯において、1mm以上の雨または雪が降る確率をパーセントで一桁を四捨五入した表現をするそうだ。降水確率0%と予想しても、雨が降ったり、降水確率100%と予報していても晴れたからと言って、文句を付けるな、という予報である。その限りでは、何が起ころうとも「気象庁 ウソつかない!」。確率は、05年の秋には「今冬は暖冬だ」と発表しておいて、各気象観測所始まって以来の大雪や低温を観測してあわてて「今年の冬は寒い」などと発表する、永らく地震予報ができると莫大な税金を使いながら過去のデータからぼつぼつ地震が発生しそうになってから、予報はできないかもしれない、とトーンダウンして逃げに入った気象庁の責任のがれの隠れ蓑になっていることも忘れてはいけない。確率は私たちの現実の生活の「ごまかし」に悪用される場合も多いが、それは、その情報を受け取る側の理解力の問題が大半で、数学に「ウソ」が入っているわけではない。

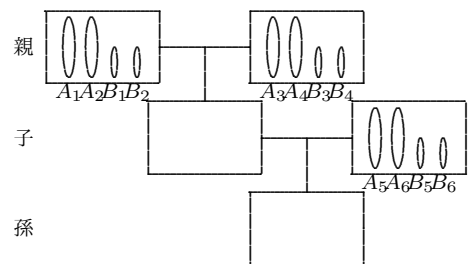
5 遺伝子のDNAの二重螺旋構造の解明に数学的なモデルが決定的な役割を演じたといわれている。どんな厳密な科学にも数学は不可欠である。確率の例を理科の入試問題から取り上げよう。

「生物が生殖細胞を作るとき、「減数分裂」といわれる特殊な細胞分裂を行う。

右図のように、分裂前の細胞の中の染色体構成が A_1, A_2, B_1, B_2 の場合、これによって作られる生殖細胞に A_1 と A_2 や B_1 と B_2 の組み合わせができることはない。そこで、図のような家系図を考えた場合、孫の染色体構成が A_1, A_5, B_3, B_6 になる確率を分数で答えなさい。ただし、確率が存在しない場合は「0」と答えること。」(清教学園高改)



子の両親の染色体は全て異なるから、子の染色体の組み合わせの場合の数は $2 \times 2 \times 2 \times 2$ となる。更に、孫から見た両親の染色体の組み合わせは全て異なるから、それぞれ孫の染色体の組み合わせの場合の数は $2 \times 2 \times 2 \times 2$ となり、孫の染色体の組み合わせの場合の数は 2^8 となる。そのうち、孫の染色体の組み合わせが $A_1 A_5 B_3 B_6$ となる場合は、孫の片親の遺伝子が $A_1 A_3, A_1 A_4$ と $B_1 B_3, B_2 B_3$ の組み合わせの4通りのみである。したがって $\frac{4}{2^8} = \frac{1}{64}$



子の両親の染色体は全て異なるから、子の染色体の組み合わせの場合の数は $2 \times 2 \times 2 \times 2$ となる。更に、孫から見た両親の染色体の組み合わせは全て異なるから、それぞれ孫の染色体の組み合わせの場合の数は $2 \times 2 \times 2 \times 2$ となり、孫の染色体の組み合わせの場合の数は 2^8 となる。そのうち、孫の染色体の組み合わせが $A_1 A_5 B_3 B_6$ となる場合は、孫の片親の遺伝子が $A_1 A_3, A_1 A_4$ と $B_1 B_3, B_2 B_3$ の組み合わせの4通りのみである。したがって $\frac{4}{2^8} = \frac{1}{64}$

6 次の問いに答えなさい。

(1) 袋の中に、大きさが等しい赤玉と青玉が合わせて1000個入っている。これらをよくかき混ぜて125個の玉を取り出したところ、100個が赤玉で25個が青玉であった。このとき、袋の中に残っている赤玉の個数はおよそ何個と推測されるか求めなさい。

(2) 箱の中に白い球だけがたくさん入っている。この箱に赤い球を80個入れてよくかき混ぜ、箱から50個の玉を無作為に取り出すと、赤い球が9個含まれていた。最初に箱の中に入っていた白い球はおおよそ何個であると推測されるか、最も適当なものを次の(ア)~(エ)から1つ選べ。

(ア) およそ320個 (イ) およそ360個

(ウ) およそ400個 (エ) およそ440個

答え (1) およそ700個 (2) (イ)

1.5.2 資料の整理

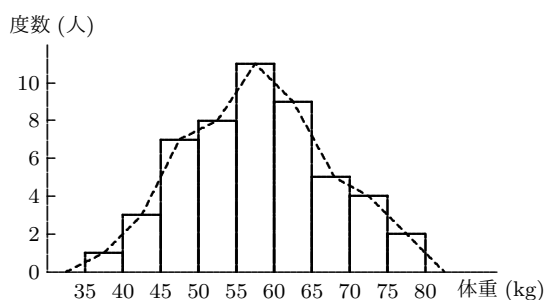
身長、体重、テスト結果など、一つの集団に属する個々の要素を特徴づける数を変量という。変量はたとえば身長のように 154.3cm など連続的な値をとる場合もあるし、テストの得点のように 85 点とか離散的な値の場合もある。

変量の範囲を小区間に分割したとき、各区間を「階級」、各区間の幅を「階級の幅」、各区間の中央の値を「階級値」、各階級に属するデータの個数を「度数」、度数の合計を「総度数」、これを表に表したものを「度数分布表」という。また、各階級の度数を総度数で割ったものを「相対度数」という。さらに度数分布を柱状のグラフに表したものを「ヒストグラム」または「柱状グラフ」、ヒストグラムの柱の上の辺の中点を結んでできるグラフを「度数分布多角形」、または「度数折れ線」という。柱状グラフでは分布の範囲の外では高さが 0 の柱となり、度数分布多角形では、分布の外の階級では、各階級値のところで高さが 0 となっている。重要なことは、度数分布多角形で囲まれたグラフの面積は柱状グラフでの面積と変量のそれぞれの部分で等しく、したがって総度数も忠実に再現している。連続的な変量で、階級の幅をどんどん小さくすると度数分布曲線が得られる。

花組の体重の度数分布表

体重の階級 (kg)	階級値 (kg)	度数 (人)
35 以上 40 未満	37.5	1
40 ~ 45	42.5	3
45 ~ 50	47.5	7
50 ~ 55	52.5	8
55 ~ 60	57.5	11
60 ~ 65	62.5	9
65 ~ 70	67.5	5
70 ~ 75	72.5	4
75 ~ 80	77.5	2
計		50

ヒストグラム、度数分布多角形 (破線)



N 個の資料の平均値 m は各データの値を x_i とすると

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_N}{N}$$

で求められる。平均値の計算は、通常上の式を用いて直接計算するのではなく、「仮の平均値」 m_0 を用いて、

$$m = m_0 + \frac{(x_1 - m_0) + (x_2 - m_0) + \cdots + (x_N - m_0)}{N}$$

で求められる。上式の後半は仮の平均値からのずれの平均値を表している。

n 個の階級に分けた度数分布表があると、各階級の階級値を x_i 、その階級に属する度数を f_i とすると、

$$m = \frac{x_1 f_1 + x_2 f_2 + \cdots + x_n f_n}{N}, \quad N = f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

で求めることができる。もちろん、元のデータの平均値と度数分布表による平均値には差があり、データの個数 N が多くなり、しかも階級の幅が小さくなる (階級の個数が多くなる) とこの差が小さくなることが予想できる。

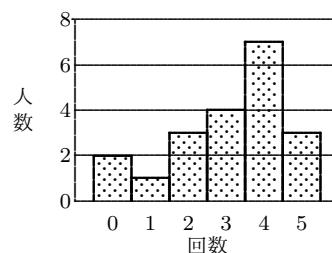
上の度数分布の体重の平均値はいくらか。

(57.9kg)

その資料の変量の特徴づける量を「代表値」という。平均は代表値の一つで、そのほかにメジアン (中央値: 大きさの順に並べたとき、中央にくる変量の値)、モード (度数分布表でもっとも度数が大きい階級の階級値) がある。どんな代表値を与えれば度数分布をどの程度特徴づける事が出来るかは難しい問題である。後で導入する「標準偏差」は非常に重要な代表値である。

〔例題 1〕 右下のグラフは、あるクラスの生徒 20 人が 1 週間に食堂を利用した回数の記録です。中央値 (メジアン)、最頻値 (モード)、平均値をそれぞれ求めなさい。

答え (中央値)3.5 (最頻値)4 (平均値)3.1



〔例題 2〕 下の表は、あるクラスで行った数学のテストの結果を表にまとめたものです。表中の x は 4 点とった人の人数、 y は 9 点とった人の人数を表しています。また、このテストの平均点は、4.8 点です。このとき、つぎの各問に答えなさい。(08 年度開智高)

- (1) このクラスの人数 z を求めなさい。
 (2) 得点が 3 点以下の人はクラス全体の何%か答えなさい。
 (3) x, y の値を求めなさい。
 (4) このテストは 3 問あり、その配点は、それぞれ 2 点、3 点、4 点でした。3 問中 2 問だけが正解であった人数を求めなさい。ただし、部分点はないものとする。

得点(点)	人数(人)	得点×人数
2	2	4
3	5	15
4	x	$4x$
5	4	20
6	1	6
7	3	21
9	y	$9y$
合計	z	96

- (1)20 人 (2)35% (3) $x = 3, y = 2$ (4)8 人 (ペン図を描けば簡単)

〔例題 3〕 生徒 25 人がある期間に図書室から本を借りた。表は、本を借りた生徒の人数を冊数別にまとめたものである。借りた本の冊数の平均値、中央値をもとに、 a, b, c, d を次のように定める。(15 大阪後期 B 選択)

- a …… 借りた本の冊数が平均値より大きい生徒の人数
 b …… 借りた本の冊数が平均値より小さい生徒の人数
 a …… 借りた本の冊数が中央値より大きい生徒の人数
 a …… 借りた本の冊数が中央値より小さい生徒の人数

借りた本の冊数(冊)	生徒の人数(人)
7	5
6	3
5	2
4	3
3	4
2	2
1	6
合計	25

次ぎのア～エの式のうち、正しいものを 1 つ選び、記号を○で囲みなさい。

$a = b$ $a = c$ $ウ b = d$ $エ c = d$ 答え $ウ$

箱ひげ図

指導要領改訂で、中 2 で箱ひげ図を扱うようになった。簡単に説明しておく。

データを小さい順に並べたとき、

偶数個データでは、第二四分位数(中央値)は、真ん中のデータに最も近い 2 つのデータの平均に選ぶ。

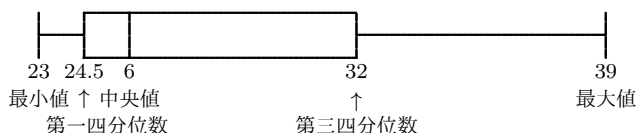
第一四分位数は、中央値を含まない下部データの中央値とする。

第三四分位数は、中央値を含まない上部データの中央値とする。

例題 1 (数研出版から借用する)

23, 24, 25, 26, 26, 29, 30, 34, 39

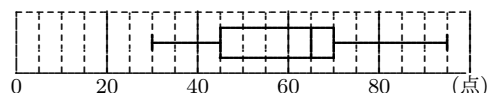
データ数は 9、中央値(第二四分位数)は 5 番目の 26、第一四分位数 $\frac{24+25}{2} = 24.5$ 、第三四分位数 $\frac{30+34}{2} = 32$ 、
 四分位範囲 = 第三四分位数 - 第一四分位数 = $32 - 24.5 = 7.5$



例題 2 (工夫された演習問題をネットから借用する。)

次の表は、あるチュウ学校 2 年生 9 人の数学のテストの得点で、図は表を基に作成した箱ひげ図です。このとき、 a, b, c の値を求めなさい。ただし、 a, b, c は、 $a < b < c$ です。

生徒	1	2	3	4	5	6	7	8	9
得点(点)	a	40	95	67	57	68	50	b	c



表から、 a, b, c を除いたデータを小さい順に並べると、40, 50, 57, 67, 68, 95

箱ひげ図から、最小値 30 点、第一四分位数 45 点、第 2 四分位数(中央値) 65 点、第三四分位数 70 点、最大値 95 点
 また、9 人の得点のデータなので、

データを小さい順に並べると、第 2 四分位数(中央値)を境にして、前半と後半にそれぞれ 4 人のデータがあることがわかる。

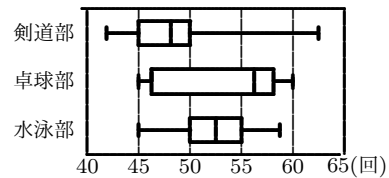
$a = 30, b = 65$ である。第三四分位数 70 点より大きいのは 95 点の他にもう一つあるはずであり、それは c が相当する。

a ○ ○ ○ b ○ $\textcircled{68}$ c $\textcircled{95}$ 第三四分位数 70 より、 $\frac{68+c}{2} = 70$ $c = 72$
 30 45 65 70

例題 3 2023 年 3 月 10 日大阪府公立入試数学 B 問題に箱ひげ図の問題が出題された。

ある中学校の剣道部、卓球部、水泳部の部員が反復縄跳びの測定を行った。図は、その記録を箱ひげ図に表したものである。つぎのア～オのうち、図からわかることとして正しいものはどれですか。全て選び、記号を○で囲みなさい。

- ア 三つの部の部員のうち、記録が 60 回以上の部員は 1 人だけである。
- イ 剣道部の記録の四分位範囲と、水泳部の記録の四分位範囲同じである。
- ウ 三つの部のうち、記録の範囲が最も大きいのは、卓球部である。
- エ 第 1 四分位数が最も小さいのは、水泳部の記録である。
- オ 卓球部では、半数以上の部員の記録が 55 回以上である。



答え ア ① ウ エ ④

1.5.3 偏差値について学習しておこう

以下は、40 年近く前までは、中学でもカリキュラムに含まれていたが、現在は学習指導要領から削除されている。高校入試は見かけは様変わりしているが、本質は以下のものと全く同じである。いずれ大学入試で理解しておかねばならないことであり、概略を記す。(中 3 の学習が一通り済んでから、読んで下さい)

ヘンサチとは漢字で偏差値と書く。読んで字のごとく標準からのずれを表す値の 1 つである。ちょうど平均値を 50 にとり、それより良ければ平均からのずれに応じて 50 より上の値が対応することになる。ところがそのずれをそのまま 50 に加えた値を偏差値と約束(定義)したのでは、テストの種類や受験生全体の実力の開きぐあいによってその生徒の実力が変わらなくてもその値がまちまちなことになる。あまり生徒個人の実力を評価する値にはならない。これをうまく解決するため、受験生全体のテスト結果のバラつきぐあいを表す標準偏差という量で、上に述べた平均からのずれを割って 10 倍したものに 50 を加えた値を偏差値と約束する。式で書いた方がわかりやすい。

N : 人数, x_1, x_2, \dots, x_N : 各人の得点, m : 平均点, s : 標準偏差, Z_k : k 君の偏差値とするとすると

$$m = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N}$$

$$s = \sqrt{\frac{(x_1 - m)^2 + (x_2 - m)^2 + \dots + (x_N - m)^2}{N}}$$

$$Z_k = 50 + \frac{x_k - m}{s} \times 10$$

標準偏差 s の式は、ちょっと変形すると

$$s = \sqrt{\frac{x_1^2 + \dots + x_N^2}{N} - m^2}$$

となり、これもよく用いられる。

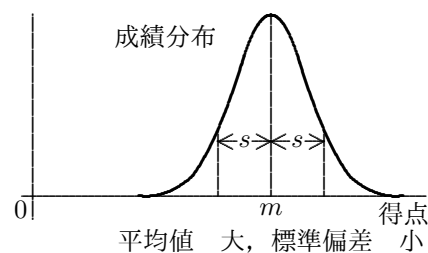
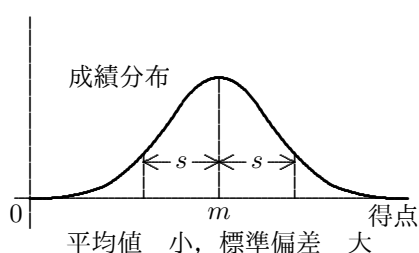
[例題 4] 次の $N = 20$ のデータの平均 m と標準偏差 s をもとめ、80 点の偏差値をもとめよ。

57, 48, 79, 98, 56, 43, 83, 64, 68, 29, 38, 43, 90, 71, 40, 68, 92, 60, 54, 72

($m = 62.7(62.65)$, $s = 18.9$, $Z = 59.2$)

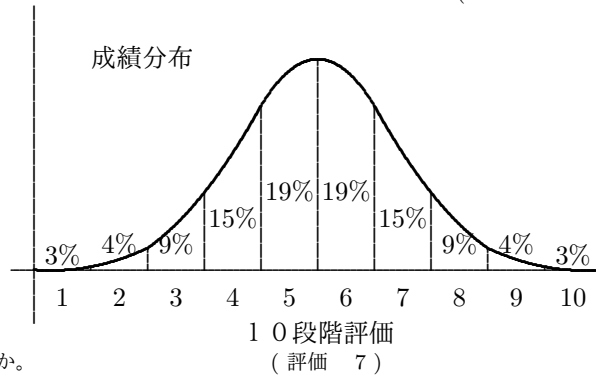
偏差値はあたかも 100 点満点で成績を表したような感じで、素人受けしやすい工夫がしてあって、受験生とその周りの人間は皆これに振り回されている。

さて k 君の偏差値 Z_k は得点 x_k の 1 次関数で、得点 x_k の単調増加関数であり、上位の得点は上位の偏差値になる。したがって素点 x_k と似ている。しかし偏差値 Z_k には、プラスアルファの情報—平均値 m , 標準偏差 s —が含まれている。これは偏差値の分布を一定の割合に決める役割を持っている。よく工夫されたテストでは得点の分布曲線は正規曲線といって釣鐘を伏せた形をしている。



なぜそうなるのか、その「確率分布」の形はどんな式で表されるかは高校でのお楽しみだ。素点のままではこの釣鐘の中心軸が50点より右や左にずれたり、ひどく尖ったり、だだっ広かったりする。 m は、素点のままではテストの難易や全体の実力によって平均点が上下するのを常に50に固定し、 s は得点分布の広がりを決めた形にする。こうして得られる偏差値の分布曲線は常に同じ形をしている。何だこれなら、かつて大阪府で用いられていた学校の相対評価と同じではないかと思われるだろう。全くその通りだ。ただ中学ではこれを10段階に分けて粗く付けるだけで、偏差値では整数の範囲でこれを付けるにすぎない。10段階評価では、10が3%、9が4%、8が9%、7が15%、6が19%、5が19%、4が15%、3が9%、2が4%、1が3%となっている。大阪の内申では、厳格にこの割合が適用されていた(現在は、異なる)。

これはつぎの原理から決められている。平均より上の標準偏差の1/2以内に含まれているのは全体の19%である。また平均より標準偏差の1/2から1倍まで上の範囲に含まれるのは全体の15%である。こうして全体の分布を平均を基準に標準偏差の1/2の幅で分割して上下に6と5、7と4、8と3、9と2、10と1の評価をつける。



〔例題 5〕230人中で40番の人の十段階評価は幾らか。

10段階評価では分割が粗すぎて、同じ評価9でも10に近い9と8に近い9ではずいぶん力に差があり、たとえば10に評価されるか9に評価されるかで与える印象に決定的な差が出てくるし、内申の場合には入試の可否に大きく影響する。そこで学力をもっと詳細に評価する指標として偏差値が用いられる。

普通中3になると、生徒は自分の偏差値がいくらくらいかを知っている。中学入試を経験した生徒は、自分がなぜ中学入試に失敗したかを知っており、偏差値に敏感であるが、その経験のない生徒は業者のテストを受けて自分が評価されることを非常に警戒し、偏差値や学力の評価が示されることを避ける傾向がある。

偏差値は普通2桁の整数でしめされる。偏差値を知ると、10段階評価に比べてより詳しい順位がもとまる。例えば偏差値60以上の人は、全体の16%であり、学年350人とする55人である、と計算できる。これは累積度数が順位に相当する。

偏差値 Z の N 人中の順位(表を用いた順位の計算)は

$$u = (Z - 50)/10 \rightarrow \text{表より積分値 } p(u) = \text{_____}, \text{ よって 順位} = (0.5 - p(u)) \times N$$

〔例題 4〕偏差値55の人は1000人中何番に相当するか。また偏差値が60, 65, 70ではどうか。

(順番に 309,159,67,23)

結局、偏差値は順位を言い替えたものと言える。

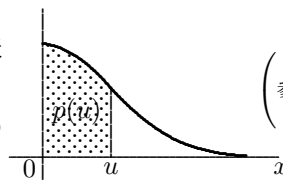
それでは次にこの偏差値をどう用いるかを考えてみよう。入試は問題の種類や生徒個人の体調などによって、同じ実力であったとしても合格したり、不合格になったりする。例えば偏差値60の人が10人受験して、7人合格したのならば、その高校の偏差値60での合格率は70%ということになる。実際にはデータが滑らかに分布しているとして、合格率をもとめる。よく発表される合格の難易度は合格率80%をめどにしていることが多い。

前提とする仮定(データ)は大きく変化する。例えば大阪の公立平均競争率が1.1や1.2であっても、現実には受験者が定員に満たない(競争率が1未満)場合もあれば、競争率が1.3となり、13人の受験者で3人の不合格者が出ることもある。偏差値による微細な分析は現実にはほとんど役立たない、おおよその傾向を知るとい程度であるが、受験対策の進捗を反映する有力な指標であることには間違いない。

しかし、現代では、受験直前の近視眼的な受験対策ではなく、「知的創造的能力」を目指した一貫した教育・学習こそが求められているときに、「即興力偏差値」の価値は限りなく少なくなっている。

現在大阪府の公立高校入試では、内申点と筆記試験を総合して合否を判定している。高校によって、内申点のウエイトに違いがある。簡単に言えば、大学進学を重視する高校は、筆記試験のウエイトが高く、そうでない高校は内申点のウエイトが高い。内申点は、学校ごとに、各教科5段階絶対評価を行うとされているが、その学校内における平均は、チャレンジテストの成績によって府教委から指定される。一つの学校内では、成績上位のどの人も成績下位のどの人以上の内申点が付き、平均が指定されるのだから、基本的には、相対評価の偏差値と同じ意味を持っている。総合得点方式では、必ずそうなる。テストによる選抜は、創造的個性の育成を目標とする教育と相容れない。

ガウス分布で、平均値からのずれを u としたとき、平均値 ($u = 0$) と u の間に含まれる確率を $p(u)$ と表すと、これは図のような面積となる。表は、右の式に従って、筆者がガウス積分法で数値的に計算したものである。多くのテキストと全て一致している。



$$\left(\text{参. } p(u) = \int_0^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx \right)$$

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
0.0	.0000	.0040	.0080	.0120	.0160	.0199	.0239	.0279	.0319	.0359
0.1	.0398	.0438	.0478	.0517	.0557	.0596	.0636	.0675	.0714	.0753
0.2	.0793	.0832	.0871	.0910	.0948	.0987	.1026	.1064	.1103	.1141
0.3	.1179	.1217	.1255	.1293	.1331	.1368	.1406	.1443	.1480	.1517
0.4	.1554	.1591	.1628	.1664	.1700	.1736	.1772	.1808	.1844	.1879
0.5	.1915	.1950	.1985	.2019	.2054	.2088	.2123	.2157	.2190	.2224
0.6	.2257	.2291	.2324	.2357	.2389	.2422	.2454	.2486	.2517	.2549
0.7	.2580	.2611	.2642	.2673	.2704	.2734	.2764	.2794	.2823	.2852
0.8	.2881	.2910	.2939	.2967	.2995	.3023	.3051	.3078	.3106	.3133
0.9	.3159	.3186	.3212	.3238	.3264	.3289	.3315	.3340	.3365	.3389
1.0	.3413	.3438	.3461	.3485	.3508	.3531	.3554	.3577	.3599	.3621
1.1	.3643	.3665	.3686	.3708	.3729	.3749	.3770	.3790	.3810	.3830
1.2	.3849	.3869	.3888	.3907	.3925	.3944	.3962	.3980	.3997	.4015
1.3	.4032	.4049	.4066	.4082	.4099	.4115	.4131	.4147	.4162	.4177
1.4	.4192	.4207	.4222	.4236	.4251	.4265	.4279	.4292	.4306	.4319
1.5	.4332	.4345	.4357	.4370	.4382	.4394	.4406	.4418	.4429	.4441
1.6	.4452	.4463	.4474	.4484	.4495	.4505	.4515	.4525	.4535	.4545
1.7	.4554	.4564	.4573	.4582	.4591	.4599	.4608	.4616	.4625	.4633
1.8	.4641	.4649	.4656	.4664	.4671	.4678	.4686	.4693	.4699	.4706
1.9	.4713	.4719	.4726	.4732	.4738	.4744	.4750	.4756	.4761	.4767
2.0	.4772	.4778	.4783	.4788	.4793	.4798	.4803	.4808	.4812	.4817
2.1	.4821	.4826	.4830	.4834	.4838	.4842	.4846	.4850	.4854	.4857
2.2	.4861	.4864	.4868	.4871	.4875	.4878	.4881	.4884	.4887	.4890
2.3	.4893	.4896	.4898	.4901	.4904	.4906	.4909	.4911	.4913	.4916
2.4	.4918	.4920	.4922	.4925	.4927	.4929	.4931	.4932	.4934	.4936
2.5	.4938	.4940	.4941	.4943	.4945	.4946	.4948	.4949	.4951	.4952
2.6	.4953	.4955	.4956	.4957	.4959	.4960	.4961	.4962	.4963	.4964
2.7	.4965	.4966	.4967	.4968	.4969	.4970	.4971	.4972	.4973	.4974
2.8	.4974	.4975	.4976	.4977	.4977	.4978	.4979	.4979	.4980	.4981
2.9	.4981	.4982	.4982	.4983	.4984	.4984	.4985	.4985	.4986	.4986
3.0	.4987	.4987	.4987	.4988	.4988	.4989	.4989	.4989	.4990	.4990
3.1	.4990	.4991	.4991	.4991	.4992	.4992	.4992	.4992	.4993	.4993
3.2	.4993	.4993	.4994	.4994	.4994	.4994	.4994	.4995	.4995	.4995
3.3	.4995	.4995	.4995	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4996	.4997
3.4	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4997	.4998
3.5	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998	.4998
3.6	.4998	.4998	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.7	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.8	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999	.4999
3.9	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000	.5000

現在では、表計算ソフトを多用するため、こうした表は徐々に不要になっているが、その原理的な理解のために、今しばらく、ここに提示し続ける。

第2章 式の計算

この章の項目は復習がほとんど必要のない日常の学習で習得しているものばかりであるが、数学の基礎として、中学数学に不可欠な事柄について記す。

2.1 計算の法則

計算は、以下のような基本法則に従って進める。

相等性

- (a) $a = a$ (反射律)
- (b) $a = b$ ならば, $b = a$ (対称律)
- (c) $a = b, b = c$ ならば, $a = c$ (推移律)

論理学上の反射律: $t = t$ と, 置換法則: $s = t \rightarrow (F(s) = F(t))$ (ただし, s, t は任意の対象式で, F は任意の術語) を用いると, 後で記す代入原理: $a = b \rightarrow f(a) = f(b)$ だけでなく, 上の相等性の (b) 対称律, (c) 推移律も導ける。詳しくは, 「中学数学発展」あるいは, 「記号論理入門」(前原正二著) を参照して頂きたい。

和についての計算法則

- (a) $a + b = b + a$ (和の交換法則)
- (b) $(a + b) + c = a + (b + c)$ (和の結合法則)
- (c) 任意の a にたいして, $a + 0 = a$ となる 0 が存在する。(零の存在)
- (d) 任意の a にたいして, $a + x = 0$ となる数 $x = -a$ が存在する。(加法の逆元の存在)

零 0 は一意的である。ある零 0 ともう一つの零 $0'$ が存在したとする。定義より, 任意の a に対して, $a + 0 = a, a + 0' = a$, したがって, $a + 0 = a + 0'$, 両辺から a を引く ($-a$ を加える) と, $0 = 0'$

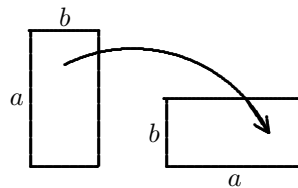
積についての計算法則

- (a) $a \times b = b \times a, a \times b$ は ab と書いてよい(積の交換法則)
- (b) $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$ (積の結合法則)
- (c) 任意の a について, $a \times 1 = a$ となる数 1 が存在する。(乗法の単位元)
- (d) $a \neq 0$ のとき, $ax = 1$ となる数 $x = \frac{1}{a} (= a^{-1})$ がある。(乗法の逆元(逆数)の存在)

単位元 1 は一意的であることは, 零 0 と同様にして証明できる。いずれも等式の基本性質を用いている。

一般に, $0 \neq 1$ を公理に加えておく。その時, 0 には乗法の逆元 0^{-1} が存在しないことが証明できる。仮に, 0 に乗法の逆元 0^{-1} が存在するとして, $b = 0^{-1}$ とする。両辺に 0 をかけると, $b \times 0 = 0^{-1} \times 0, 0 = 1$ となり矛盾する。さらに, 表現の規則として, 積は和より優先する。

「長方形の面積は縦 \times 横」という公式があったとする。 $a \times b$ は縦の長さが a , 横の長さが b の長方形の面積のようなものだ。一方 $b \times a$ は縦が b で横が a である長方形の面積である。交換法則 $a \times b = b \times a$ はこれが等しいことを表しており, 言ってみれば, 長方形をごろりと横に寝かせたとき, その面積が変わらないことを表している。逆に言えば, ころがしたときに値が変わるようなものについては積の交換法則は使えない。

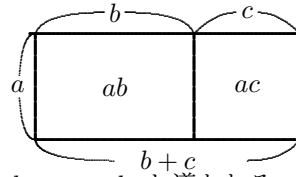


分配法則

$$(a) \quad a(b+c) = ab+ac \quad (\text{分配法則})$$

を仮定する。

分配法則は、通常、高さが等しい2つの長方形の面積の和で理解される。



分配法則 $(a+b)c = ac+bc$ は $(a+b)c = c(a+b) = ca+cb = ac+bc$ と導かれる。さらに、相等性については、次を設定する。

代入原理

$$a = b \text{ ならば, 任意の } P(x) \text{ について, } P(a) = P(b) \quad (\text{代入原理})$$

(注) 代入原理は置換法則ともいわれる。不等式には代入原理を使えない。

「代入原理」から、 $a = b$ ならば、 $a+c = b+c$ や $a \times c = b \times c$ などが導出される。例えば、 $P(x) = x+c$ とすると、 $a = b$ のとき、 $P(a) = P(b)$ 、すなわち、 $a+c = b+c$ となる。したがって、中学生には、「等式の基本性質」は、「代入原理」に取って代わるものがある。

等式の基本性質

(a) 等式の両辺に同じ数を足しても等式が成り立つ。

$$a = b \quad \text{ならば} \quad a + c = b + c$$

(b) 等式の両辺から同じ数を引いても等式が成り立つ。

$$a = b \quad \text{ならば} \quad a - c = b - c$$

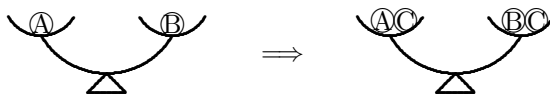
(c) 等式の両辺に同じ数をかけても等式が成り立つ。

$$a = b \quad \text{ならば} \quad a \times c = b \times c$$

(d) 等式の両辺を0でない同じ数で割っても等式が成り立つ。

$$a = b, \quad c \neq 0 \quad \text{ならば} \quad \frac{a}{c} = \frac{b}{c}$$

(b), (d) は、派生的に (a), (c) と和や積の計算法則から出てくる。それでは、(a), (c) はどうして出てくるのだろうか。(a), (c) は一言で、等しいものに、同じ基本演算をすれば、等しい結果が得られる、というものである。



これが信用できなければ、演算の意味をなさない。我々のレベルでは、計算の基本法則を確定するとき、すでにこれは仮定されていたと考えたらよい。言い換えれば、等号 (=) の定義に含まれている法則と考える (すなわち、「代入原理」も公理と考える)。

等式の基本原則からもっと複雑な式への代入原理を導くこともできる。

例として、2次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ の任意の $p = q$ の場合を考える。

(c) から得られる $ap^2 = aq^2$ と $bp = bq$ と $c = c$ の辺々を加え合わせ (和についての計算法則 (a) より、 $a = b, c = d$ なら $a+c = b+d$ を用いる)、 $ap^2 + bp + c = aq^2 + bq + c$ となる。すなわち $p = q$ のとき、 $f(p) = f(q)$ が得られた。もっと複雑な関数 $f(x)$ についても証明でき、それは、代入原理となる。

(こうしたことをもっと基礎原理から導くことに関心があれば、『春夏秋冬 377号』を参照してください)

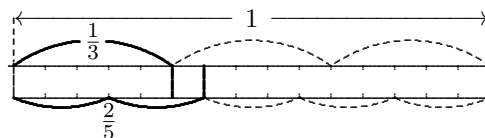
大切なことは、引き算や割り算は足し算や掛け算を使って定義されており、計算法 はそれらの 基本法則 から論理的に導かれるものである。中学数学では (高校数学でも)、数の理論を厳密に構成して理論を展開するものではないが、必要に応じて、あちこちで数の理論が一寸ずつ顔を出す事があり、疑問を持ったときには、一般的にはどういう仕組みになっているかに少しずつ関心に向けてほしい。

実は、中3で学ぶ無理数が現れるまでは、数はすべて $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ で表された。これを有理数という。ただし、円周率 π は無理数だが、無理数である、という扱いを何処にもしていない。上の加法、乗法、および分配

法則は有理数という集まり全体について定めた法則ということができる。したがって、すべての計算法はこれらから組み立てられる。したがって、数は「有理数」全体として、1つの「閉じた」世界を形成している(これを有理数体という)。中3になると無理数も現れてくる。しかし、上の法則が有理数という世界で閉じている事が重要で、計算の途中で無理数が現れたりしない。

はじめに、小学校で学んだ分数の和の計算法($\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$)を復習しておこう。例 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5}$ で考える。

長さ1cmの棒を考え、それを15等分(1つは $\frac{1}{15}$ cm)すると、 $\frac{1}{3}$ cmはその $1 \times 5 = 5$ 個に、 $\frac{2}{5}$ cmは $2 \times 3 = 6$ 個に相当する。15は2つの分数の分母の積である。2数の和は $\frac{1}{15}$ cmが $5+6$ 個、すなわち $\frac{1 \times 5 + 2 \times 3}{3 \times 5}$ cmである。



まとめると、 $\frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{1 \times 5 + 2 \times 3}{3 \times 5}$ と計算できる。

これまで計算法は、こうした長さや面積などの考えを援用して、その正当性を理解してきた。分母の違う分数の足し算もその一つである。計算は長さや面積の計算のみに用いるわけではない。したがって、小学校で学んだ分数の計算法 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ は、長さや面積の計算に利用できるよう、しかも整数の和の計算法と矛盾しないよう拡張したものである。

【例題 1】 $a = b, c = d$ ならば、 $a + c = b + d$, $ac = bd$ が成り立つことを証明せよ。

$a = b$ より、 $a + c = b + c \cdots (1)$, $c = d$ より $c + b = d + b \cdots (2)$, $b + c = c + b \cdots (3)$,

(3), (2) より、 $b + c = d + b \cdots (4)$ (1), (4) より、 $a + c = d + b$, また、 $d + b = b + d$ より、 $a + c = b + d$

$ac = bd$ も同様に行う。

【例題 2】 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ を証明せよ。

$b \times x = 1, d \times y = 1$ となる x, y が存在する。

$(b \times x) \times a = a, (d \times y) \times c = c$ より $b \times (x \times a) = a, d \times (y \times c) = c$.

したがって、 $x \times a = \frac{a}{b}, y \times c = \frac{c}{d}$ が存在する。

$\{b \times (x \times a)\} \times \{d \times (y \times c)\} = a \times c$ $\{b \times (x \times a)\} \times \{d \times (y \times c)\} = (b \times d) \times \{(x \times a)(y \times c)\}$

したがって、 $bd \times \{(x \times a)(y \times c)\} = ac$ すなわち $(x \times a)(y \times c) = \frac{ac}{bd}$

よって、 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

【例題 3】 公理系を用いて、一般的に、 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$ が成り立つことを証明しておこう。

(相等性の法則, 和及び積の交換法則は、断りなく使う)

$\square \times b = a, \bigcirc \times d = c$ となる \square, \bigcirc が存在し、割り算の定義より、 $\square = \frac{a}{b}, \bigcirc = \frac{c}{d}$

等式の基本性質より、 $(\square \times b) \times d = a \times d, (\bigcirc \times d) \times b = c \times b$

積の結合法則より、 $\square \times (b \times d) = (\square \times b) \times d, \bigcirc \times (d \times b) = (\bigcirc \times d) \times b$

等式の基本性質より、 $\square \times (b \times d) = ad, \bigcirc \times (d \times b) = cb$

したがって、【例題 1】の結果を用いて、 $\square \times bd + \bigcirc \times bd = ad + cb$

分配法則より、 $(\square + \bigcirc) \times bd = \square \times bd + \bigcirc \times bd$, よって $(\square + \bigcirc) \times bd = ad + cb$,

割り算の定義より、 $\square + \bigcirc = \frac{ad+cb}{bd}$, また【例題 1】の結果より $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \square + \bigcirc$

したがって、 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+cb}{bd}$

【演習】 一般に、 $\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$ が成り立つ。またこれを用いると、 b, d が整数で、その最大公約数が G

($b = Gb', d = Gd'$, b', d' は互いに素) の時、

通常に通分の公式、 $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad'+cb'}{Gb'd'}$ が成り立つ。(いずれも【例題 3】の結果を用いる。)

ここで、当塾の標準問題集に使っていた教科書対応の少し古い問題集(1976年、旺文社 実践力完成テキスト 中2数学)から2問を借りよう。四十数年前と今の教育に対する考え方の違いがよく出ている。

【例題 4】 「2つの数 a, b の大きい数から小さい数を引いた数を $a \sim b$ で表すとす。たとえば、 $4 \sim 2 = 2, 1 \sim 4 = 3$ である。

(1) 次の演算を行え。

① $2 \sim 7 =$ ② $(-1) \sim 4 =$ ③ $(3 \sim 8) \sim 6 =$

(2) $a \sim b$ について、交換法則は成り立つか。また、結合法則は成り立つか。」

(答え)(1) 5, 5, 1 (2) 交換法則は成り立つが、結合法則は成り立たない。

〔例題 5〕 4 の剰余系とは、整数を 4 で割った余りの数からなる系である。

「 4 に対する剰余系 $\{0,1,2,3\}$ について、次の問いに答えよ。

(1) 加法の表を完成せよ。

+	0	1	2	3
0	0	1	2	3
1	1	a	3	b
2	2	3	c	d
3	3	e	f	g

(2) 乗法の表を完成せよ。

×	0	1	2	3
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	h	i
3	0	3	j	k

(3) (1), (2) の表を利用して、次の計算をせよ。

① $3 - 1$ ② $1 - 2$ ③ $1 \div 3$

(4) 加法の単位元を求めよ。

(5) 乗法の単位元を求めよ。

(6) 2, 3 の加法と乗法の逆元を求めよ。」

加法は例えば $2 + 3 = 5$ のように普通の足し算で行うが、答えはそれを 4 で割った余りという意味になるから $2 + 3 = 1$ とする。同様に $2 \times 3 = 6$ ではなく $2 \times 3 = 2$ とする。

(答え)(1) $a = 2, b = 0, c = 0, d = 1, e = 0, f = 1, g = 2$ (2) $h = 0, i = 2, j = 2, k = 1$

	加法の逆元	乗法の逆元
2	2	なし
3	1	3

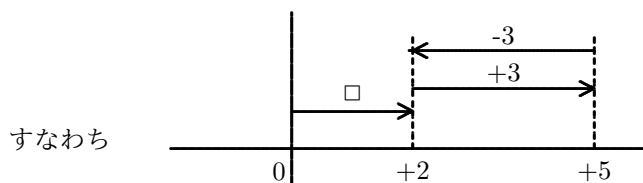
これらの問題を通して、計算法則は現実の量的関係において、必ずしも全てが同じではないことを認識しておいてほしい。剰余系では積の逆元が存在しないときがある。これは、我々の数の場合と大きく異なっている点であり、こうした集まりについても詳しく研究され、数学に欠かすことのできない重要な分野をなしている。我々の数の計算の基本法則はその特定の一組であるに過ぎない(数学ではこれを体, field という)。

数の計算の基本法則の中には、減法、除法が表面に現れていない。それは、減法とはいったい何だったのかを思い出してみれば明らかである。

たとえば

$\square + (+3) = +5$ となる \square を $(+5) - (+3)$ とする、すなわち $\square = (+5) - (+3)$ である。

中 1 の正負の計算の学習では、これに対して数直線を用いてイメージ化して、計算法を見つけだした。



として、 \square を求めるには、 $+5$ から、 $+3$ を加える前の位置にもどればよい、すなわち、 $+5$ に $+3$ と反対の方向に $+3$ 進む、よって、 -3 を加えればよい。こうして

$$(+5) - (+3) = (+5) + (-3) = +2$$

という「計算法」が得られた。これをもう少し数の基本的計算法則で見直しておこう。

$\bigcirc + (+3) = 0$ となる \bigcirc は存在する。これは $\bigcirc = -3$ である(加法に関する逆元という)。 \bigcirc は存在するだけでなく、常に符号を変えるだけで簡単に求まる。 $(+5) - (+3)$ の意味は $\square + (+3) = +5$ となる $\square = (+5) - (+3)$ であった。

両辺に \bigcirc を加え、 $\{\square + (+3)\} + \bigcirc = (+5) + \bigcirc$,

加法の結合法則を使って、 $\square + \{(+3) + \bigcirc\} = (+5) + \bigcirc$ となる。

左辺に加法の交換法則および、 $\bigcirc + (+3) = 0$ を用いると $\square = (+5) + \bigcirc$ となる。

すなわち、 $(+5) - (+3) = (+5) + \bigcirc = (+5) + (-3) = +2$ が得られた。

しかし、上の等式は、別の意味で、重要な役割を果たしている。

$$(+5) + (-3) = (+5) - (+3) = +2$$

小学算数は、0 と正の数のみで構成されており、正の数、あるいは数の絶対値を小学算数の数と見なせば、上のような例の異符号の 2 数の和は、絶対値が大きい方の数の絶対値から絶対値

が小さい方の絶対値を引いておけばよいことを表しており、これは正負の数の和を小学生の算数で計算できるようにしたものである。すなわち、左辺から、右辺への変形は、計算法を示したものと見なすことができる。他の場合は、後の例題を参照してほしい。

割り算も全く同じ論理で定義され、計算方法も導かれる。

$$\left(-\frac{5}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) \text{ を証明しよう。}$$

$$\square \times \left(-\frac{2}{3}\right) = -\frac{5}{7} \text{ を満たす } \square \text{ を } \square = \left(-\frac{5}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) \text{ と約束する。}$$

さて、 $\bigcirc \times \left(-\frac{2}{3}\right) = +1$ をみたす \bigcirc を $\left(-\frac{2}{3}\right)$ の逆数 (積に関する逆元) という。

逆数は有理数 (分数) の掛け算の知識より、0 でない限り分母分子を逆にすればよいから、常に求まり、

$$\text{今の場合 } \bigcirc = -\frac{3}{2} \text{ である。}$$

$$\text{したがって } \{\square \times \left(-\frac{2}{3}\right)\} \times \bigcirc = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc,$$

$$\text{乗法の結合法則を使って, } \square \times \left\{\left(-\frac{2}{3}\right) \times \bigcirc\right\} = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc \quad \square \times (+1) = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc$$

$$\square = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc \quad \text{よって } \left(-\frac{5}{7}\right) \div \left(-\frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \bigcirc = \left(-\frac{5}{7}\right) \times \left(-\frac{3}{2}\right) = +\frac{15}{14}$$

となる。

〔例題 6〕 「 $(+3) - (+5)$ を計算法則にしたがって、計算せよ。ただし、小学校で学んだ正の数の計算法は知っているものとする。」

$(+3) - (+5)$ とは、 $\square + (+5) = +3$ となる \square のことである (引き算の定義)。すなわち、 $\square = (+3) - (+5)$ である。また、 $(+5) + \bigcirc = 0$ となる \bigcirc は存在し、 $\bigcirc = -5$ (加法の逆元の定義) となる。後も、全て上の規則に従う。

$$\square + (+5) = +3 \text{ より, } \{\square + (+5)\} + \bigcirc = (+3) + \bigcirc, \quad \square + \{(+5) + \bigcirc\} = (+3) + \bigcirc, \quad \square + 0 = (+3) + \bigcirc$$

$$\text{よって, } \square = (+3) + \bigcirc = (+3) + (-5)$$

$$\text{したがって, } (+3) - (+5) = (+3) + (-5)$$

これは、減法を加法に変換したものである。すなわち、「正の数を引くときには、符号を変えて負の数にして、加える」という計算法を示したことになる。

つぎに、この加法を小学校の算数で、どう計算するか、を考える。これは、上の計算を逆に進めばよいのだが、目標を分かりやすくするため、ここでは、次のような計算を行う。

$$\square + \{(+5) - (+3)\} = 0 \text{ となる } \square \text{ は, } \square = -\{(+5) - (+3)\} \text{ である。}$$

この \square は、前段で示したと同様にして、 $(+5) - (+3) = (+5) + (-3)$ だから、

$$\square + \{(+5) + (-3)\} = 0, \quad \{\square + (+5)\} + (-3) = 0, \quad \{[\square + (+5)] + (-3)\} + (+3) = 0 + (+3),$$

$$\{\square + (+5)\} + \{(-3) + (+3)\} = 0 + (+3), \quad \{\square + (+5)\} + 0 = +3, \quad \square + (+5) = +3$$

よって、 $\square = (+3) - (+5)$ は、前段で用いたものと同じものである。

$$\text{したがって, } (+3) - (+5) = (+3) + (-5) = -\{(+5) - (+3)\}$$

最後の等式は、「小学校の算数、すなわち $5 - 3$ を計算し、負号をつけておく」を意味する。一般的に言えば、「異符号の足し算は、絶対値の大きい方の絶対値から、絶対値の小さい方の絶対値を引いて、絶対値の大きい方の符号をつける」という計算法を表している。

ここで、パズルを一つ。これは、「数学の楽しさ」矢野健太郎著の引用であるが、類題はテレビのマジックショウの中でもよく出てくる。

「常に2つの数は等しい」ということを証明する ?

任意の2つの数を a, b としそれらの差を $a - b = c$ とする。

$$\text{この両辺に } a - b \text{ を掛けて } (a - b)^2 = (a - b)c \text{ したがって } a^2 - 2ab + b^2 = ac - bc$$

$$\text{変形して } a^2 - ab - ac = ab - b^2 - bc \text{ 因数分解して } a(a - b - c) = b(a - b - c) \text{ よって } a = b$$

すなわち、任意の2つの数は等しい。誤りを指摘して下さい。

以上で、計算の基本法則を学習したが、これがすべてではない。たとえば、座標平面で、ある関数と直線が交わっているように見えても、常にその交点を表す座標があるかどうかは、これまでの議論では言えない。数 (実数) の連続性の公理が必要である。高校では、極限、収束、連続などの概念が重要になる。そのときまで、連続性の公理はお預けとする。

どんな2つの数の間にも、必ず別の数が存在する。これを数の稠密性ちゆうみつという。有理数も実数も稠密性を持っている。しかし、数直線のどこを切っても、その切り口を特徴づける数が必ずあるかどうかは、事前

にはわからない。連続性の公理は、必ず一個存在するというものである。数直線には、一切のすき間や穴が存在しないことを主張する。高校数学は、数の連続性を抜きには殆ど議論が成り立たないが、取り扱いが、曖昧である。数の連続性をきっちり学習するには、大学の数学を学ばなければならない。

2.2 色々な式

2.2.1 指数を含む式

基本法則だけでは表現が複雑になったり、計算が面倒なこともある。最近の入試で、次のような計算問題が出題された。

$$\left(\frac{3}{2}x^2y^3\right)^4 \times \left(-\frac{2}{3}xy^2\right)^3 \div \left(-\frac{3}{4}x^3y^4\right)^2, \quad -\left(-\frac{3a^2b}{2}\right)^2 \times \frac{4a^2b^8}{(-3)^5} \div \left\{-\left(-\frac{ab^2}{3}\right)^4\right\}$$

この程度の問題が簡単にできない人は特に、以下の説明をしっかりと読んでおいてほしい。積の計算式の表現として、累乗の指数も使われる。

$$a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^n, \quad n \text{ は自然数}$$

$a^0 = 1, \frac{1}{a^m} = a^{-m}$ ($a \neq 0, m$ は自然数) と約束すると、指数の定義は $a \neq 0, n$ は整数 に拡張できる。現在のところ、教科書では取り扱わないが、理科の学習にとっても負の整数乗は不可欠である。積の計算法則から、指数法則が出てくる。

指数法則

整数 m, n について

(a) $a^m \times a^n = a^{m+n}$, ($a^m \div a^n = a^{m-n}$ も含んでいる)

(b) $(ab)^n = a^n b^n$

(c) $(a^m)^n = a^{mn}$

証明は簡単である。はじめに m, n が自然数のとき

$$a^m \times a^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^m \times \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m+n} = a^{m+n}$$

$$(ab)^n = \overbrace{ab \times ab \times \cdots \times ab}^n = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^n \times \overbrace{b \times b \times \cdots \times b}^n = a^n b^n$$

$$(a^m)^n = \overbrace{a^m \times a^m \times \cdots \times a^m}^n = \overbrace{a \times \cdots \times a}^m \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^m \times \cdots \times \overbrace{a \times \cdots \times a}^m = \overbrace{a \times a \times \cdots \times a}^{m \times n} = a^{mn}$$

となる。これを負の m, n に拡張すればよい。たとえば、

整数 $m > 0, n < 0$ に対して、 $n' = -n$ とすると $n' > 0$ だから、

$$m > n' \text{ のとき } a^m \times a^n = a^m \times a^{-n'} = a^m \times \frac{1}{a^{n'}} = \frac{a^m}{a^{n'}} = a^{m-n'} = a^{m+n}$$

$$m < n' \text{ ならば } a^m \times a^n = \frac{a^m}{a^{n'}} = \frac{1}{a^{n'-m}} = a^{-(n'-m)} = a^{m+n}$$

他の場合も同様に公式 (a) は整数 m, n について常に成り立つ。

公式 (b), (c) も同様に拡張できる。

また高校では、指数 n を有理数、さらに全ての数 (実数) に拡張する。

計算するとは、これらの基本法則を使って、目的の表現に導くことである。したがって、計算結果は目的が変われば、違った表現になることもある。

2.2.2 比の式

比の式は式の中で特異な位置を占めているから、簡単にまとめておく。

キーは比が等しいとはどういうことか、ということにつける。分数 $\frac{a}{b}$ のことを比 $a : b$ の「比の値」という。

比が等しいとは比の値が等しいことである。

$$a : b = x : y \quad \longleftrightarrow \quad \frac{a}{b} = \frac{x}{y}$$

分母を払うと、 $ay = bx$ となる。これは比の式の外側の項（外項という）と内側の項（内項）の積が等しいことを意味している。さらに両辺を xy で割ると $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$ となり、 $a : x = b : y$ が得られる。これは比の式の両辺の前の項の比が後ろの項の比に等しいことを意味している。これらの変形は各項が0でないとき逆の順序で変形できる。まとめると次のようになる。

$$\begin{array}{l} a : b = x : y \quad \dots \text{比が等しい} \\ \Updownarrow \\ \frac{a}{b} = \frac{x}{y} \quad \dots \text{比の値が等しい} \\ \Updownarrow \\ ay = bx \quad \dots \text{外項の積は内項の積に等しい} \\ \Updownarrow \\ a : x = b : y \quad \dots \text{前項の比は後項の比に等しい} \end{array}$$

$\frac{x}{y} = \frac{x \times c}{y \times c}$ だから、

$$x : y = x \times c : y \times c$$

がなりたつ。これは、算数でよく使う。 $0.6 : 0.8 = 0.6 \times 10 : 0.8 \times 10 = 6 : 8 = 3 \times 2 : 4 \times 2 = 3 : 4$

$\frac{x}{y} = \frac{a}{b}$, $\frac{u}{v} = \frac{c}{d}$ ならば、 $\frac{xu}{yv} = \frac{ac}{bd}$ だから

$$x : y = a : b, u : v = c : d \text{ ならば, } xu : yv = ac : bd$$

また、 $a : b = x : y$ ならば $\frac{a}{b} = \frac{x}{y}$ だから、 $\frac{a+kb}{b} = \frac{x+ky}{y}$ で $(a+kb) : b = (x+ky) : y$,
あるいは $a : (b+ka) = x : (y+kx)$ などが成り立つ。

$$a : b = x : y \text{ ならば, } (a+kb) : b = (x+ky) : y \text{ あるいは } a : (b+ka) = x : (y+kx)$$

一般に

$$x : y = u : v \text{ ならば, } (ax+by) : (cx+dy) = (au+bv) : (cu+dv)$$

なぜなら、 $\frac{x}{y} = \frac{u}{v} = k$ とすると、 $x = ky$, $u = kv$ である。したがって、

$$\frac{ax+by}{cu+dv} = \frac{aky+by}{ckx+dy} = \frac{ak+b}{ck+d} \quad \frac{au+bv}{cu+dv} = \frac{aku+bv}{cku+dv} = \frac{ak+d}{ck+d}$$

よって、 $\frac{ax+by}{cx+dy} = \frac{au+bv}{cu+dv}$

一次方程式 $x : 3 = (2x - 5) : 4$ などは、 $4x = 3(2x - 5)$ として、 $x = 7.5$ とすればよい。

$3x = 4y$ から、 $x : y$ が混乱してうまく答えられない人がいる。

$3x = 4y$ から $y = \frac{3}{4}x$ として、 $x : y = x : \frac{3}{4}x = 1 : \frac{3}{4} = 4 : 3$ と計算してみよう。

連比 $a : b : c$ などにも必要になる。上の議論から、

$$a : b : c = x : y : z \quad \longleftrightarrow \quad \frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$$

である。

$a : b : c = x : y : z$ を $a : b = x : y$, $b : c = y : z$ と見なすとする。

このとき、 $\frac{a}{b} = \frac{x}{y} = p$, $\frac{b}{c} = \frac{y}{z} = q$ とおけるから、 $a = pb$, $x = py$ より、 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$, $b = qc$, $y = qz$ より、 $\frac{b}{y} = \frac{c}{z}$

となり、 $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$ となる。すなわち、 $a : x = b : y = c : z$ である。

一般に比のままでは計算しにくいので、比の式は比の値の式で表しておいた方が扱いやすい。それは変数の数を減らして、何が自由に変わる変数かをはっきりさせるはたらきを伴うからである。比の扱いは比の値を k とおくことによって、見通しよく計算できる。

$$\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \dots = k$$

〔例題 1〕 「 $(y+z):8=(z+x):5=(x+y):(-1)$ のとき、 $\frac{x^2+y^2+z^2}{yz+zx+xy}$ の値を求めよ。(センター試験改)」
 $\frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{5} = \frac{x+y}{-1} = k$ とおくと、 $y+z=8k, z+x=5k, x+y=-k$ となり、 k を定数と考えて連立方程式を解くと、 $x=-2k, y=k, z=7k$ となる。これを問題の式に代入して、 -6 となる。

この意味を考えておこう。(第 6 章、直線の式を参照) 空間の点 (x_1, y_1, z_1) を通る直線は

$$\frac{x-x_1}{\ell} = \frac{y-y_1}{m} = \frac{z-z_1}{n}$$

と表される。この比の値を t とおくと、 $x=\ell t+x_1, y=mt+y_1, z=nt+z_1$ となる(このとき、 t を媒介変数という)。 (ℓ, m, n) は直線の向き(傾き)を決める数で、 $\ell^2+m^2+n^2=1$ のとき、方向余弦という。 t を具体的に与えようと、 (x_1, y_1, z_1) から (ℓ, m, n) の t 倍だけ移動した点 (x, y, z) がきまる。

したがって、 $\frac{y+z}{8} = \frac{z+x}{5} = \frac{x+y}{-1} = t$ から $x=-2t, y=t, z=7t$ となることは、 $\frac{x}{-2} = \frac{y}{1} = \frac{z}{7}$ 、すなわち、原点をとり、 $(-2, 1, 7)$ の方向の直線を与えたことになる。その上のどの点でも、問題の式の値は t によらない。

〔例題 2〕 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c}$ のとき、この式の値を求めよ。

$$\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = k$$
 とおくと、 $b+c=ka, c+a=kb, a+b=kc$ 。

片々加えあわせると $2(a+b+c) = (a+b+c)k$ 、 $(a+b+c)(k-2) = 0$ となる。

(1) $a+b+c=0$ のとき、 $\frac{b+c}{a} = \frac{c+a}{b} = \frac{a+b}{c} = -1$

(2) $k=2$ のとき、 $a=b=c$ となる。

よって、答え $-1, 2$ 。

これは、数学をよく勉強したヒトは、

$$\text{各辺に } 1 \text{ を加えて、} \quad \frac{a+b+c}{a} = \frac{a+b+c}{b} = \frac{a+b+c}{c}$$

$$a+b+c \neq 0 \text{ の場合、} \quad a=b=c \quad \text{となり、} \quad 2,$$

$$a+b+c=0 \text{ の場合、} \quad -1 \quad \text{と解答するだろう。}$$

2.2.3 大小関係…不等式

数に大小関係を導入すると、数の世界が大きく広がり、数の理解が飛躍的に深まる。これを含めた公理的な展開は、中学数学の範囲を大きく超える。大小関係の基本性質は、「代入原理」などの 1 つの原理から導くことはできない。中学数学では(また高校数学でも)、以下のように定めておこう。そして、等式と上手くお付き合いをつけ、少しずつ数の本質的理解に近付いていく。

大小関係の基本性質

- (a) $A < B$ のとき、 $B > A$ と表す。
- (b) すべての数 A は、 $A < 0, A = 0, A > 0$ のいずれか一つである。
- (c) $A < B, B < C$ ならば $A < C$ 。
- (d) $A < B$ ならば $A + C < B + C$ 。
- (e) $A < B$ のとき、 $C > 0$ ならば $AC < BC$ 、 $C < 0$ ならば $AC > BC$ 。

大小関係は、数直線上の右にある点の表す数は左にある数より大きいことと同じことである。いずれも納得できる。これらは等式の基本性質と矛盾しないように、しかもそれに大小の関係を付加した関係になっている。

いずれにしても、当面の計算を円滑に進めるために暫定的に整理したもので、不完全な系(公理系)である。しかし、そうであっても、式や関係式を計算するとは、計算の基本法則、等式の基本性質、大小関係の基本性質を用いて目的の形に導くことだと理解しておかねばならない。

〔参考〕 不等式の性質

不等号の記号の約束

性質 1 $a \leq b \iff b \geq a$

性質 2 $a < b \iff b > a$

性質 3 $a \leq b \iff a = b \text{ または } a < b$

性質 4 $a \geq b \iff a = b \text{ または } a > b$

順序の公理

性質 5 $a \leq a, a \geq a$

性質 6 $a \leq b \text{ かつ } b \leq a \text{ ならば } a = b$

性質 7 $a \leq b \text{ かつ } b \leq c \text{ ならば } a \leq c$

順序が数で成立するため

性質 8 $a \leq b \text{ かつ } c \leq d$

ならば $a + c \leq b + d$

性質 9 $a \leq b$ ならば $-b \leq -a$

性質 10 $0 < a, b$ ならば $0 \leq ab$

2.3 式の取り扱い

2.3.1 多項式の整理

変数 x はあらかじめそのとりうる値の範囲—変域が決められている。自然数、整数、これまでに習った全ての数、あるいは $-3 < x \leq 3.4$ を満たす全ての数、などである。いくつかの変数 x, y, z, \dots のそれぞれの累乗 (0 以上の指数) と既に確定している数の積で表される式を単項式という。単項式 $-3.5x^2y^3$ では、 x^2y^3 の係数は -3.5 といい、 x に関する次数は 2, y に関する次数は 3, 単項式の次数は 5 という。

単項式がいくつか和の形で集まったものを多項式という。そのときの一つ一つの単項式を項という。多項式の中で一番次数の高い項の次数を多項式の次数という。

多項式には、分数や無理数の係数が入っていても良い。たとえば、 $\frac{2}{3}x^2y + \sqrt{2}xy^2$ なども多項式である。一方、 $\frac{1}{x}$, $\frac{x+y}{x-y}$, \sqrt{x} などは多項式ではない。ここで扱うのは、全て「多項式」についての考え方であり、数学的には「整数」について行ったと同じ議論に属する。 $\frac{1}{x}$ は分数式、 \sqrt{x} は無理式などと区別して呼ぶ。応用においては、多項式ではない問題も出てくるが、考え方は多項式の考え方を用いていることに注意して欲しい。

多項式の整理とは、数の計算法則を使って、目的の形の式に変形することである。目的の形には次のような場合が考えられる。

多項式の整理 同類項, 降べき, 昇べき

多項式において、変数部分が同じである項を同類項という。降べきとは次数の高い項から並べる、昇べきとは次数の低い項から並べることを言う。

同類項があると、たとえば

$$\begin{aligned} & 3x^2y + 4xy^2 - x^2y + 5y - 4 \\ &= (3x^2y) + (+4xy^2) + (-x^2y) + (+5y) + (-4) = (3x^2y) + (-x^2y) + (+4xy^2) + (+5y) + (-4) \\ &= (3 \times x^2y) + (-1 \times x^2y) + (+4xy^2) + (+5y) + (-4) \\ &= (3 - 1) \times x^2y + (+4xy^2) + (+5y) + (-4) = 2x^2y + 4xy^2 + 5y - 4 \end{aligned}$$

のように、同類項は一つにまとめることができる。

一般に、2つの式 $f(x)$ と $g(x)$ が「式として等しい」とは、定義域が一致し、その全ての点で値が等しいことを言う。「式として等しい」は、「恒等的に等しい」ともいい、 $f(x) = g(x)$ は恒等式という。式の変形や、同類項をまとめたり、展開、因数分解などは恒等的に等しい計算を行っている。

同類項をまとめた2つの多項式

$$\begin{aligned} f(x) &= a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 \\ g(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \dots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

が等しいとは、 $a_n = b_n, a_{n-1} = b_{n-1}, \dots, a_1 = b_1, a_0 = b_0$ のとき、かつそのときに限る、と定義し、そのとき、 $f(x) = g(x)$ と表す。したがって、これは恒等式である。

また、2つの n 次の多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が相異なる $n+1$ 個の x で等しければ、 $f(x)$ と $g(x)$ は一致する (「代数学の基本定理」から予想できますね)。多項式と同類項をまとめる、という操作は多項式を一意的に表現するという意味で全ての議論の出発点となるから極めて重要な操作になる。逆に、多項式の議論では、その多項式と同類項はすでにまとめられているとみなして議論すればよい。

多項式の整理 対称式

多項式が対称式であるとは、変数を任意にいくら入れ替えても、結果としてもとの形と同じ式になることをいい、交代式とはどの1組の変数を入れ替えても符号が逆になる多項式のことをいう。また、一般の基本対称式の定義を省き、2変数 x, y の場合は $x+y, xy$ を、3変数の場合は、 $x+y+z, xy+yz+zx, xyz$ のことをいう。差積とは2変数の場合 $x-y$ 、3変数の場合 $(x-y)(y-z)(x-z)$ をいう。一般に、

任意の n 変数の対称式は n 変数の基本対称式で表すことができる。(「対称式の基本定理」)
任意の交代式は差積と対称式の積で表すことができる。

したがって、対称式は基本対称式に、交代式は差積と対称式の積に整理することができる。

大学生になれば、対称式の基本定理の一般的な証明法に接するだろうが、これは中学、高校の数学の範囲を超える。しかし、中学生にとっても、対称式の基本定理は不可欠であり、証明なくしてそれを利用するのは数学の学習法ではない。したがって、対称式の基本定理を証明せざるを得ない。表現はいろいろあるが、簡単なものを知らない。一例を順序を追って示しておく。

始めに、「数学的帰納法」と呼ばれる非常に良く用いられる証明法を、例を用いて説明する。

「 $n \geq 5$ のとき、 $2n + 1 < n^2 < 2^n$ である。」を証明しよう。

$$2n + 1 < n^2 < 2^n \cdots \textcircled{1}$$

まず、 $n = 5$ について、 $\textcircled{1}$ が成立することを確かめる。

$$2n + 1 = 11, n^2 = 25, 2^n = 32 \text{ であり、} 11 < 25 < 32 \text{ より、} \textcircled{1} \text{ は成り立つ。}$$

つぎに、 $n = k$ ($k \geq 5$) について、 $\textcircled{1}$ が成り立つとする。すなわち、 $2k + 1 < k^2 < 2^k$ を仮定する。

$n = k + 1$ のとき、

$$n^2 - (2n + 1) = (k + 1)^2 - \{2(k + 1) + 1\} = k^2 - 2 > 0$$

$$2^n - n^2 = 2^{k+1} - (k + 1)^2 = 2 \cdot 2^k - (k + 1)^2 > 2k^2 - (k + 1)^2 = (k - 1)^2 - 2 > 0$$

よって、 $n = k + 1$ のときも、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。したがって、5 以上の全ての整数について、 $\textcircled{1}$ は成り立つ。

以上のような証明法が、数学的帰納法である。

多項式は同次式のグループの和の形で書かれる。多項式の変数の入れ替えによって多項式が変わらないことは、各次のグループにおいて変数の入れ替えによってそのグループが変わらないことを意味する。したがって、証明は、同次式について行っておけばよい。ここでは、2変数、3変数の「対称式の基本定理」を、読みやすくするため、埋め込み式の演習問題に仕立てておく。辛抱して読み通して欲しい。

〔演習1〕 2変数 (x, y) の基本対称式は $x + y, xy$ の2つである。以下は、2変数の場合の対称式の基本定理の証明である。空欄をうめよ。

$f(x, y)$ を対称式とする。 $f(x, y) = 0$ であるか、 $f(x, y)$ の次数が0(すなわちが $f(x, y)$ が定数) のときは、成り立つ。 $f(x, y)$ の次数が1以上とする。 $g(x) = f(x, 0)$ とおく。多項式 $g(x)$ は0ではないとする(0の時は、 $f(x, y)$ が因数 xy を持ち、後の議論に含まれる)。 $h(x, y) = f(x, y) - g(x + y)$ とおくと、 $h(x, y)$ は対称式で、 $h(x, 0) = \textcircled{\text{a}}$ となる。因数定理より、 $h(x, y)$ は $\textcircled{\text{b}}$ で割り切れる。 $h(x, y)$ は対称式であることから $h(x, y)$ は $\textcircled{\text{c}}$ で割り切れる。よって、 $h(x, y) = xyp(x, y)$ を満たす対称式 $p(x, y)$ が存在する。 $g(x + y)$ の次数は、 $g(x)$ の次数と等しく、 $g(x) = f(x, 0)$ の次数は、 $f(x, y)$ の次数より小さいか、等しいので、 $h(x, y)$ は0か、または $h(x, y)$ の次数が $f(x, y)$ の次数より小さいか、等しくなる。よって $p(x, y) = 0$ または $p(x, y)$ の次数は $f(x, y)$ の次数より小さくなる。帰納法より $\textcircled{\text{d}}$ は基本対称式の多項式となる。よって $f(x, y) = \textcircled{\text{e}} + xyp(x, y)$ は基本対称式の多項式となる。

(a) 0 (b) y (c) xy (d) $p(x, y)$ (e) $g(x + y)$

〔演習2〕 3変数 (x, y, z) の基本対称式は $x + y + z, xy + yz + zx, xyz$ の3つである。以下は、3変数の場合の対称式の基本定理の証明である。空欄をうめよ。

$f(x, y, z)$ を対称式として、 $f(x, y, z)$ の次数に関する帰納法で証明する。

$f(x, y, z) = 0$ 、あるいは $f(x, y, z)$ の次数が0の時 ($f(x, y, z)$ が定数の時)、は成り立つ。

$f(x, y, z)$ の次数が1以上とする。 $f(x, y, 0)$ は x と y に関する対称式になる。よって、2変数の対称式の基本定理より、 $f(x, y, 0) = g(x + y, xy)$ を満たす0ではない多項式 g が存在する。 $h(x, y, z) = f(x, y, z) - g(x + y + z, xy + yz + zx)$ とおくと、 $h(x, y, z)$ は対称式で、 $h(x, y, 0) = \textcircled{\text{a}}$ となる。因数定理より、 $h(x, y, z)$ は z で割り切れる。 $h(x, y, z)$ は対称式であるから $h(x, y, z)$ は $\textcircled{\text{b}}$ でも割り切れる。よって $h(x, y, z) = xyzp(x, y, z)$ をみたす対称式 $p(x, y, z)$ が存在する。 $g(x + y + z, xy + yz + zx)$ の次数は、 $g(x + y, xy)$ の次数と等しく、 $g(x + y, xy) = f(x, y, 0)$ の次数は、 $f(x, y, z)$ の次数より小さいか、等しいので、 $h(x, y, z)$ は $\textcircled{\text{c}}$ 、または $h(x, y, z)$ の次数が $\textcircled{\text{d}}$ の次数より小さいか等しくなります。よって $p(x, y, z) = 0$ 、または $p(x, y, z)$ の次数は $f(x, y, z)$ の次数より小さくなる。帰納法の仮定により $\textcircled{\text{e}}$ は基本対称式の多項式である。よって $f(x, y, z) = g(x + y + z, xy + yz + zx) + xyzp(x, y, z)$ は基本対称式の多項式となる。(a) 0 (b) xyz (c) 0 (d) $f(x, y, z)$ (e) $p(x, y, z)$

〔演習3〕 2変数の場合について、交代式は差積と対称式の積であることを証明せよ。

$f(x, y)$ を交代式、すなわち $f(x, y) = -f(y, x)$ とする。 $x = y$ とおくと、 $f(x, x) = 0$ 。これは因数定理より、 $f(x, y)$ が因数 $x - y$ を持つことを意味する。 $f(x, y) = (x - y)g(x, y)$ 、 $g(x, y)$ は多項式とおく。これを $f(x, y) = -f(y, x)$ に代入して、 $(x - y)g(x, y) = -(y - x)g(y, x)$ 、 $(x - y)(g(x, y) - g(y, x)) = 0$ となる。これが常に成り立つために

は、 $g(x, y) = g(y, x)$ 。

特に対称式については応用は広い。

① $x^2 + xy + y^2 = (x + y)^2 - xy$, $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$

② $x + y = 10, xy = 16$ のとき、多項式ではないが、

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{xy}{x+y} = \frac{x+y}{xy} + \frac{xy}{x+y} = \frac{10}{16} + \frac{16}{10} = \frac{89}{40}$$

③ $a = \frac{1}{2}, b = -\frac{1}{3}, c = -\frac{1}{6}$ のとき、多項式ではないが、

$$\frac{b+c}{a} + \frac{c+a}{b} + \frac{a+b}{c} = \frac{(a+b+c)(ab+bc+ca) - 3abc}{abc} = -3$$

④ 数 a, b, c があり、 $a + b + c = \frac{23}{20}, \frac{1}{a+b} + \frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} = 6$ のとき、

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b}$$

$$= \frac{(a+b+c) - (b+c)}{b+c} + \frac{(a+b+c) - (c+a)}{c+a} + \frac{(a+b+c) - (a+b)}{a+b}$$

$$= (a+b+c) \left(\frac{1}{b+c} + \frac{1}{c+a} + \frac{1}{a+b} \right) - 3 = \frac{23}{20} \times 6 - 3 = \frac{39}{10}$$

これは、対称式を意識して式を変形した結果である。

⑤ $ab = 4, ab^2 - a^2b + a - b = 48$ のとき、 $a^2 + b^2$ の値を求めよ。(西大和学園高)

交代式 $ab^2 - a^2b + a - b = (b-a)(ab-1) = 48$ に $ab = 4$ を代入して、 $b-a = 16$ 、
 平方して対称式にして、 $a^2 - 2ab + b^2 = 256$ 、よって $a^2 + b^2 = 256 + 2ab = 264$

⑥ $m - n = 2, mn = 4$ のとき、 $(n^2 + 1)m - (m^2 + 1)n$ の値を求めよ。(13, 東大寺学園高)

m, n の交代式であることに注目して、

$$(n^2 + 1)m - (m^2 + 1)n = n^2m - m^2n + m - n = -mn(m-n) + (m-n) = (m-n)(-mn+1) = -6$$

⑦ 4次の交代式 $x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x)$ は直ちに

$$x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) = (x-y)(y-z)(z-x) \times (x+y+z) \times c, c: \text{定数}$$

となり、 x^3 の係数の比較から、 $c = 1$ が得られ、因数分解

$$x^3(z-y) + y^3(x-z) + z^3(y-x) = (x-y)(y-z)(z-x)(x+y+z)$$

ができたことになる。

2.3.2 展開, 因数分解

式の形を全体として積の形から和の形に変形することを展開という。

[展開公式	
	(0) $m(a+b) = ma + mb$	分配法則
	(1) $(x+a)(x+b) = x^2 + (a+b)x + ab$	
	(2) $(x+a)^2 = x^2 + 2ax + a^2$	和の平方
	(3) $(x-a)^2 = x^2 - 2ax + a^2$	差の平方
	(4) $(x+a)(x-a) = x^2 - a^2$	和と差の積

(1) から (4) は、何度も証明し、覚えておこう。

高校では、 $(ax+b)(cx+d) = acx^2 + (ad+bc)x + bd$ 及び 3 次の項を含む展開公式が出てくるが、気にすることはない。しかし

$$(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$$

ぐらひは覚えておこう。 a, b, c のサイクリックな並びを訓練するために良い公式だからだ。

展開は、たとえば

$$(x+a+3)(x+a-3) = \{(x+a)+3\}\{(x+a)-3\} = (x+a)^2 - 3^2 = x^2 + 2ax + a^2 - 9$$

のように、括弧を使って展開しよう。 $M = x+a$ などと置くことは、説明としては有益だが、式全体の特性をつかむ練習としては無駄なことである。

以下に、因数分解の一つの技法を紹介するが、これは最善の技法というわけではない。ただ、この技法

を用いると、高校入試レベルの因数分解の問題で短時間で解けない問題は出てこない。高校のテキストなどでよく使われる因数分解の「たすき掛け」の図などは使わないでおこう。間違いなく、式の個性の理解の障害になる。また、学習過程においては、二次方程式を学んでいないから、それは、一時的に飛ばしておけばよい。

計算の各ステップで、以下の処理を上から順に考慮する。

因数分解の技法

- (a) 共通因数でくくる。
- (b) 2次の展開公式を適用する。
- (c) 二次方程式の解の公式が使えないか。
- (d) 括弧を活かす。
- (e) 次数の低い文字について整理する。
- (f) いじめられっ子に注目する。
- (g) 同次の項がそれぞれ因数分解できないか。
- (h) 複二次式ではないか。

上の技法で、追加的な注意を記しておこう。

1 $4a^2 - x^2 + 2xy - y^2$

因数分解の技法で一つだけ、聞き慣れない言葉があったと思う。この問題では、 a だけは孤立しており、完全に他の変数と分離している。したがって、 a を含む項だけ差別扱いし、他の項だけで因数分解してみる。 $4a^2 - x^2 + 2xy - y^2 = 4a^2 - (x - y)^2 = (2a + x - y)(2a - x + y)$ 。何のことはない、平方の差の公式を適用したに過ぎない。 a が孤立していることを明確に把握しておけば、結果として、他の変数 x, y とも手を結ぶことが出来た。 a をいじめられっ子と呼ぶ所以である。

2 $6x^2 - 7x - 20$

中学では計算練習の問題としては出てこないが、応用問題のなかでよく出てくる。いわゆる「たすきかけ」 $(ax + b)(cx + d) = acx^2 + (ad + bc)x + bd$ の問題である。

因数の係数は全て整数、と予想して因数分解を試みる。2次の係数が6だから $1 \times 6, 3 \times 2$ の2組、定数項は符号を別にすると $1 \times 20, 2 \times 10, 4 \times 5$ の3組のみだ。したがって $(x \pm \text{ア})(6x \pm \text{イ})$ の形だとすると元の式は共通因数2をもっていないからイの部分は奇数であり、1か5となるがいずれも解とはならない。したがって整数係数で因数分解できるとすれば、 $(3x \pm \text{ア})(2x \pm \text{イ})$ の形となる。この場合もイは1か5のみである。±は元の一次の係数が負だから $3 \times \text{イ}, 2 \times \text{ア}$ の大きい方が負となる。これをイが1の場合と5の場合に付いて調べればよい。したがって $(3x + 4)(2x - 5)$ となる。慣れると、この程度の因数分解は2、3秒でできるようになる。常にその都度論理を組み立て計算することが重要である。そうすると、どの範囲で因数分解できる、できない、が自然に判断できる。

$$3x^2 + 7x - 6 = (3x - 2)(x + 3) \quad \text{なら 2秒以内} \text{にできる。}$$

当メモでは、数学的な構造の理解には常に的確な図を描くことを薦める。しかし、適切でない図は理解の障害になることもある。速さ、時間、道のりの怪しげな絵は百害あって一利なしだ。それらの関係を忘れたら、できるだけ簡単に具体的な例、たとえば毎秒3mで2秒歩いたら6m進む、と考え、それを一般化するという作業を頭の中で行えばよい。

〔問題〕 次の各式を因数分解せよ。

- (1) $2x^2 + 5x + 2$ (2) $6x^2 + 13x - 15$
- (3) $6x^2 + 11x - 10$ (4) $5a^2 - 17ab + 6b^2$

$$(1) (2x + 1)(x + 2) \quad (2) (6x - 5)(x + 3) \quad (3) (2x + 5)(3x - 2) \quad (4) (5a - 2b)(a - 3b)$$

しかし、因数分解の手法(c)を用いるといずれもこれらは簡単に因数分解できる。二次方程式の学習のところで詳細は記すが、 $6x^2 - 7x - 20 = 0$ に二次方程式の解の公式を適用して、

$$x = \frac{-(-7) \pm \sqrt{(-7)^2 - 4 \times 6 \times (-20)}}{2 \times 6} = \frac{7 \pm \sqrt{529}}{12} = \frac{7 \pm 23}{12}, \quad x = \frac{5}{2}, -\frac{4}{3}$$

したがって、 $6x^2 - 7x - 20 = 6(x - \frac{5}{2})(x + \frac{4}{3}) = (2x - 5)(3x + 4)$ である。

3

$$x^4 + 4x^2 + 16$$

通常, $x^4 + 4x^2 + 16 = (x^2 + 8x^2 + 16) - 4x^2 = (x^2 + 4)^2 - (2x)^2 = (x^2 + 2x + 4)(x^2 - 2x + 4)$ と平方の差に持ち込み, 因数分解する。簡単であり, 応用も広いから覚えておいて悪くない。

しかし, 重要なことは, こうした「解法」を知らなくても, 式の特徴をつかむと, 次のように自然な作業で因数分解できることである。与式が1次式の因数をもたないことはすぐ分かる。したがって, 直ちに

$$x^4 + 4x^2 + 16 = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d)$$

とおける。ここに, この式の豊かな数学的な意味が込められている(しかし, 中学では, 何のために, どんな場合に因数分解するか, 因数分解とは一体どういうことかなど, あまり深めることはできない)。3次の項が0であることから, $a + c = 0$, $c = -a$ となる。そのとき, 1次の項が0であることから $ad + bc = a(d - b) = 0$, $b = d$ となり, 定数項から $bd = b^2 = 16$ より, $b = \pm 4$ となる。したがって, 考えられるのは, $(x^2 + ax + 4)(x^2 - ax + 4)$ か $(x^2 + ax - 4)(x^2 - ax - 4)$ のどちらかである。2次の項が $4x^2$ を考慮して, $b = 4$ となり, $a = 2$ となる。

似た多項式 $x^4 - 7x^2y^2 + y^4$ は平方の差の方法では,

$$x^4 - 7x^2y^2 + y^4 = x^4 + 2x^2y^2 + y^4 - 9x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 - (3xy)^2 = (x^2 + 3xy + y^2)(x^2 - 3xy + y^2)$$

となり, 係数について無理数を容認すれば, さらに因数分解を進めることになる(これについては後で述べる)。

即ち, 係数に無理数を容認すれば, もとの多項式は1次の因数をもつ。しかし, このときでも, $(x^2 + axy + by^2)(x^2 + cxy + dy^2)$ とおいて, 同じ結果を得ることができる。

〔問題〕 次の各式を因数分解せよ。

$$(1) \quad x^4 + x^2 + 1$$

$$(2) \quad x^4 - 11x^2y^2 + y^4$$

$$(3) \quad x^4 - 9x^2y^2 + 16y^2$$

$$(4) \quad 4x^4 + 11x^2y^2 + 9y^4$$

$$(1) \quad (x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) \qquad (2) \quad (x^2 + 3xy - y^2)(x^2 - 3xy - y^2)$$

$$(3) \quad (x^2 + xy - 4y^2)(x^2 - xy - 4y^2) \qquad (4) \quad (2x^2 + xy + 3y^2)(2x^2 - xy + 3y^2)$$

4

因数定理

はじめに, 多項式の表し方 $f(x)$ を確認しておこう。一般に, 「 y は x の関数である」とは, 集合 A の要素 x に対して, 集合 B の要素 y がただ一つ対応することをいう。例えば, 全ての数の集まりのなかの任意の要素 x に対して, $y = 2x + 3$ で全ての数の集まりのなかの要素 y が決まれば, y は x の一次関数という。このとき, $f(x) = 2x + 3$ と表して, x と y の関数関係を $y = f(x)$ と書くこともある。こうしておけば, $f(x)$ は $2x + 3$ の場合だけでなく, 例えば2乗に比例する関数の場合, $f(x) = -3x^2$ としても, 同じ形式で議論を進めることができる。すなわち, $f(x)$ は x が与えられたときの式の値の決まりかたを指している, と見ることができる。特定の $x = A$ に対する式の値は $f(A)$ となる。多項式 $f(x)$ とは任意の x にたいして, x の累乗の項の和から成り立っている式のことである。一般に,

多項式の割り算

多項式 $f(x)$ を多項式 $g(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$, 余りを $R(x)$ とすると,

$$f(x) = Q(x)g(x) + R(x), \quad Q(x), R(x) \text{ は多項式で, } R(x) \text{ の次数は } g(x) \text{ の次数より低い}$$

と定義する。

多項式の割り算が一意的であることを証明しておこう。

もし, 多項式 $f(x), g(x)$ について, 2つの割り算があったとしよう。すなわち,

$$f(x) = Q_1(x)g(x) + R_1(x), \quad Q_1(x), R_1(x) \text{ は多項式で, } R_1(x) \text{ の次数は } g(x) \text{ の次数より低い}$$

$$f(x) = Q_2(x)g(x) + R_2(x), \quad Q_2(x), R_2(x) \text{ は多項式で, } R_2(x) \text{ の次数は } g(x) \text{ の次数より低い}$$

となったとしよう。

$$(Q_2 - Q_1)g(x) = -(R_2 - R_1)$$

R_1, R_2 の次数はともに $g(x)$ の次数より低いから, 右辺は $g(x)$ の次数より低い。一方, 左辺の $Q_2 - Q_1$ が0でないとする, 左辺の次数は $g(x)$ の次数以上となり, 右辺と左辺の次数が等しくなくなる。したがって, 恒に $Q_2 - Q_1 = 0$ となり, また, $R_2 - R_1 = 0$ となる。すなわち, $Q_1 = Q_2, R_1 = R_2$ で多項式の割り算は一意的となる。

重要なことは、多項式の割り算が整数の割り算と同じ形式で定義されていることである。このことが、多項式の多くの性質が、整数の性質と同じ形式の性質に対応することになる。

いま、 $g(x) = x - A$ とすると、 $R(x)$ は定数となる (x を含まない多項式)。したがって、

$$f(x) = Q(x)(x - A) + R$$

両辺に $x = A$ を代入すると、 $f(A) = R$ となる。すなわち、もとの多項式 $f(x)$ に $x = A$ を代入した値は $f(x)$ を $(x - A)$ で割ったときの余り R に等しい (剰余定理)。もし、 $f(A) = 0$ ならば、 $f(x)$ は因数 $(x - A)$ をもつ。

多項式 $f(x)$ が $x - A$ で割り切れるためには、 $f(A) = 0$ であればよい。 (因数定理)

現在、中学では、基本的には分数式 (分母に変数 x を含んだ式)、あるいは多項式の割り算を取り扱わない (反比例は例外である)。近い将来、指導要領の変遷を見極めながら、因数定理、剰余定理、分数式などは中学で学び、高校では計算ばかりでなく、現代代数学の さわり を学習した方がよいだろう。しかし、当面は、多項式の割り算の方法 (積み算) を理解しておけばよいのではないか。

$f(x) = x^3 - x^2 - x - 2$, $g(x) = x^2 + 2x - 1$ とし $f(x) = x^3 - 12x + 9$, $g(x) = x + 3$ として、
て、 $f(x) \div g(x)$ を計算してみよう。 $f(x) \div g(x)$ を計算してみよう。

$$\begin{array}{r} x - 3 \\ x^2 + 2x - 1 \overline{) x^3 - x^2 - x - 2} \\ \underline{-3x^2 \quad -x - 2} \\ -3x^2 - 6x + 3 \\ \underline{ 6x - 5} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2x^2 - 6x + 6 \\ x + 3 \overline{) 2x^3 - 12x + 9} \\ \underline{2x^3 + 6x^2} \\ -6x^2 - 12x + 9 \\ \underline{-6x^2 - 18x + 3} \\ 6x + 9 \\ \underline{6x + 18} \\ -9 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} x^3 - x^2 - x - 2 = (x - 3)(x^2 + 2x - 1) + 6x - 5 \\ \text{すなわち、} \frac{x^3 - x^2 - x - 2}{x^2 + 2x - 1} = x - 3 + \frac{6x - 5}{x^2 + 2x - 1} \\ \text{(分母が } 0 \text{ の議論は省略)} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2x^3 - 12x + 9 = (2x^2 - 6x + 6)(x + 3) - 9 \\ \text{すなわち、} \frac{2x^3 + 9 - 12}{x + 3} = 2x^2 - 6x + 6 - \frac{9}{x + 3} \\ \text{(分母が } 0 \text{ の議論は省略)} \end{array}$$

〔問題 1〕 次の割り算を行いなさい。

(1) $(2x^4 + x^3 + 2x + 1) \div (x^2 + 1)$ (2) $x^4 \div (2x + 1)$

(1) $2x^4 + x^3 + 2x + 1 = (2x^2 + x - 2)(x^2 + 1) + x + 3$

(2) $x^4 = (\frac{1}{2}x^3 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{8}x - \frac{1}{16})(2x + 1) + \frac{1}{16}$

〔問題 2〕 次の因数分解を行いなさい。

$$a^3 + 3a^2b - a^2 - 4a - 12b + 4$$

$$(a + 2)(a - 2)(a + 3b - 1)$$

5 $x^3 - 1$

$f(x) = x^3 - 1$ の場合、 $f(1) = 1^3 - 1 = 0$ だから、 $x^3 - 1$ は一次の因数 $(x - 1)$ を持っていることになる。あとは積み算で $(x^3 - 1) \div (x - 1) = x^2 + x + 1$ を実行し、 $x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1)$ とすればよい。因数定理は $f(A) = 0$ ならば、 $f(x) = (x - A) \times g(x)$ 、 $g(x)$ は多項式 を主張しているだけでどんな $x = A$ が $f(A) = 0$ となるかを見つける方法を教えてはくれない。

しかし、 $f(x)$ が 2 次式の時は、すでに記したとおり、 $f(x) = 0$ を簡単に求めることができる。たとえば $f(x) = 10x^2 + 11x - 6$ のときは、 $10x^2 + 11x - 6 = 0$ について、二次方程式の解の公式を機械的に適用して、 $x = \frac{2}{5}, -\frac{3}{2}$ が得られるから、 $f(x) = (x - \frac{2}{5})(x + \frac{3}{2})g(x)$ となるが、 $f(x)$ は 2 次式だから、 $g(x)$ は定数で、2 次の項が両辺で一致するはずだから $g(x) = 10$ となる。したがって、 $10x^2 + 11x - 6 = 10(x - \frac{2}{5})(x + \frac{3}{2}) = (5x - 2)(2x + 3)$

3 次方程式の解の公式、4 次方程式の解の公式も比較的簡単に導ける (高校で学んで欲しい) が、使にくい。結局 3 次以上の高次多項式について、1 次の因数を機械的に求める一般的で便利な方法はない。

〔問題〕 次の各式を因数定理を利用して因数分解せよ。

(1) $x^3 + 2x^2 - x - 2$ (2) $2x^3 + 5x^2 + x - 2$

(3) $2x^3 - 5x^2y + xy^2 + 2y^3$ (4) $3x^3 + 2x^2 + x + 2$

- (1) $(x-1)(x+1)(x+2)$ (2) $(x+1)(x+2)(2x-1)$
 (3) $(x-y)(x-2y)(2x+y)$ (4) $(x+1)(3x^2-x+2)$

6 $x^3 + 2x^2 - x + 6$ (少し高度。余裕のない人は読み飛ばそう)

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 6 = 0$ となる $x = A$ はどんな条件を満たすのだろうか。 A を有理数だと仮定して考えてみる。次の定理が成り立つ。

「 $f(x) = x^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0 は整数
 が有理数の A に対して, $f(A) = 0$ ならば, A は整数である。」

証明 $A = \frac{p}{q}$, p, q は互いに素な整数とすると, $\left(\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + c_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \dots + c_1\left(\frac{p}{q}\right) + c_0 = 0$
 したがって, $p^n = -q(c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}qp^{n-2} + \dots + c_1q^{n-2}p + c_0q^{n-1})$ となる。

p, q は互いに素より, p^n と q は互いに素である (各自, 整数の復習をしておこう)。しかも, p^n は q の倍数だから, $q = \pm 1$ に限る。よって A は整数となる。

この定理を使うと, 有理数 A にたいして, $f(A) = 0$ となれば, $c_0 = -A^n - c_{n-1}A^{n-1} - \dots - c_1A$ だから, A は c_0 の整数の因数となる。

あるいは, この定理を拡張した次の定理が成り立つ。

「 $f(x) = c_nx^n + c_{n-1}x^{n-1} + \dots + c_1x + c_0$, $c_n, c_{n-1}, \dots, c_1, c_0$ は整数
 が有理数 $\frac{p}{q}$ (p, q は互いに素で, $q \neq 0$) に対して,
 $f\left(\frac{p}{q}\right) = 0$ ならば, p は c_0 の約数, q は c_n の約数である。」

証明 $c_n\left(\frac{p}{q}\right)^n + c_{n-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-1} + c_{n-2}\left(\frac{p}{q}\right)^{n-2} + \dots + c_1\left(\frac{p}{q}\right) + c_0 = 0$

両辺に q^n をかけて,

$$c_np^n + c_{n-1}p^{n-1}q + c_{n-2}p^{n-2}q^2 + \dots + c_1pq^{n-1} + c_0q^n = 0$$

$$p(c_np^{n-1} + c_{n-1}p^{n-2}q + c_{n-2}p^{n-3}q^2 + \dots + c_1q^{n-1}) = -c_0q^n$$

左辺は p の倍数であり, c_0q^n も p の倍数, p と q は互いに素だから, c_0 が p の倍数となる。

よって, p は c_0 の約数である。同様に,

$$c_np^n = -q(c_{n-1}p^{n-1} + c_{n-2}p^{n-2}q + \dots + c_1pq^{n-2} + c_0q^{n-1})$$

だから, c_np^n は q の倍数, p と q は互いに素だから, c_n が q の倍数となる。

$f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 6$ の場合, 6 の因数は $\pm 1, \pm 2, \pm 3, \pm 6$ である。 $x = -3$ のみが解である。従って, $x^3 + 2x^2 - x + 6 = (x+3)(x^2 - x + 2)$

また, $f(x) = 3x^3 + x^2 + 4x - 4$ の場合, $\pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}, \pm \frac{1}{3}, \pm \frac{2}{3}, \pm \frac{4}{3}$ が候補である。 $f\left(\frac{2}{3}\right) = 0$ である。したがって, $f(x) = x^3 + 2x^2 - x + 6 = 3\left(x - \frac{2}{3}\right)(x^2 + x + 2)$

〔問題〕 次の各式を因数分解せよ。

(1) $x^4 - 2x^3 - 13x^2 + 14x + 24$

(2) $x^3 - 6x^2 + 6x - 5$

(3) $x^3 - 2x^2 - 5x - 12$

(4) $x^4 + 2x^3 - 4x^2 - 5x - 6$

(5) $5x^3 - 7x^2 + 12x - 4$

(6) $8x^3 - 2x^2 + 5x - 6$

(1) $(x+1)(x-2)(x+3)(x-4)$ (2) $(x-5)(x^2-x+1)$

(3) $(x-4)(x^2+2x+3)$ (4) $(x-2)(x+3)(x^2+x+1)$

(5) $(5x-2)(x^2-x+2)$ (6) $(4x-3)(2x^2+x+2)$

上の定理は, 単に因数分解の手法というだけでなく, 例えばつぎのような「整数問題」の解決にも役立つ。覚えて置いても悪くない。

〔例題〕 素数 p に対して, $x + y + z = \frac{p}{3}$, $xy + yz + zx = \frac{1}{p}$, $xyz = \frac{1}{p^3}$

を満たす x, y, z が全て正の有理数であるとき, p および x, y, z を求めよ。(’10 旭川医大)

解説は、『中学数学発展』に回す。

7 $x^2 + mx^2 - m^2x - m^2$

技法の (e) を適用しようと思っても, x, m どちらについても 2 次である。こういうときはかまわ

ず、どちらかの変数について整理してみよう。

$x^2 + mx^2 - m^2x - m^2 = (1+m)x^2 - m^2x - m^2$ となり、 x の 2 次の項及び定数項から $\{(1+m)x \pm m\}(x \pm m)$ となる。これより直ちに、 $x^2 + mx^2 - m^2x - m^2 = (x + mx + m)(x - m)$ が得られる。 m について整理しても同じだ。

もちろん、 $x^2 + mx^2 - m^2x - m^2 = x^2 - m^2 + mx^2 - m^2x = (x+m)(x-m) + mx(x-m) = (x+m+mx)(x-m)$ と因数分解できる。計算が進行するには、それなりの合理的な原理が作用しており、これは、たとえば、技法 (g) に基づいたテクニックと考えても良い。しかし、多くの技法を考えるより、より優先順位の高い技法から考える練習をしておいた方がよい。

〔問題〕 次の各式を因数分解せよ。

- | | |
|--|---|
| (1) $x^2 + 4xy + 3y^2 + x + 5y - 2$ | (2) $x^3 - 2x^2y - x + 2y$ |
| (3) $2x^2 - 6xy + x + 3y - 1$ | (4) $a^2 - bc + ca - b^2$ |
| (5) $a(b^2 - c^2) + b(c^2 - a^2) + c(a^2 - b^2)$ | (5') $ab(a-b) + bc(b-c) + ca(c-a)$ |
| | (1) $(x+3y-1)(x+y+2)$ (2) $(x+1)(x-1)(x-2y)$ |
| | (3) $(2x-1)(x-3y+1)$ (4) $(a-b)(a+b+c)$ |
| | (5) $(a-b)(b-c)(c-a)$ (5') $-(a-b)(b-c)(c-a)$ |

8 $x^4 - 4$

$x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2)$ であることは直ちにわかる。 $x^2 - 2$ も因数分解すべきかどうかは出題者の意図によって変わる。 $x^2 - 2 = 0$ の解は $x = \pm\sqrt{2}$ だから、明らかに $x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ となる。 $x^2 + 2x - 1$ は、 $x^2 + 2x - 1 = 0$ を解の公式で解いて $x = -1 \pm \sqrt{2}$ となるから、 $x^2 + 2x - 1 = (x + 1 - \sqrt{2})(x + 1 + \sqrt{2})$ となる。「因数分解」するとは、各因数をもはやこれ以上の素因数に分解できない、というところまで因数の積に分解しなければならない、という前提がある。しかしそのとき、既に「素因数」あるいは「既約な多項式」の定義が前提されている。そこで用いる係数は $\sqrt{2}$ などのような無理数を含んでいてもよいのか、有理数のみでなければいけないのかなどである。あるいはもっと特別に、 $\sqrt{2}$ は含んでいてもよいが、その他の無理数は許さない、などの場合もある。こうした議論は数学にとって極めて重要な意味があり、多項式の理解に欠かすことはできないが、中学、高校の数学ではこれらの議論に深入りしない。出題者の意図を適切に汲み取って判断しなければならない。高校では $x^2 + 2$ も「因数分解可能」であることを学び、さらに全ての有理係数の多項式は因数分解可能であることもわかっている（一次の因数の積に分解可能、代数学の基本定理）。これを用いると、次の定理が得られる。

「 n 次多項式はいくつかの 1 次式といくつかの（一次式の積で表せない）2 次式との積に因数分解される。」（ガウスの定理）

我々は、 $x^4 - 4 = (x^2 + 2)(x^2 - 2) = (x^2 + 2)(x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$ を正解としておこう。

ガウス (Johann Carl Friedrich Gauss) (1777~1855, ドイツ) は数学、天文、物理を中心とした広い分野で史上最も優れた業績を残した科学の巨人の一人である。幼少の頃、1 から百までの和をあっという間に計算した、という逸話は「ガウス算」という名前に残されている。ガウスの法則、ガウスの定理、ガウスの何々、などと呼ばれている定理、法則、その他は数え切れない。このメモでも何度か彼の名前が出てくる。

9 特殊な 3 次式，4 次式

$x^3 \pm a^3$ は因数定理で直ちに因数 $(x \pm a)$ を見つけることもできる。

$$\begin{aligned}
 x^3 \pm a^3 &= (x \pm a)^3 - 3ax(x \pm a) = (x \pm a)\{(x \pm a)^2 - 3ax\} = (x \pm a)(x^2 \mp ax + a^2) \\
 x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz &= (x + y + z)^3 - 3\{x^2(y+z) + y^2(z+x) + z^2(x+y)\} - 3xyz \\
 &= (x + y + z)^3 - 3\{(y+z)x^2 + (y^2 + yz + z^2)x + yz(y+z)\} \\
 &= (x + y + z)^3 - 3\{x(y+z) + yz\}\{x + y + z\} \\
 &= (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx) \\
 a^4 + a^2b^2 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - (ab)^2 = (a^2 + ab + b^2)(a^2 - ab + b^2) \\
 a^4 + b^4 &= (a^2 + b^2)^2 - (\sqrt{2}ab)^2 = (a^2 + \sqrt{2}ab + b^2)(a^2 - \sqrt{2}ab + b^2) \\
 a^4 + b^4 + c^4 - 2a^2b^2 - 2b^2c^2 - 2c^2a^2 &= a^4 - 2(b^2 + c^2)a^2 + (b^2 - c^2)^2 \\
 &= \{a^2 - (b+c)^2\}\{a^2 - (b-c)^2\}
 \end{aligned}$$

$$= -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) \quad (\text{灘高改})$$

高校ではこれらの結果をかなり頻繁に利用するが、高校入試でこれを利用する機会はほとんどない。

これらの因数分解は、一見非常に難しそうであるが、上3つは因数定理を用いれば極めて簡単である。

例として、

$$f(x) = x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$$

を考える。 $f(x)$ は x, y, z の3項の変数の対称式と見ることが出来るから、もし共通因数があるとするれば、3変数の基本対称式のうち、一次の $x+y+z$ がその候補と予想される。したがって、

$$f(-y-z) = 0 \text{ が簡単に導ける。よって}$$

$$\text{積み算で、} (x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz) \div (x+y+z) = (x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

を求めればよい。

下3つは複2次式の常套手段である。

[演習] $a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 - bc^2 - c^2a$ を因数分解すると、 である。

また、 $a = \sqrt{2} + \sqrt{3}$, $b = \sqrt{3} + \sqrt{6}$, $c = \sqrt{2} + \sqrt{6}$ のとき、

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 + 2abc \text{ の値は、} \text{ } \text{ である。} (\text{灘高, 2016 年})$$

c^2 の一次式とみられるから、 c^2 で整理する。

$$a^3 + b^3 - a^2b - ab^2 - bc^2 - c^2a = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 - (a+b)c^2$$

$$= (a+b)(a-b)^2 - (a+b)c^2 = (a+b)(a-b+c)(a-b-c)$$

後半は入試問題の常套手段(後続の小問は、前小問の結果を利用する)に従って、

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 + 2abc = (a+b)(a-b+c)(a-b-c) + c^3 - b^2c - ca^2 + 2abc$$

$$= (a+b)(a-b+c)(a-b-c) + c^3 - c(a-b)^2 = (a+b)(a-b+c)(a-b-c) + c\{c^2 - (a-b)^2\}$$

$$= (a+b)(a-b+c)(a-b-c) + c(c+a-b)(c-a+b) = (a-b+c)(a-b-c)(a+b-c)$$

しかし、これは、かなり特殊な解法である。対称式だから、一次の因数 $(a+b+c)$ を期待したいが、そうではない。3次の同次式だから、因数分解ができるとすると、一つは必ず一次の因数があるはずだ。3乗の項を見ると係数は全て1でなければならない。可能な形は $(a \pm b \pm c)$ である。

$f(a) = a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 + 2abc$ とおくと、 $f(b+c) = 0$ だから、 $f(a)$ は因数 $(a-b-c)$ を持つことがわかる。対称式だから、同様に因数 $(-a+b-c)$, $(-a-b+c)$ をもたねばならない。したがって、

$$a^3 + b^3 + c^3 - a^2b - ab^2 - b^2c - bc^2 - c^2a - ca^2 + 2abc = (a-b+c)(a-b-c)(a+b-c)$$

$$a-b+c = 2\sqrt{2}, \quad a-b-c = -2\sqrt{6}, \quad a+b-c = 2\sqrt{3} \text{ を代入して、} \quad -48$$

10 数値の計算で展開公式、因数分解公式を使うことがある。

$$(1) 6 \times 3.14 + 4 \times 3.14 = (6+4) \times 3.14 = 10 \times 3.14 = 31.4$$

$$(2) 52^2 - 48^2 = (52+48)(52-48) = 100 \times 4 = 400$$

$$(3) 52 \times 48 = (50+2)(50-2) = 50^2 - 2^2 = 2500 - 4 = 2496$$

$$(4) (98)^2 = (100-2)^2 = 100^2 - 2 \times 2 \times 100 + 2^2 = 10000 - 400 + 4 = 9604$$

$$(5) (99 \times 275 + 273) \div 275 \times 85 - (99 \times 275 + 278) \div 275 \times 35 = (100 - \frac{2}{275}) \times 85 - (100 + \frac{3}{275}) \times 35 \\ = 100 \times (85 - 35) - \frac{2 \times 85 + 3 \times 35}{275} = 100 \times 50 - \frac{2 \times 17 + 3 \times 7}{55} = 5000 - \frac{55}{55} = 4999$$

などである。

ノーベル物理学賞を受賞したファインマン (Richard Phillips Feynman) 氏は数値計算が極めてうまかった。ファインマンは筆者がもっとも尊敬する科学者の一人だった。一つ一つの計算の個性を理解し、頭の中に整理されている無数の計算公式を適用されていたのではないだろうか。そろばんや「百ます計算」などばかりやっている計算はうまくならないし、頭をよくすることにもつながらない。同じようなことを数学者ピーターフランクルさんが主張されていることを新聞で読んだことがある。

ファインマンは「ご冗談でしょう、ファインマンさん」(下)の中で、高度な計算になればなるほど「そろばんの達人」よりファインマンの方が計算が速かったこと、そして「彼は、数というものの内容を理解していない」と言っている。そのファインマン先生も原子核物理学者ベーテ (Hans Albrecht Bethe) の計算の旨さには舌を巻いておられる。(これらのことについて、塾では読み物を準備しています。関心があれば資料を請求して下さい。)

- 11 式の扱いに慣れてくると、次のような問題は極めて容易に解ける。

「 $(c-a)^2+3b^2=4b$, $(a-b)^2+3c^2=4c$, $b \neq c$ のとき, a を b, c の一次式で表すと $a = \square$ である。」(灘高)

これは、2つの等式から1つの文字を消去する問題とは異なり、計算の原理がつかみにくい。しかし、条件 $b \neq c$ が付いていることから、等式の扱いで、どこかで因数 $b-c$ が出てくるのが予想できる。因数 $b-c$ を持つ式を作るには、元の2つの式の辺々の差をとればよい。

$$(b-c)\{b+c-2a-3(b+c)+4\}=0 \quad \text{したがって、} \quad b+c-2a-3(b+c)+4=0, \quad a=-b-c+2$$

- 12 前問が容易に解ける人には、以下の問題は簡単である。

「次の問いに答えよ。

(1) $(x+y+3)^2+(y+1)^2=5$ を満たす整数の組 (x, y) は \square 個ある。

(2) a は整数とは限らない定数とし, x, y の連立方程式

$$\begin{cases} ax+y+1=0 & \dots \textcircled{1} \\ x-(2a+2)y-2a-6=0 & \dots \textcircled{2} \end{cases} \quad \text{を考える。}$$

(i) $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ より, a を消去して, x と y の関係式を求めよ。

(ii) 連立方程式 $\textcircled{1}, \textcircled{2}$ を満たす整数の組 (x, y) があるような a の値と, そのときの整数の組 (x, y) をすべて求めよ。」(10 灘高)

(1) について, $(x+y+3, y+1) = (\pm 2, \pm 1), (\pm 1, \pm 2)$ である。したがって,

$$(x, y) = (-1, 0), (1, -2), (-5, 0), (-3, -2), (-3, 1), (1, -3), (-5, 1), (-1, -3) \text{ の } 8 \text{ 通り。}$$

(2)(i) について,

$x \neq 0$ のとき,

$$\textcircled{1} \text{ より, } a = -\frac{y+1}{x}, \text{ これを } \textcircled{2} \text{ に代入して } \frac{2(y+1)^2}{x} + x - 2y - 6 = 0$$

$$\text{分母を払って, } 2(y+1)^2 + x(x-2y-6) = 0$$

$$(1) \text{ の形式に変形すると, } (x-y-3)^2 + (y-1)^2 = 8.$$

$x=0$ のとき, $\textcircled{1}$ より, $y=-1$, $\textcircled{2}$ に代入して, $-4=0$ となり, 解なし。

したがって, 求める関係は, $x \neq 0, (x-y-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ 。

(ii) では, (1) にならって, $(x-y-3, y-1) = (\pm 2, \pm 2)$ の4通り。

これと $x \neq 0$ より, $(x, y) = (8, 3), (4, 3), (4, -1)$

それぞれ, $\textcircled{1}$ に代入して, $a = -\frac{1}{2}, -1, 0$

〔答え〕 (1) 8 (2) (i) $(x-y-3)^2 + (y-1)^2 = 8$ ただし, $x \neq 0$

(ii) $a=0$ のとき, $(x, y) = (4, -1)$

$a = -\frac{1}{2}$ のとき, $(x, y) = (8, 3)$

$a = -1$ のとき, $(x, y) = (4, 3)$

2.3.3 検算の論理

入試に関する限り、式でも数値でも計算できない、方程式などが解けない、ということはない。そうした中で、主に2つの課題、すなわち複雑な計算を短時間に要領よく処理する、間違いを無くする、が残る。ここまでこのメモで記してきたことはこれらに 대응することを目指してきた。しかし、人は間違いや失敗をするものだ。

例えばいま10問のうち1問を間違える程度(間違いの割合が10%)の難しさの計算問題が10問あったとする。テストの結果は90点となるだろう。学校の定期テストや入試の計算問題は大体その程度の問題である。ところが計算問題の場合90点では不合格である。少しの努力によって、いわゆる解けない問題はなくなるからであり、標準以上のレベルの生徒にとっては90点を如何に100点に引き上げるかである。そこで検算が大切となる。もし解を得た方法(解法)とは全く別の方法で解が正しいことを確かめる事ができたならば、その解は正しいことがより確信できる。こうした検算にも計算の間違いが起こり得るが、いまこれを10問のうち1問を間違えると、検算の間違いの割合は0.1(10%)である。従って最終的に間違いの割合は $0.1 \times 0.1 = 0.01$ 即ち1%だから99点とれる。検算の間違いは、解でないものが解であると確かめることで殆ど起こり得ないし、もし解でないと検算が示したなら検算をやり直したり、

解き直すことも簡単にでき、結局ほぼ満点が保証される。

検算は元の問題を解くより一般にずっと簡単である。満点を目指すには、他の人より正確な計算によってもともと正答率を高めておくことも大切であるが、検算の時間を捻出するだけの計算速度も必要である。そのためには日頃の計算練習において、単に速く計算することを心がければよいのではなく、式の型、特徴をつかむ訓練が大切である。数学の計算はそろばんなどと全く異なり、式の中に如何に豊富な意味を見いだし、その意味にもとづいてぱっと答えをだすかである。そろばんを高学年までつづけている人に数学の得意な人は少ない。真面目に練習すれば必ず計算が上手になるというものでもない。一方初めから検算や見直しを考えて、日頃のノートでするように、整理して解答を作成したほうがよい。採点者は勿論解答欄しか見ないが、計算などを小さな隙間に書いたり消したりして、結論にいたる経過を整理して残しておかない様なやり方では、結局見直しや検算で二度手間を要する。用紙が2枚以上あり裏が白紙ならば整理してそれを利用してほしい。

特に検算が威力を發揮するのは以下の場合である。

- (1) 方程式 (1次方程式, 連立方程式, 二次方程式, …)
- (2) 不等式 (1次不等式, 連立不等式, …)
- (3) 恒等式=式の変形 (1次式, 多項式, 式の展開, 因数分解, …)

以上のほかの場合でも検算が有用なものはいくらでもある。検算は完全なものでもなく、部分的に行っただけでも随分正答率が上昇するから常日頃、各々の問題について、検算の方法に関心を持ち続けることが大切である。具体的には塾の授業の中でその都度説明する。

以上、この章は一つ一つは重要な話ですが、全体としてはまとまりのないものになりました。それは中学数学がこの分野の途中段階であることの反映です。

塾には、これらに関して力をつけることが出来るよう配置された系統的なプリントが用意されています。ここでは、いろいろテクニックを書いてきましたが、今に及んでもよく分からないという人は、個人的に質問してください。責任をもって指導します。

中学生にとって、結果として因数分解などは機械的に行えばよいことです。最終的にできなければ、それは君がよほどのサボりかバカのどちらかだ、ということになります。やったけれども答えがなくては合っているかどうか分からない? ご冗談でしょう! 展開すればすむことです。何とか自分で解決しよう、という気持ちさえもてば、この章は「いただき」です。

第3章 図形の基礎

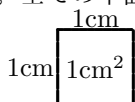
3.1 小学校で学んだこと

図形の学習にはいる前に、小学校で学んだ面積の考えを復習しておく。以下の議論は、全ての中学生にはよくわかっていることだとは思いますが、話の筋道に注意して読んで欲しい。いろいろな公式が有理数をもとに確立していることが理解できるだろう。体積については、第5章「空間図形」を見てほしい。

3.1.1 長さ・距離，角度…省略

3.1.2 長方形と三角形の面積

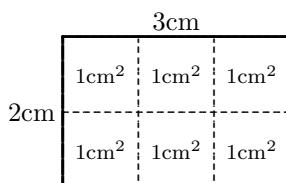
数の掛け算は面積と深く結びついて学習してきたこと(既に、交換法則のところでも述べた)が理解できる。全ての平面図形は三角形に分解して議論できる。したがって、最初の目標は三角形の面積である。



縦1cm，横1cmの正方形の面積を 1cm^2 と約束する。これは、面積の基本の量を定義するものである。したがって、他の図形の面積はこれがいくらあるか、という表現を用いることができる。

「単位 (unit) とは、量を数値で表すための基準となる、約束された一定量のこと」であるが、それはその量の数学的な構成も表現している。 $3\text{m} \times 2\text{m} = 6\text{m}^2$ であり、 6m^2 は $6 \times 1\text{m}^2$ ，すなわち 1m^2 の6倍を意味している。他の単位は理科の授業で学んでください。

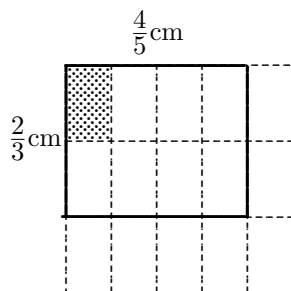
以下簡単のため、例を用いて復習する。



縦2cm，横3cmの長方形の面積は 1cm^2 がいくらあるか、で表すことができる。図のようにこの 1cm^2 の正方形の個数は 2×3 個である。したがって長方形の面積は $2 \times 3\text{cm}^2 = 2\text{cm} \times 3\text{cm}$ となる。すなわち、長方形の面積は(縦の長さ) \times (横の長さ)で表される。

上の議論は縦2cm，横3cmでなくても同様な議論が行え、一般に、縦や横が1cmの整数倍の時、(長方形の面積) = (縦の長さ) \times (横の長さ)が成り立つことを確かめたことになっている。

つぎに、縦や横の長さが分数で表されるときも、どうして長方形の面積は(縦の長さ) \times (横の長さ)となったのかを考えてみよう。これには小学で学んだ分数の掛け算を思い出せばよい。縦、横それぞれ $\frac{2}{3}\text{cm}$ ， $\frac{4}{5}\text{cm}$ の長方形を考える。



それは、縦、横1cmの正方形の縦を3等分、横を5等分した小さな長方形を数えあわせればよい。その小さな長方形は、正方形を 3×5 等分したものの1つだから、 $\frac{1}{3 \times 5}\text{cm}^2$ である。これが 2×4 個ある。面積は言い換えたら 1cm^2 を15等分したうちの8個である。

$$\frac{8}{15}\text{cm}^2 = \frac{2 \times 4}{3 \times 5}\text{cm}^2 = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\text{cm}^2$$

となる。これは、小学で学んだ分数の掛け算の仕方そのもので、右辺の掛け算を左辺のようにすればよい、と学んだ。結局

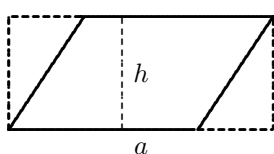
$$\text{長方形の面積} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{5}\text{cm}^2 = \frac{2}{3}\text{cm} \times \frac{4}{5}\text{cm} = (\text{縦の長さ}) \times (\text{横の長さ})$$

となる。上の議論は、整数 a, b, c, d について、 $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$ が成り立つことを説明したことになる。

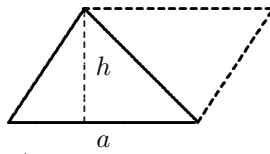
一般には、第2章2.1節の〔例題2〕によって証明される。

縦や横の長さが分数で表すことができない場合(後で、これは無理数ということ学ぶ)も限りなくその無理数に近い有理数を考えてみると、(長方形の面積) = (縦の長さ) \times (横の長さ)という公式が成り立つ。

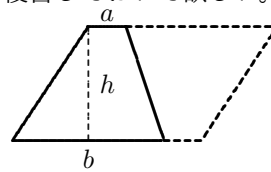
長方形から、平行四辺形、三角形、台形への話の道筋は以下の図で復習しておいて欲しい。



$$S = a \times h \quad (\text{底辺} \times \text{高さ})$$



$$S = \frac{1}{2}ah \quad (\text{底辺} \times \text{高さ} \div 2)$$



$$S = \frac{1}{2}(a+b)h \quad (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ} \div 2$$

平行四辺形の面積、三角形の面積の「ユークリッドの原論」の取り扱いは、多角形の面積の項を参照せよ。

3.1.3 円の面積

円の復習をしておこう。

全ての円は相似である。この円周の直径に対する割合を円周率という。

$$\frac{\text{円周の長さ}}{\text{直径}} = \text{円周率 (半径によらず一定)}$$

すなわち

$$\text{「円周の長さ} = \text{円周率} \times \text{直径} \text{」}$$

となる。この公式の意味は、円周の長さが直径に比例する、ということであり、円周率はその比例定数にすぎないということだ。その根拠は全ての円は相似であり、直径も円周もその図形の長さの量である、ということである。「円周率」とは「円周の直径に対する割合」という意味である。よって、次の式は、公式というより、円周率の定義に近いものである。

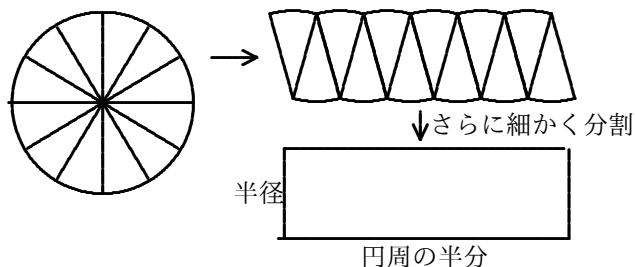
$$l = 2\pi r \quad r: \text{円の半径}, \quad l: \text{円周の長さ} \quad (3.1)$$

円の面積も同様に「半径 × 半径」に比例することが直ぐわかる。この場合の比例定数が円周率であることは、円を小さな扇形に分割し、それを長方形のような形に並べて、縦は半径、横は円周の半分になり、結局円の面積は円周率 × 半径 × 半径であることから理解できる。

半径 r の円の面積 S は

$$S = \pi r^2 \quad (3.2)$$

である。



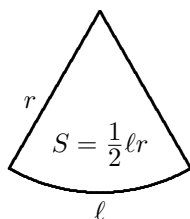
これは、小学校でも塾の授業でも行われるからしっかり実習して理解しておいてほしい。中学生らしい証明は、すぐ後で行う。小学校ではこの円の面積を求める方法は、全く同様に扇形の面積 S を半径 r と弧の長さ l によって表す公式にも適用する。

半径 r 、弧の長さ l の扇形の面積 S

は

$$S = \frac{1}{2}lr \quad (3.3)$$

である。



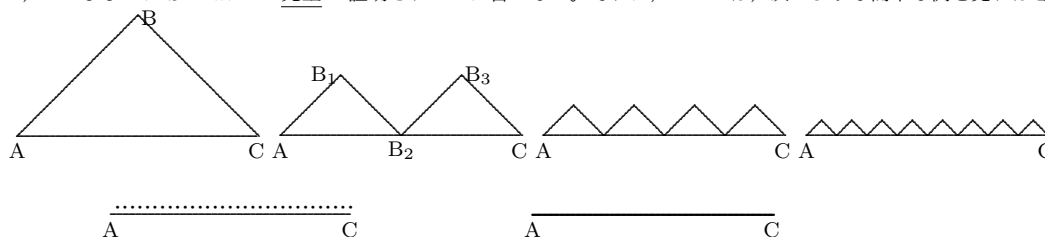
扇形の中心角を x° として、

$$l = 2\pi r \times \frac{x}{360}, \quad S = \pi r^2 \times \frac{x}{360}$$

$$\frac{x}{360} \text{ を消去して, } S = \frac{1}{2}lr$$

からも求められる。

ただし、このままでは $S = \pi r^2$ が完璧に証明されたとは言えない。それは、たとえば、次のような簡単な例を見れば理解できる。

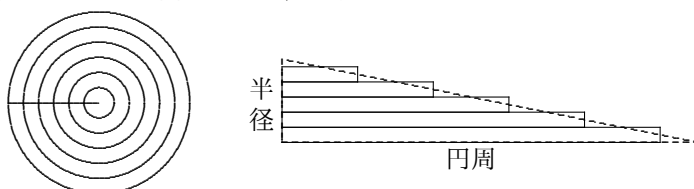


折れ線 ABC は最後には AB と見かけ上同じ長さになる？ 2番目の図は AB, BC の中点で折り返しただけで、折れ線 $AB_1B_2B_3C$ は折れ線 ABC と同じ長さになっている。他も同様で見かけ上最後には折れ線は AC になるから長さは線分 AC だとは言えない。こうした検討が円の面積を求める手続きの中に含まれていなかった。

今の場合、小さな扇形を組み合わせた図形の横の長さは、扇形の中心角をどんどん小さくして、扇形の数を増やせば、円周の半分を超えない範囲で、どんどん円周の半分に近づく。従って、間違いなく、扇形の和の面積は横が円周の半分、高さが半径の長方形の面積にどんどん近づくことになる。

しかし、このように円の面積の公式を求める方法は唯一のものではなく、かなりある説明法（証明）のうちの一つに過ぎない。小学生にもわかりやすい方法となると筆者はそのうちのほんの少ししか知らない。その一つに次のようなものもある。

円に半径の切れ目を入れ、バウムクーヘンのように同心円で細かく分割し、それらを三角形状に積み上げる方法だ。円の面積は三角形の面積となり、半径×円周÷2で $S = \pi r^2$ となる。

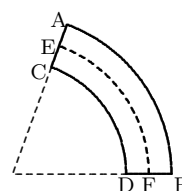


もちろん、これで円の面積が完璧に求まった、と考えてはいけな。いくら細く同心円状の輪を切り抜いても、それを直線上に引き延ばすことはできない。しかし、図の帯状 ABDC の面積は (扇形の中心線である弧 EF の長さ) × (帯の中 AC) である。

あるいは、図から

(弧 AB の長さ) × (帯の中) < (図の帯状 ABDC の面積) < (弧 CD の長さ) × (帯の中)

がわかるから、帯の中を小さくすると、弧の長さを帯のどこをとっても結果に影響がない、すなわち、帯の面積を細い長方形で表せる、と予想できる。



さて、こうして簡単に円周の知識から円の面積がどうして計算できたのかの「秘密」をちょっと考えておこう。バウムクーヘンのように分割して求める方法の方がより直接的にわかりやすいが、いずれも円周は半径に比例する、という性質を利用している。これは、等加速度直線運動 $v = at$ から、変位 $x = \frac{1}{2}at^2$ を求めたのと全く同じ構造になっていることに気が付く。対象が円かどうかにはよらない。必ず適当な図による説明が可能である。

こうした図形を分割して長さや面積を求める考え方は小学ですでに使われており、これの全面的な利用は中学数学の範囲である。後の章で、球の表面積や体積の公式なども同じ考えで簡単にもとめる。

相似を学習した後では、半径 r の円の面積 $S(r) = \pi r^2$ は、半径 r の円の円周の長さを $\ell(r) = 2\pi r$ を用いて巧妙な方法で求めることができる。

Δr を任意の微小量 ($|\Delta r/r|$ が十分小さい) とすると、

相似な図形の面積比は相似比の2乗に等しく、

$$S(r + \Delta r) = \left(\frac{r + \Delta r}{r}\right)^2 S(r) = \left(1 + 2 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r}\right) S(r)$$

また、一方、

$$S(r + \Delta r) = S(r) + \ell(r) \cdot \Delta r + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項}$$

と表せる。したがって、

$$\{2S(r) - \ell(r)r\} \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r} \text{ の高次の項} = 0 \quad \text{よって、} \quad S(r) = \frac{1}{2}\ell(r)r$$

ここで、 $\ell(r) = 2\pi r$ を代入すると $S(r) = \pi r^2$ が、逆に、 $S(r) = \pi r^2$ を代入すると $\ell(r) = 2\pi r$ が得られる。即ち、円周の長さの公式 (実は定義) から円の面積の公式が得られるだけでなく、円の面積の公式から円周の長さが得られることが分かった。

3.2 作図と図形の学習法

中学で学ぶ図形は、全て中学1年で学んだ作図を基礎にしている。ここでは、数学的な根拠は全て後にまわし、「手続き」「方法」としてまとめておく。

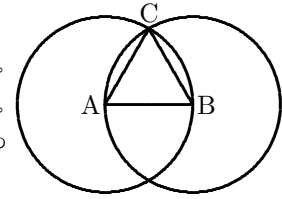
図を定規とコンパスを 公法通り 使って描くことを作図という。

- (1) 与えられた 2 点を結ぶ線分を引く、(2) 線分はいくらでも延長する、
- (3) 与えられた点を中心として、与えられた長さを半径とする円を描く。

「ユークリッドの原論」は次の記述から始まっている。

一卷の 1 「与えられた線分の上に正三角形を作ること」

与えられた線分を AB とする。このとき線分 AB 上に正三角形は次のように作図することができる。
半径 AB の円 A を描き、また半径 BA の円 B を描き、それらの円の交点 C と点 A 、点 B を結ぶ。
点 A は円の中心だから、 $AC=AB$ 、点 B は円の中心だから、 $BC=BA$ 。したがって、 $CA=CB$ 。ゆえに、 $CA=CB=AB$ 。よって、三角形 ABC は正三角形である。しかも線分 AB 上に作られている。

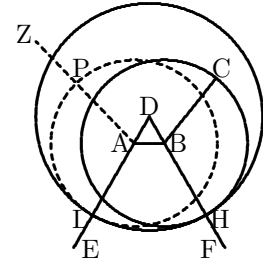


一卷の 2 「与えられた点において与えられた線分に等しい線分を作ること」

与えられた点を A 、与えられた線分を BC とする。このとき点 A において、与えられた線分 BC に等しい線分を次のように作図することができる。

点 A から点 B へ線分 AB を描き、その上に正三角形 DAB を作ることができ、 DA 、 DB の延長上に E 、 F をとり、線分 AE 、 BF を描く。半径 BC の円 B を描き、線分 BF と円 B の交点を H とし、半径 DH の円 D を描く。線分 AE と円 D との交点を L とする。

点 B は円 B の中心だから、 $BC=BH$ 、点 D は円 D の中心だから、 $DL=DH$ 、また $DA=DB$ 。
 $AL=DL-DA=DH-DB=BH=BC$ 。よって、与えられた点 A において与えられた線分 BC に等しい線分 AL が作図できた。



線分を AZ 方向に移動するのならば、半径 AL の円 A を描き、半直線 AZ とこの円 A との交点を点 P とすれば、線分 AP は線分 BC に等しい線分である。

線分 BC を点 B の周りに線分 BH へ、線分 BH を点 D の周りに線分 AL へ、線分 AL を点 A の周りに AP へ、回転移動した形になっている。この図では、線分 BC を AC' に平行移動、 AC' を点 A の周りに AZ の方向に回転移動となっている。以後、「与えられた点において、与えられた方向に、与えられた線分に等しい線分を作ること」ができるとする。これを定理として、明確にしておこう。

線分の移動

線分は、作図の公法に従って任意の位置に移動できる。

注目すべきは、本来、コンパスは円を描くだけの道具であり、長さを移動させる道具ではない、のだが、上の手続きは、通常やるように、円の中心を任意に移動して、円を描き、長さを移動させる道具に利用しても良い、ということを示したことになる。

これらは、殆んど“自明”のこのように思われるが、「ユークリッドの原論」では、統一した議論を行うため、定義、公準・公理のみから出発しており、それから多くの定理を導く(演繹する)ためには、上のような作業が欠かせなかったのである。すなわち、図形で学習すべき主要内容は、こうした作図を基礎に展開される。

通常よく問われる基本の作図は以下のようなものである。

- (1) 直線 l 上にない一点を通る直線 l に平行な直線
- (2) 線分 AB の垂直二等分線
- (3) $\angle AOB$ の二等分線
- (4) 直線 l 上にない 1 点 P から l への垂線 (2つの方法がある)
- (5) 直線 l 上の点 P を通る l に垂直な直線

以上を用いると次のような条件を満たす基本作図が出来る。

- (1) 2 点 A 、 B の最短距離 … 線分 AB
- (2) 1 点 O から等距離の点の集まり … O を中心とする円
- (3) 2 点 A 、 B から等距離の点の集まり … AB の垂直二等分線
- (4) 直線 l から等距離の点の集まり … l に平行な直線 (2つある)
- (5) 2 直線 l, m から等距離の点の集まり … l, m のなす角の二等分線 (2つある)

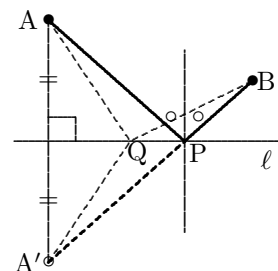
これらの応用としては、3 点 A 、 B 、 C から等距離である三角形 ABC の外心、3 辺から等距離である三角形 ABC の内心、三角形 ABC の 3 中線の交点である重心、3 垂線の交点である垂心の作図がある。また直線について線対称な図形(鏡像)の作図、などがある。これらは本来いずれも「証明」が必要なもの

であるが、ここでは、直感的な理解、で済みます。

作図で問題を解決する場合もある。

「平面上に点Aと点P及び直線 l があって、点Aから直線 l の一点を通り点Bに至る最短経路をもとめよ。」

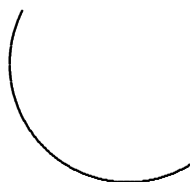
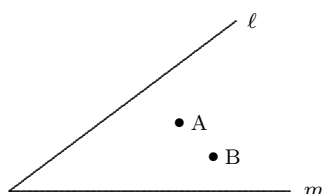
点Aの直線 l に対称な点を A' とし、 $A'B$ と l との交点をPとすると、求める経路は $A \rightarrow P \rightarrow B$ である。他の点Qをとると、 $AQ+QB=A'Q+QB>AB=AP+PB$ だからである。これは、光の反射の条件、「入射光と入射点での反射平面の法線を含む面内で、入射角と反射角が等しい」に合致する。「光は最短経路を進む」という原理は反射の法則をうまく表現している。光の屈折の法則もほとんど同じような原理で説明される。ただし、このときの最短は「時間が最小になる」ということになる。理科で、屈折の法則を学習しておこう。ただし、中学の数学ではこの「最小」はうまく説明できない。媒質によって「距離」の測り方が変わるからだ。



作図法の説明は塾プリントなどに任せる。塾生は中1で作図を学ぶが、復習段階では一つ一つの作図の数学的根拠、証明を考えながら作図して欲しい。

〔演習 1〕 次の図で l 上に P, m 上に Q をとり、 $AP+PQ+QB$ の長さが最小になるように作図せよ。

〔演習 2〕 円の1部が欠けている。中心を求めて、円を完成せよ。



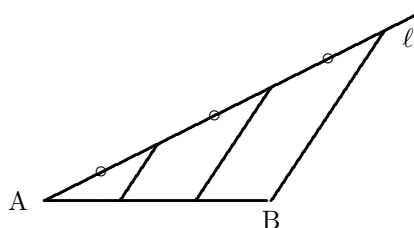
ところで、直線とその直線上にない1点からの距離の比が1のとき（距離が等しいき）は放物線、1より大きいときは楕円、1より小さいとき双曲線になることがわかっている。直線と直線上にない1点からの距離が等しい図形である放物線は定規とコンパスだけでは作図できない。しかし、糸を用いるといとも簡単に描ける。また楕円は2点にピンをたて、2点間より少し長い糸を張る。鉛筆で糸がたるまないように糸を張って紙の上を滑らせると描ける。「楕円は2点からの距離が一定な点の集まりである」という性質があるからだ。必ず実行しておこう。第7章には楕円の性質が記されている。

放物線、双曲線も簡単に描ける（放物線については描き方もふくめて後で学習する、また双曲線の代表は反比例のグラフだ）。任意の角の2等分は出来るが、3等分の作図は出来ない。しかしちょっと道具を工夫すれば描ける。このように数学では、出来る、出来ないという言葉は明確に約束した枠組み—定規とコンパスを公法通り使う—の中で使う言葉である。この辺の事情をもう少し詳しく見ておこう。

図形では定規、コンパスを用いた作図が用いられる。中学数学では分度器は用いない。糸なども用いない。放物線や楕円、双曲線は糸を使うとイトも簡単に描けた。一体どうして定規とコンパスのみを用いて作図するのだろうか。そして以前に述べたが、ちょっと道具を工夫すれば可能であるにも関わらず、「勝手な角の三等分は出来ない」と結論するのだろうか。

これには私たちが学習する図形の基本性質が深く関わっている。図形が点、直線と距離の考えから成り立っているからだ。2点間の直線距離の考えがないのならばコンパスは意味がない。円も出てこない。2点間の距離の考えがなくても、あるいは距離の考えがあっても違った距離の考えに基づいて、2点間には「近い」という考えを持つこともできる。この場合コンパスを持ってきて近い遠いを計量しても意味がない。こう考えると定規やコンパスを用いない図形の考えがあっても不思議でないことに気づく。そうならばそれらを学問することは私たちが学習している図形の拡張になっており、しかもそれらは現実の現象や法則の有効な表現法になっており、さらに進んだ数学の楽しみな課題が広がっていることになる。さて、道具立てが決まったところで、作図を見直してみる。

線分の3等分は線分的一端を通る半直線を引き、コンパスで交点から適当な等距離の点を3つとり、一番離れた点と線分の他の端点を結び、それに平行に他の点を通る直線と元の線分の交点をとればそれが3等分点となることはすぐ理解できる。



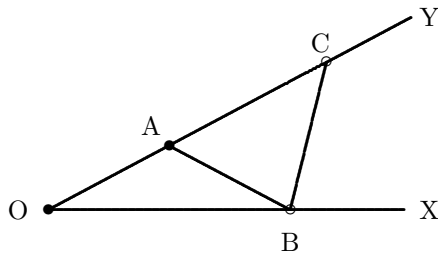
同じように角の2等分, 3等分はできるのだろうか。

角の2等分は角の頂点を中心とする円と角をなす2つの半直線との交点を取り, その交点を中心に等しい半径の2つの円の交点と角の頂点を結ぶと, これが角の2等分線になっていることは知っている。それでは角の3等分線は簡単に作図できるのだろうか。

実は数学では一般の角の3等分はできないことが証明されている。これには少し説明が必要で, 数学で作図するとは, 直線をひく道具の定規と円を画くコンパスのみを用いて, 有限回の操作によって図を画くことと約束している。したがって, 分度器で角度を測って3等分するとか, 無限回操作をすることによって3等分に近づけていくとかは作図とは言わない。したがっていくら工夫をして一般の角の3等分法を考えても無駄である。できないことが証明されているのだから。

「角の三等分は不可能である。」の証明は, アーベルが行った有理数に平方根を次々に加えて行った数(体)の中では, 解が得られない, という議論で証明できる。

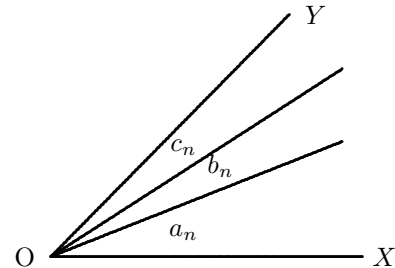
それでは角の3等分はできないのかと言うとそうではなく, 角の3等分の方法は無数に提案されている。たとえば図のような道具を使うと, どんな90度以下の角でも簡単に3等分することができる。



図で, $OA = AB = BC$ であり, 線分OX, OYは点Oで自由に回転できるように蝶番などで留めてあり, 点AはOY上にやはり蝶番で留めてある。折れ線ABCでBも蝶番で留めてあるが, 点B, CはそれぞれOX, OY上をスライドできるようにしてある。 $\angle CBX$ を三等分したい角に合わせると, $\angle XOY$ がその3分の1になる。

このため, たとえば点Cを, 点B, CがOX, OY上をスライドさせながら, $\angle CBX$ が与えられた角になるようにOX上を移動させるとする。点Cが点Oに近すぎると, $\angle CBX$ は与えられた角より大きくなり, 遠すぎると小さすぎたことになる。したがってCをその中点にとって $\angle CBX$ と与えられた角と比較し, 大きすぎたらその点と遠い方の点の中点を新たに点Cとして $\angle CBX$ と与えられた角と比較する。小さすぎたら, その点と近い方の点との中点をCとすればよい(こうしたやり方は数学では広く2分法と呼ばれている)。どうしてこうした操作を繰り返さなければならないかという点, 丁度 $\angle CBX$ が与えられた角に一致するようにCを移動させるということは, 移動する前に事前にどこに移動して良いのかの目標が解っていないからである。これは答えを出す手続きが示されたことにはなっていない。この場合は, これを無限回の操作によって解決しようとしたことになる。このことをもっと明確にさせる角の三等分法を示してみよう。

$\angle XOY$ を適当に2分し, OXに近い方の角を a_0 , 他方の角を2等分して, OYに近い方を c_0 , 真ん中の角を b_0 とする ($b_0 = c_0$)。 a_0 と b_0 の和の角の2等分のうち, OXに近い方を a_1 , もう一方の角(大きさは a_1 と同じ)と c_0 との和の角の2等分のうちOYに近い方を c_1 , 真ん中の角を b_1 とする ($b_1 = c_1$)。つぎに, a_1 と b_1 の平均値を a_2 とし, a_2 と c_1 の平均値を $b_2 = c_2$ とする。これを続けていくと a_n, b_n, c_n はいくらでも角の3等分に近づく。



高校生は, 次のように証明する。各 n 段階での角は $a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}$, $b_n = \frac{a_n + b_{n-1}}{2}$ を満たす。ちよっと工夫して a_n を消去して b_n だけの数列にすると, $4b_{n+2} - 5b_{n+1} + b_n = 0$ となり $b_{n+2} - b_{n+1} = (b_{n+1} - b_n)/4$ したがって $b_{n+1} - b_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n (b_1 - b_0)$, $n = 1, 2, \dots$
 よって $b_n = \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^{(n-1)} \right\} (b_1 - b_0) + b_0$
 ところが一般に, $|r| < 1$ に対して, $S_n = 1 + r + r^2 + \dots + r^{n-1}$ $rS_n = r + r^2 + \dots + r^{n-1} + r^n$
 $(1-r)S_n = 1 - r^n$ よって $S_n = \frac{1-r^n}{1-r}$ したがって $S_\infty = \frac{1}{1-r}$
 $b_\infty = \left\{ 1 + \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots \right\} (b_1 - b_0) + b_0 = \frac{1}{1-1/4} \frac{a_0 - b_0}{4} + b_0 = \frac{a_0 + 2b_0}{3} = \frac{\angle XOY}{3}$
 この手続きによって角の3等分を行ってみて下さい。教材は塾で提供します。

したがって, これも角の三等分法になっている。ただしこれは数学での作図にはなっていない。

2等分と3等分の間にはこのようにずいぶん大きな隔たりがある。物理学では2つの粒子が衝突する

問題をよく扱い、うまく解けるが、3つ以上の粒子の問題では一般にうまく解けなくなってしまう(3体問題)。3という数はある意味で無限大を意味する場合もある。

数値計算の世界では、ニュートン法とよばれる繰り返しによる方程式の解法がある(この話題は平方根のところでもう一度取り上げる)。たとえば \sqrt{a} , ($a > 0$)の計算は、ニュートン法では適当な x_0 から始めて

$$x_k = \frac{1}{2}\left(x_{k-1} + \frac{a}{x_{k-1}}\right), \quad (k = 1, 2, \dots)$$

によってどんどん x_k を \sqrt{a} に近付ける。

これには解のおおよその値を用いて近似値を計算すると誤差が2乗で小さくなるという性質(二次収束という)がある。 $\sqrt{2}$ の計算では

$$x_0 = 2.0, \quad x_1 = 1.5, \quad x_2 = 1.41666, \quad x_3 = 1.41421$$

これによると誤差が10分の1以下の近似値から出発すると1回目の近似値で有効数字2桁で正しい値となる。これを用いてもう一度計算すると4桁まで正しくなる。3回目では8桁まで正しい結果が得られる。数学的には無限回これを繰り返していくらでも真の値に近づけることができる。ところで計算機でこれを行うとすると、普通の小数点つきの数を扱うとき、計算機の持っている有効数字は7桁ぐらいになっているから、計算機で上の計算を4回、5回と繰り返しても計算の精度は何等向上しない。即ち3回が無限回の操作に相当することになる。あながち3を非常に大きい数と表現することを笑えないことになっている。

しかし逆に、相当大きくとっても本当の姿が見えにくい場合もある。

$$S_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

などは、 n が無限に大きくなっても S_n は有限のように思われるが、これが無限大に発散することを高校で学ぶ。 n が有限の範囲で、大きくなったときの予想を安易にするととんでもない間違いをすることになる。したがってこれら(無限大や、無限小、極限、連続など)を厳密に扱う手法が物事の理解に欠かせないことが理解できる。これは、高校に入ってから楽しみだ。

キーワードは「有限回の操作」であった。「定規とコンパスを使って有限回の操作で、一般の角の3等分はできない」というのが主張である。しかし、「ガロアの理論」やそれに先立つアーベルの理論は大学に入ってからだ。

逆に、厳密な意味では、作図できる図形、すなわち定規とコンパスの有限回の操作による図形のみが我々の対象とする図形となる(存在しない図形を議論しても意味がないからだ。しかし、このことは余り深く追求しないでおう)。定規、コンパスを使った正確な作図は図形の学習に欠かせない一面である。大きく描くことは正確に描くことに通じる。大きくしっかしたイメージを頭にたたき込んで欲しい。そのなかから普遍的な性質や法則を読みとることが図形の学習の原点である。そして次にその根拠を論理的に明らかにする。目的にもよるが、基本的にはノートの端に小さな図をチョコチョコと描くようでは効果的な図形の学習は期待できない。

ロシアの数学者ポントリャーギンは14歳で失明した。ご母堂はポントリャーギンのために部屋に糸を縦横に張って、彼が図形を「感じる」ことに貢献した(これは筆者が学生の頃聞いていた話で、実像は少し違うかもしれない)。ポントリャーギンは数学の多くの分野(特に位相幾何学)で不朽の貢献をした。大学生になると、君も何冊かは彼の著作を読むだろう。

図形の学習(全ての学問はそうであるが)では、「そんなことは知っている」、とか「当たり前だ」というのは通じない。主張・結論は、事前にわかっていることが多い。学習の眼目は、その根拠・理由を明確にする、すなわち証明することである。既に明らかになっていること、今の問題で仮定されていることを整理し、それらから如何に結論を論理的に導くかである。数学の答えは国語の答えと殆ど同じで話の道筋を正確に表現することである。色々なことを知っていることは学習結果のごく一部に過ぎない。

学習の要領はじっくり丁寧に学習することである。それぞれの単元を大ざっぱに学習し終えたら、それぞれの定理がどういう関係になっているのか、を自分で整理する。多くの類題を解くよりも、一題一題に力を込め、自力で解くことが大切である。私たちが学習している図形の学問(ユークリッドの幾何学)は2千年以上も前に完成しており、歴史的にも重要な問題は限られており、それらの学習を通じて基本事項を修得することになる。一度解を知れば、その繰り返しは殆ど学習にならない。典型的な問題との遭遇は人の出会いの「一期一会」と同じだ。一題一題を大切に^{いちごいちえ}する姿勢が欲しい。良い加減な取り組みならば、やらない方がよい。見かけの偏差値はだんだん良くなっていっても、数学的な能力は全く付いていない、ということにもなる。せっかくの学習のチャンスを失わないでほしい。

3.3 直線，平行線，角

ここからが図形の本論である。以後，全ての図形は一つの平面に含まれているとする。したがって，この平面は意識しない。点，直線，線分，半直線，角など，およびそれらが「一致する」ということはわかっているとする。

我々の学習の出発点を，2直線の関係にとる。

2つの直線 l, m は交わっているか，平行か，重なっているかのいずれかであるはずだ。重なっている場合は一つの直線と見なすと，2直線の関係は2つの場合があることになる。

まず，2直線 l, m が交わる場合，二組の向かい合った角ができる。この対を「対頂角」という。直ちに

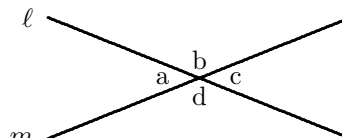
対頂角の性質

対頂角は等しい。

と言える。図についていうと， $\angle a = \angle c$ ， $\angle b = \angle d$ となる。なぜそうなるか，を根拠に基づいて説明することを「証明」という。根拠に基づくとは，すでに正しいこと（真）が判明していること，仮に正しいと明示する事のみを用いて結論を導くことである。

したがって，「対頂角は等しい」の証明は次のようになる。

$\angle a + \angle b = 180^\circ$ ， $\angle c + \angle b = 180^\circ$ 。この2つの等式を片々引く（左辺は左辺から，右辺は右辺から引くことをいう）と， $\angle a = \angle c$ となる。



「対頂角は等しい」のように，根拠をもって証明された重要な事柄を「定理」という。「対頂角は等しい」という定理は，直線上の点では 180° であることおよび，等式の加減の法則が角度についても成り立つことを根拠にしている。一般に，定理を証明しようとするれば，それに先立つ正しいと考えられている主張（命題）が必要である。そうして，それぞれの論拠となる定理をさかのぼっていけば，どうしても証明できないいくつかの出発点になる主張（命題）に行き着く。これを公理という。公理はいくつか集まって公理系を形成する。逆に公理の選択によって，いろいろな数学を構成することもできる。

一方，公理や定理を述べようとする時，言葉でそれを記述しなければならない。あいまいな言葉では厳密な論理的記述はできない。数学的な記述の言葉の約束を「定義」という。たとえば，平行四辺形は「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形」と定義される。有名な話で，例えば「美人」などは数学的な用語ではない。美人の判断は主観的であり，したがって「美人」の集まりは数学での集合にはなれない。中学数学は必ずしも厳密に公理と定義を明確にして展開するものではない。そのレベルや厳密さに応じてのみそれを明示する。数学の歴史もそうであった。

それでは次に，2直線 l, m が交わらないとき，どうなるかを考えてみよう。

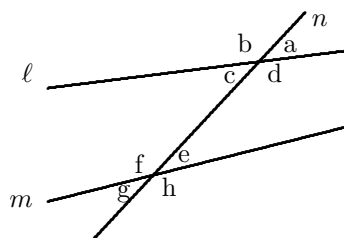
1つの平面内にあって，交わらない2直線を「平行」という。2直線を l, m とすると， l, m が平行ということ「 $l // m$ 」と表す。よく知っているように，2直線 l, m に対して，第3の直線 n が交わったとき，次の定理が成り立つ。

平行線の性質の定理

- (a) 平行な2直線の，同位角は等しい。
- (b) 平行な2直線の，錯角は等しい。

平行線になる条件の定理

- (a) 同位角が等しければ，2直線は平行である。
- (b) 錯角が等しければ，2直線は平行である。



これらの平行線の定理に確かな意味を持たせるためには，同位角，錯角などの定義をはっきりさせなければならない。厳密にこれを定義しようとする時，結構やっかいで，ここでは図でごまかす。同位角… $\angle a$ と $\angle e$ ， $\angle b$ と $\angle f$ ， $\angle c$ と $\angle g$ ， $\angle d$ と $\angle h$ ，錯角… $\angle c$ と $\angle e$ ， $\angle d$ と $\angle f$ とする。同位角の「同位」とは同じような位置関係にある，という意味であり，錯角の「錯」とは，まじる，乱れて入り込む，という状況を表す言葉である。「錯覚」などを知っているだろう。大切なことは，同位角や錯角という言葉は平行線に対してだけ定義された言葉ではなく，一般的な2直線に対して定義されており，したがって平行線の定理が一つの命題となっていることである。

定理は大きく分けて2組からなっている。一方は平行線の性質の定理であり，もう一方は平行線である条件の定理である。性質の定理とは，もし「平行線」ならば必ず「***」といえる，といったときの「***」に相当することを主張する定理である。2直線 l, m が平行ならば，そこにできる同位角や錯角

はそれぞれ等しいというものである。一方、条件の定理は、どうなっていれば2直線は平行と言えるのか、を主張する定理である。同位角に関わる定理と錯角に関わる定理はすでに分かっている「対頂角は等しい」という定理を使うと互いに直ぐ証明できる。したがって、論理的には性質の定理一つと条件の定理一つを考えればよいことになる。

次に問題となることは、「これらは何を根拠に証明されるのか」である。よくよく考えると、どうしても一つ図形の理論を組み立てる上で自覚していなかった公理が必要になる。

平行線の公理

直線上にない1点を通り、その直線に平行な直線はただ一つのみ存在する。

ユークリッドは「原論」の中で幾何学の公理は次の十個だとしている。

「数学一般に関する公理」

- 1 同じものに相等しいものは、また、互いに等しい。
- 2 相等しいものに相等しいものを加えると、結果もまた相等しい。
- 3 相等しいものから相等しいものを引けば、結果もまた相等しい。
- 4 互いに重なり合うものは、相等しい。
- 5 全体は部分よりもおおきい。

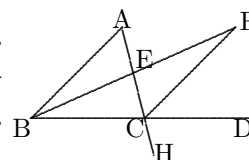
「幾何学に関する公理」

- 1 勝手な点と、これと異なる他の勝手な点とを結ぶ直線は、一つ、そしてただ一つ引くことができる。
- 2 勝手な線分は、これを両方への望むだけ延長することができる。
- 3 勝手な点を中心として、勝手な半径で円をかくことができる。
- 4 直角はすべて相等しい。
- 5 一直線が二直線に交わる時、もしその同じ側にある内角を加えたものが二直角より小さかったならば、二直線はこの方向へ延長してゆけば、必ず交わる。

後の時代になって、『原論』のこの「幾何学に関する公理5」を「平面」の概念を超えて言い換えたのが「平行線の公理」である。ここで、ユークリッドの公理5が「平面」において、「平行線の公理」と同値(同じ内容)であることを一通り(完璧であるかどうかの判別は読者に任せる)証明する。

はじめに、ユークリッドの『原論』の「一巻の16」の、「三角形の外角は内対角より大きい」を証明しておく。

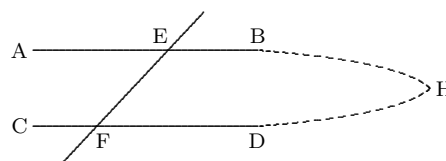
$\triangle ABC$ の BC の延長上に D 、 AC の延長上に H を取る。 AC の中点を E 、 BE の延長上に $BE=EF$ となる F を取る。 $\triangle AEB \equiv \triangle CEF$ (『原論』では、合同の議論は、平行線の議論より先行する)より、 $\angle BAE = \angle FCE$ 、すなわち $\angle BAC = \angle ACF$ 。よって、 $\angle ACD = \angle ACF + \angle FCD = \angle BAC + \angle FCD > \angle BAC$ 。同様に点 E を BC 上に取れば、 $\angle BCH > \angle ABC$ 。対頂角より、 $\angle ACD = \angle BCH$ 。よって、外角 $\angle ACD$ は、どの内対角より大きい。



これを用いて、ユークリッドの公理5から「平行線になる条件の定理」を『原論』にしたがって証明する。

直線 EF が2直線 AB 、 CD と交わり、錯角が等しい、即ち $\angle AEF = \angle EFD$

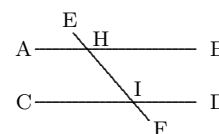
とする。もし $\angle BEF + \angle EFD < 180^\circ$ とすると、ユークリッドの公理5より、 AB 、 CD は延長されて、 B 、 C の側の H で交わる。 $\triangle HEF$ において、外角 $\angle AEF$ が内対角に等しくなり、ありえない。ゆえに AB 、 CD は延長されて B 、 D の側で交わらない。同様に、 A 、 C の側でも交わらない。どちらでも交わらないから、2直線は平行である。



続いて、ユークリッドの公理5から「平行線の性質の定理」を『原論』にしたがって証明する。

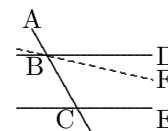
直線 EF が平行線 AB 、 CD に交わり、 $\angle HID < \angle AHI$ とする。

そのとき、 $\angle HID + \angle BHI < \angle AHI + \angle BHI = 180^\circ$ となり、 AB と CD は交わる。これは平行であることと矛盾する。よって、 $\angle HID = \angle AHI$



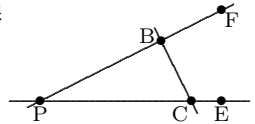
ユークリッドの公理5から「平行線の公理」を導く。

もし、 B を通り、 CE に平行な直線が BD 以外に存在し、それを BF としたとする。 BF が $\angle CBD$ の中にあると、 $\angle CBF + \angle BCE < 180^\circ$ となり、仮定に反する。 BF が $\angle CBD$ の外にあれば、 BF と CE が、 AC の左側で交わり、同様にして、仮定に反する。したがって、 B を通り、 CE に平行な直線はただ一本だけ存在する。



また逆に、「平行線の公理」からユークリッドの公理 $\boxed{5}$ も導ける。

点 D を通り BC に関して E と同じ側にあつて、 $\angle BCE + \angle DBC = 180^\circ$ とすると、直線 BD は直線 CE に平行である。平行ではない場合は、もし右図のように交点 P と点 E が直線 BC の反対側にあつたとすれば、 $\angle BCE + \angle CBF > \angle BCE + \angle BCP$ ($\angle CBF$ の内対角) $= 180^\circ$ となつて、仮定に反する。したがつて、交点 P があれば、直線 BC に関し E と同じ側にある。



点 E と点 F が直線 BC と同じ側にあり、 $\angle BCE + \angle FBC < 180^\circ$ とする。このとき、 $\angle CBF < \angle CBD$ より、直線 BD と直線 BF は一致しない。したがつて、「平行線の公理」から、直線 BF は直線 CE に平行ではない。よつて、直線 CE と交わる。

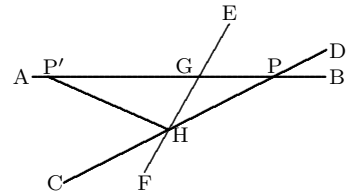
以上の議論に不十分さを感じた人は、高校の教科書に書かれている以下の証明を読んでみよう。

同位角が等しく、2 直線が交わつていたと仮定する (三角形の合同条件「二辺夾角相等」の証明には、平行線の議論は要らない)。2 直線 AB, CD と直線 EF が、それぞれ G, H で交わるとすると、 $\angle EGB = \angle EHD$

2 直線 AB と CD の交点を点 P とする。
点 P' を、図のように $GP' = HP$ となるようにとると、
 $\angle P'GH = \angle EGB = \angle PHG$, $GP' = HP$, GH は共通。

よつて $\triangle P'HG \cong \triangle PGH$, ゆゑに、 $\angle P'HG = \angle PGH$ 。したがつて
 $\angle P'HP = \angle P'HG + \angle GHP = \angle PGH + \angle EGB = 180^\circ$

すなわち、 $P'HP$ は直線になり、異なる 2 直線 AB と $P'HP$ は 2 点 P, P' で交わる。このことは、異なる 2 直線が、ただ 1 点で交わることに矛盾する。したがつて、AB と CD は共有点を持たない。すなわち、AB と CD は平行である。



このように見ていくと、「平行線の公理」、「ユークリッドの公理 $\boxed{5}$ 」、「平行線の性質の定理」、「平行線になる条件の定理」は、我々のレベルでは、同値である。今後、「平行線の性質」と「平行線になる条件」を真の命題とする。

しかし、1824 年頃、ガウスは、「平行線の公理」を「平行線も交わる」という公理に置き換えても幾何学として矛盾が発生せず、それどころかまったく新しい幾何学体系ができることを示唆した。この「平行線の公理」を否定した図形の学問 (非ユークリッド幾何学) は 1929 年ころから次々と展開された。

既に、何度も平行線を用いてきたが、その作図法はどうなつていたのだろうか。「ユークリッドの原論」では次のようになつてゐる。

$\boxed{1}$ 巻の 2 3 で「与えられた直線上の点において与えられた角に等しい角を作ることができる」を証明している。

これには、3. 1 節の「作図と図形の学習法」で、『原論』の $\boxed{1}$ 巻の 2 「任意の線分は任意の点の任意の方向に移動できる」と、後で述べる三角形の合同条件「三角形の対応する 3 辺がそれぞれ等しければ、2 つの三角形は合同である」を用いる。

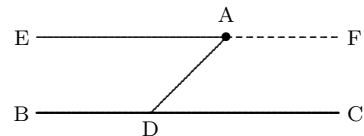
$\boxed{1}$ 巻の 3 1 で、「与えられた点を通り、与えられた直線に平行線を引くことができる。」を証明している。

これには、 $\boxed{1}$ 巻の 2 3 と「平行線になる条件の定理」を用いる。

直線 BC 上にない点 A をとつて、BC に平行な直線を引くとする。

直線 BC 上に点 D をとり、 $\angle ADC$ と $\angle DAE$ が等しくなるように半直線 AE を

AD に関して、DB と同じ側に描く。EA の延長上に F をとり、AF を結ぶ。



平行線を描く実用的な方法は、BC 上に D と異なる点 G をとり、コンパスで、「平行四辺形になるための条件の定理」の 2 番目を用いて、コンパスで、平行四辺形 DGHA を描けば、 $DG \parallel AH$ となる。

ここまで学習すると、極めて面白いことに気づくだろう。『原論』では、 $\boxed{1}$ 巻の 3 1 になるまで、平行線の描き方は分からなかつたのである。それにもかかわらず、このテキストのすぐ後の「三角形の性質」においても、平行線を利用している。平行線の引き方は知らなくても、「平行線の公理」によつて、ただ 1 つの平行線が存在する、ということのみを仮定すれば、全ての議論は整合性を持って展開できるのである。「平行線の公理」が多くの定理とかなり異なる表現をしているのはそのためである。ユークリッドはそこまで論理一貫性を貫いたのである。

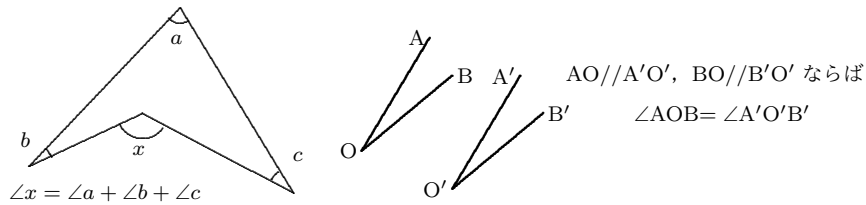
一連の平行線の定理から、三角形の内角の和、外角の性質が導かれる。

- 三角形の性質
- (a) 三角形の内角の和は 180° である。
 - (b) 三角形の外角はそれと隣り合わない 2 つの内角の和に等しい。



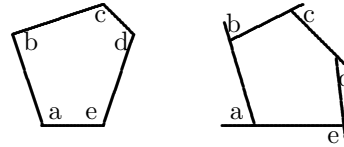
証明は図の左の方法、右の方法のどちらでもよいが、いずれも平行線の性質を用いる。すなわち、三角形の内角の和や外角の性質は平行線の定理より論理的に後で議論していることである。このように、定理には証明の順序があり、これをひっくり返しては統一した理解とはいえない。

〔演習〕 角度の計算でよく使う次の性質を導きなさい。



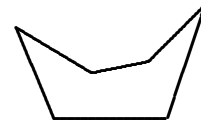
〔多角形について

- (a) n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$ である。
- (b) n 角形の外角の和は 360° である。



これらは、それぞれ2つの証明法を学んだから思い出しておこう。ただし、「外角の和」といったとき、各頂点ではそれぞれ一組の対頂角の一方だけを加起来合わせたものである。

通常、多角形とは「凸(とつ)多角形」をさす。凸多角形とは「この多角形の任意の2点を結ぶ線分がつねにこの多角形に含まれる」と定義される。全ての辺上の点が出っ張っている多角形である。右図は凸でない六角形である。



凸多角形でなくても、すなわちへこみのある多角形でも、 n 角形の内角の和は $180^\circ \times (n - 2)$ であることが簡単に証明できる。頂点が一つ増えるたびに必ず 180° ずつ内角が増えることを示せばよい(自分で証明してみよう)。

「 n 角形の外角の和は 360° である。」も、外角を適切に定義すれば成立する。へこみになる頂点では外角は負となるようにして、内角と外角の和が 180° になるように定義しておけば外角の和の定理が成立する。 n 角形の外角の和は、(n 組の内角+外角= 180° の和) から (内角の和) を引いたものに等しい、ことをつかって導いたことを思い出せばよい。

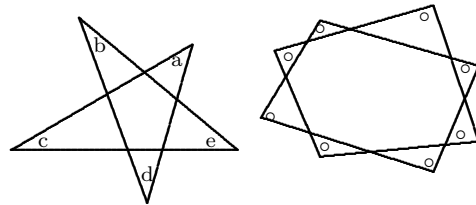
n 角形はいわゆる「一筆書き」ができる。一筆書きとは、どこかの点から出発して一度も筆を紙面から離さないで、しかも2度以上同じ線は通ることなく全体の図を描くことをいう。

簡単な考察から「一筆書きができるのは、奇数点が0個か2個のときだけである」ことがわかる。奇数点とは、一つの頂点に集まる線分の数が奇数個の点、偶数点とは、それが偶数個の点を指す。上の2つの図とも偶数点ばかりで、一筆書きができる。

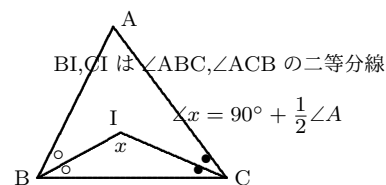
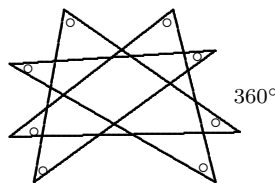
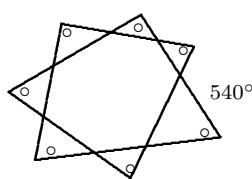
いわゆる「星形」は一筆書きができるが、多角形ではない。図の頂点の内角の和の求め方はいくつか知っているであろう。

$$\angle a + \angle b + \angle c + \angle d + \angle e = 180^\circ$$

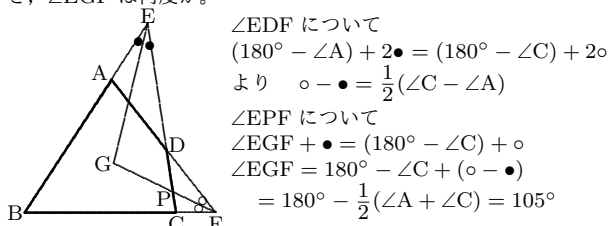
また、右側の図も、一筆書きはできるが、2つの四角形が重なっていると見なして計算すれば分かりやすい。したがって○印の付いている角の和は2つの四角形の内角の和 (720°) となることは直ぐわかる。



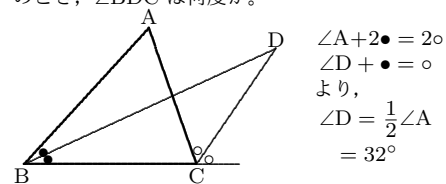
また、次の問題は自分で工夫して下さい。



〔演習1〕 四角形 ABCD において、BA, CD の延長の交点を E とし、AD, BC の延長の交点を F とする。また、 $\angle BEC$, $\angle AFB$ の二等分線の交点を G とする。 $\angle DAB = 70^\circ$, $\angle BCD = 80^\circ$ のとき、 $\angle EGF$ は何度か。



〔演習2〕 三角形 ABC の角 B の二等分線と角 C の外角の二等分線の交点を D とする。 $\angle A = 64^\circ$ のとき、 $\angle BDC$ は何度か。



塾にはかなり多くの演習問題がある。あまり面白くないが、現状の入試には、欠かせない。

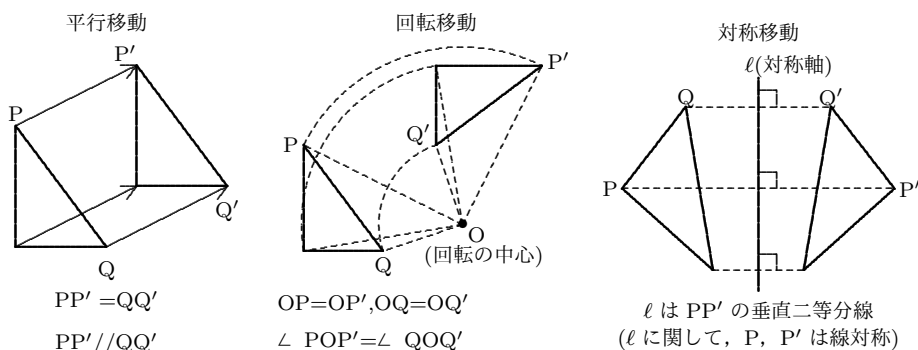
3.4 図形の移動

図形は平面内でいろいろ移動させることができる。しかし、ここまで学習を進めてきた君には、「移動とは何か」をまだ明確に定義していないことに気付くはずである。ここでは、

移動の定義

移動とは、平行移動、回転移動、対称移動、およびそれらを組み合わせたもの

とし、今後これ以外は移動とは言わないことにする。この移動を「合同変換」ともいう。直ぐあとで、この移動によって、2つの図形を重ね合わせることができる時、それらは合同と言うからである。そうすると、次に、平行移動、回転移動、対称移動とは何か、が問題となる。しかし、これを明確に定義するのはまたかなり難しい。そこで、やむなく、これらはだいたい分かっているとして議論を始める。平行移動は図の全ての点を同じ向き、同じ距離だけ移動する事、回転移動は特定の点の周りに図形の全ての点を同じ角だけ同じ向きに回転すること、対称移動は特定の直線(面)に関して、図形の全ての点に対して対称な点を対応させること、ぐらいに定義しておく。



まず、対称移動について考える。

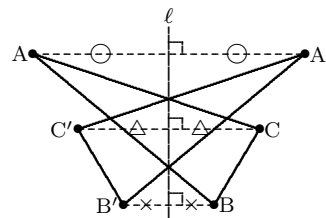
「対称移動した図形とは、紙面にインクで書いたもとの図形をインクが乾かないうちに、平面上の対称の軸で折り重ねたときに、それぞれの片側の図形をもう片方の側に写し、もとの平面に戻したときにできた図形である」

という“事実”を反映したものである。

まだ“移動”とか、“合同”とか、“ぴったり重なる”とかの定義を確定していない段階での議論であることを忘れてはならない。

また、上の対称移動は、対称の軸が図形の外側にある場合であるが、事情は軸が何処にあっても同じことである。右の図で、 $\triangle A'B'C'$ は $\triangle ABC$ を直線 l に関して対称移動したものである。

1つ加えておくと、全ての角は、対応した角に等しいが、これは、たとえば、線分 AB が対称軸 l となす角は、線分 $A'B'$ が対称軸 l となす角に等しいことも含んでいる。



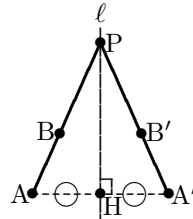
したがって、

「対称移動によって、もとの図形と移動後の図形は“重なる”」

を出発点に選ぶ。すなわち、「対称移動の作図法はその数学的表現だ」とみなす。これより、対称移動の基本的な特性は、全ての対応した線分の長さは等しいし、対応した角度も等しい、となる。

もう少し詳しく、このことを調べておこう。

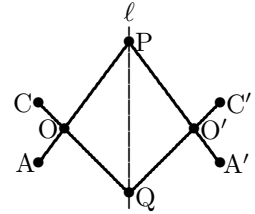
右図のように、点 A の直線 l に対称な点を A' とし、 l 上の任意の点を P とする。このとき、対称移動によって線分 AP は線分 $A'P$ に移動する。したがって、直線は直線に移動し、 $AP=A'P$ 、 $\angle APH = \angle A'PH$ となる。対称移動で想定する主な仮定はこれだけである。



ここでは、“仮定”と書いたが、本来これらは“証明”すべきことである。「直線は直線に移動」は、 AP 上の点 B は、 $A'P$ 上の点 B' に移動することを簡潔に表現するため必要である。また、直角三角形の比 $\frac{AH}{PH}$ は $\angle APH$ の大きさを一意的に定め(角度の大きさの定義はいろいろあってもよい)、これが $\triangle PAH$ と $\triangle PA'H$ で同じだから、 $\angle APH = \angle A'PH$ となる。また、 $\angle APH$ の大きさは、比 $\frac{PH}{AP}$ によっても定まり、 PH は共通だから、 $\angle APH = \angle A'PH$ は $AP=A'P$ でもある。

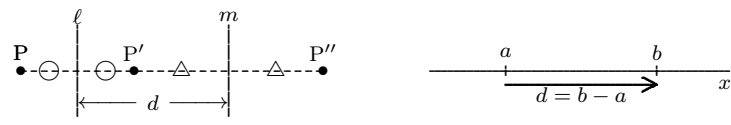
そうすると、同じ対称移動によって、AP 上の点 B は、A'P 上の点 B' に移動し、BP=B'P が成り立ち、結局、AB=A'B' が得られる。すなわち、線分の長さは対称移動によって変わらない。

また、右の図のように、別の点 C を通る直線が直線 l と交わる点を Q、直線 AP と交わる点を O、C、O の移動した点を C'、O' とすると、 $\angle CQP = \angle C'QP$ 、 $\angle APQ = \angle A'PQ$ を考慮すると、 $\angle POQ = \angle PO'Q$ 、したがって、2 直線のなす角の大きさは対称移動によって変わらない。



- 対称移動の性質
- 対称移動によって、もとの図形は移動後の図形に重ねあわせることができる。
- (1) 線分の長さは変わらない。
 - (2) 角度の大きさは変わらない。

以下、全ての移動は、何度かの対称移動を組み合わせて表せることを示す。
はじめに、平行な 2 つの対称軸による対称移動によって、点はどのように動くかを例で見ておく。



左の図は、点 P が対称軸 l の左側の軸間の距離 d より小さい距離にある場合で、点 P は距離 $2d$ だけ右に移動したことがわかる。これを、点 P が何処にあっても、2 回の対称移動によって、点 P は $2d$ だけ移動することを数直線上の点の移動として確かめておく。

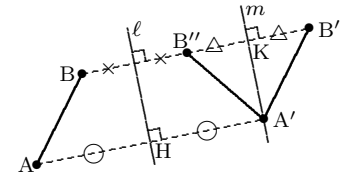
右の図で、点 P の座標を x 、 $x = a$ に関して対称な点 P' の座標を x' 、点 P' の $x = b$ に関して対称な点 P'' の座標を x'' とすると、対称の中心の座標は、もとの点と移動後の点の座標の平均に等しいから、

$$\frac{x+x'}{2} = a, \quad \frac{x'+x''}{2} = b, \quad \text{したがって、} \quad x'' - x = 2(b - a) = 2d$$

が得られる。 a, b の値が何であっても、点 P(x) がどこにあっても同じ式になる。 $d > 0$ のときは正の方へ、 $d < 0$ のときは負の方へ、移動する。

つぎに、平行な 2 つの長さが等しい線分 AB、線分 A'B' だけで成り立つ図形を考える。

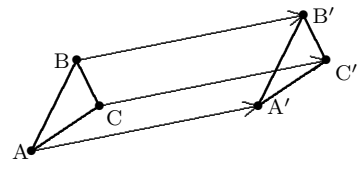
右図のように、線分 AB を、AA' の垂直二等分線 l に関して対称移動して線分 A'B'' とし、続いて A'B'' を、A' を通り l に平行な直線 m に関して対称移動して A'B' に重ねることができる。すなわち、線分の平行移動は、2 つの対称移動によって表すことができた。



重要なことは、この証明には平行線の定理を使い、合同の議論は平行線の定理の後から出てくることである。図で、AB の延長と直線 l との交点を P とする。直線 l に対称だから、 $\angle APH = \angle A'PH$ 、 $l // m$ より $\angle A'PH = \angle PA'K$ 、したがって、 $\angle APH = \angle PA'K$ 、また $\angle B''A'K = \angle B'A'K$ 、よって、 $\angle APH = \angle B'A'K$ 、 $l // m$ より $AB // A'B'$ 。また、 $AB = A'B'$ であることは言うまでもない。

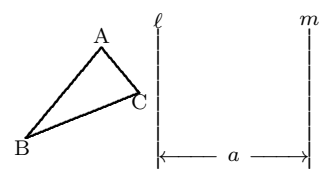
上の線分の平行移動と同じ 2 回の対称移動 (同じ軸、 l と m) を $\triangle ABC$ に適用すれば、 $\triangle A'B'C'$ となる。

$AC // A'C'$ 、 $AC = A'C'$ は、AB、A'B' の場合と同様である。 $BC // B'C'$ 、 $BC = B'C'$ 、および $AA' = BB' = CC'$ も同様に証明できる。

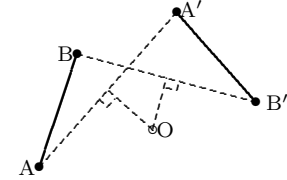


同様に作業を行うと、一般に
「図形の平行移動は 2 回の対称移動によって表すことができる。」
すなわち、図形は平行移動した図形に平行移動によって完全に重なる。

〔例題〕図のように、平行な 2 直線 l, m と $\triangle ABC$ がある。 l について $\triangle ABC$ と対称なものを $\triangle A'B'C'$ とし、 m について $\triangle A'B'C'$ と対称なものを $\triangle A''B''C''$ とする。 $\triangle ABC$ を 1 回の移動で $\triangle A''B''C''$ に重ねるためには、どのような移動をすればよいですか。
この例より、距離 a だけ離れた平行な軸による 2 回の対称移動は距離 $2a$ の一回の平行移動になることが分かる。逆に、既に述べたように、任意の平行移動は 2 回の対称移動によって表現できることが分かる。
(任意の平行移動は 2 回の回転移動によっても表現できる。)



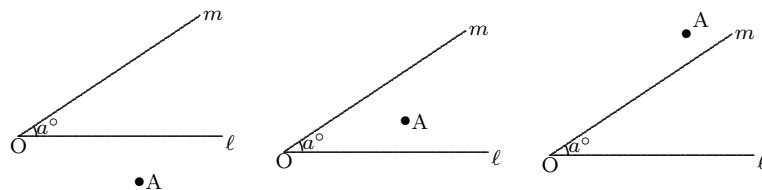
つぎに、図形が平行でない長さの等しい 2 つの線分 AB、線分 A'B' だけから成り立っている場合を考える。このとき、片方の線分を一つの回転移動だけで他方に移動させることができる。右図の場合、 $AB = A'B'$ であれば、AA' および BB' の垂直二等分線の交点 O が回転の中心になっている。



「ユークリッドの原論」では、「2.1 作図と図形の学習法」ですでに述べたとおり、線分 AB を長さの等しい線分 A'B' へ、定規とコンパスを 公法通り 使って移動できることを示した。

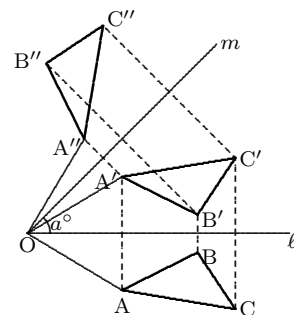
この回転移動を考察するため、次の特殊な 2 回の対称移動を考える。まず、次の演習をやっておこう。

〔演習〕 点 A を直線 l 、続いて直線 m で対称移動した点を A'' とすると、点 A'' は点 A を l 、 m のなす角 a° の 2 倍の角度の回転移動になっていることを確認しなさい。



右図のように、2 直線 l 、 m は点 O で角度 a° で交わるとする。△ABC を l を軸として対称移動した図形を △A'B'C' とし、 m を軸として △A'B'C' を対称移動した図形を △A''B''C'' とする。すなわち、△ABC は二度の対称移動によって、△A''B''C'' に重ねることができた。

ところが、点 A'' は点 A を点 O のまわりに $2a^\circ$ 回転したものである。同様に、B'', C'' は B, C を $2a^\circ$ 回転したものであり、したがって、△A''B''C'' は、△ABC を $2a^\circ$ 回転した図形でもある。



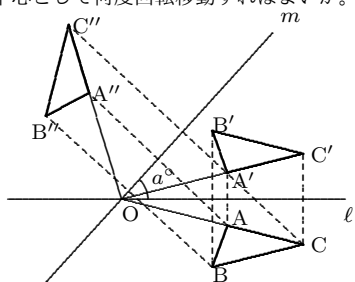
この逆も言える。△A''B''C'' は △ABC を回転移動したものとすると、AA'' と BB'' の垂直二等分線の交点が回転の中心であり、これを点 O とし、回転の角度を $2a^\circ$ とする。点 O を頂点とし角度が a° の半直線を l 、 m とすれば、この例と同じように 2 回の対称移動によって、△ABC は △A''B''C'' に移動させることができる。一般に、

「回転移動は、2 回の対称移動によって表すことができる。」

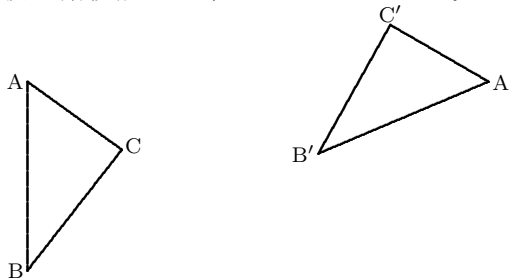
また、平行移動と回転移動を組み合わせた移動は一つの回転移動で表すことができる。

さらに、三角形などの面での広がりがある図形では、回転移動と平行移動だけで移動させることができるとき、裏返しである対称移動が必要な場合がある。もともと、「移動」をこのように 3 種類の移動と定義したのはそのためである。平面内で左右の手のひらを対称移動なしには重ね合わせることはできない。

〔演習 1〕 下左の図の △A'B'C' は、△ABC を l を軸として対称移動したものであり、△A''B''C'' は、△ABC を m を軸として対称移動したものである。直線 l と m が点 O で交わり、そのなす角が a° のとき、△A'B'C' を △A''B''C'' に重ねるには、点 O を中心として何度回転移動すればよいか。



〔演習 2〕 下右の図 △ABC を一度の回転移動と一度の対称移動によって、△A'B'C' に重ねなさい。



以上のことをまとめると、
移動の組み合わせ

全ての移動は何回かの対称移動の組み合わせによって表される。

したがって、対称移動に特別な役割を持たせることとなる。平行移動や回転移動の作図は、数学の構成上必要とはしていない。図形の移動で変わらない性質は、全て対称移動に含まれている。逆に言えば、対称移動によって変わらない図形の属性のみによって図形を表現していることになる。対称移動の作図法のみを定義しておれば十分である。繰り返すが、対称移動した図形とは、もとの図形を、平面上の対称の軸で折り重ねたときに、それぞれの片側の図形をもう片方の側に写し、もとの平面に戻したときにできた図形である、という“事実”を反映したものであった。対称移動によって、もとの図形と移動後の図形は“重なる”のである。したがって、対称移動の大きな特徴は、全ての対応した線分の長さは等しいし、対応した角度も等しい。

移動の前後の図形において、元の図形はその移動によって、移動後の図形に完全に重ねあわしたことになる。1年の教科書を見てほしい。ある教科書には「図形を、その形や大きさを変えないで、他の位置に移すことを図形の移動という」と書かれている。形や大きさを変えないで他の位置へ移すことは、上に定義した移動のみによって常に可能であると主張している。しかも、上の例から、それらの間には関係があることも分かった。次節では、このことを、合同の定義に利用する。

移動の性質

移動によって、もとの図形は移動後の図形に重ね合わせることができる。

(移動によって、図形はその形や大きさは変わらない。)

- (1) 線分の長さは変わらない。
- (2) 角度の大きさは変わらない。

移動には、さらにいくつかの重要な性質がある。

逆向きの移動

図形 S' が図形 S を移動した図形ならば、図形 S' から図形 S への移動も存在する。

また、既に議論済みのことであるが、

移動の組み合わせは移動である。

図形 S を移動して図形 S' 、図形 S' を移動して図形 S'' となるならば、図形 S から図形 S'' へも移動である(移動が存在する)。

さらに、同じ対称移動を2度繰り返すともとの図形になる。すなわち、全く移動しないことも移動と見なす。

何もしない移動

図形をそのままにしておくことも移動である。

〔例〕図形 S' が図形 S を移動した図形ならば、「図形 $S \equiv$ 図形 S' 」と表すとする。

図形 $S \equiv$ 図形 S' ならば、図形 $S' \equiv$ 図形 S

図形 $S \equiv$ 図形 S' 、図形 $S' \equiv$ 図形 S'' ならば、図形 $S \equiv$ 図形 S''

図形 $S \equiv$ 図形 S

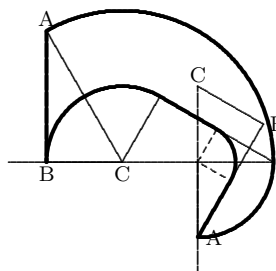
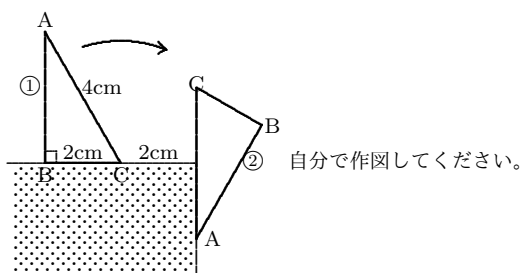
これらは、図形の合同の基本要件(同値関係)である。これらは論理上、極めて重要なことであるが、ここではこれ以上、これらのことには触れないことにする。

主に平面図形について議論しているが、空間図形ではほんの少し「移動」の意味が変わる。平行移動は空間の任意の方向の移動である。回転移動はそれぞれ回転の軸と回転角が指定される。対称移動は線対称ではなく面に対する対称移動になる。

1年で学んだ対称な図形とは、対称移動、あるいは点対称移動(平面では180°の回転移動と同じ)をさせたとき、自分自身になる図形のことである。そのとき、対称移動させた軸を対称軸、回転させた回転の中心を対称の中心という。平面では点対称移動は180°の回転であるが、空間図形では点対称移動は回転移動では表せないから注意が必要だ。

一般には平行移動による対称性も問題となりうるが、これは問題としない。要するに対称性とは「移動」(一般には「変換」)に関して、元の図が結果として変化しないことをいう。

〔演習〕図のような直角三角形 ABC があります。この直角三角形がこの斜線部分の外側を、①の状態から矢印の方向に滑ることなく転がって、②の状態まで移動します。このとき、辺 AB が通過する部分の面積は \square cm^2 です。(灘中16年) 答え $\frac{19}{4}\pi$



3.5 図形の合同

すでに、「移動とは何か」の議論から明らかなように、

合同の定義

合同とは、移動によって重ね合わせることができる2つの図形

と定義する。移動によって重なり合う点に対応する点、重なり合う辺に対応する辺、… という。大切なことは合同の定義は、移動の定義と一体になっていることを理解しておくことである。移動のことを「合同変換」ということもある。

合同な2つの図形では重なり合うのだから、次の定理が成り立つ。

合同な図形の性質

- (1) 対応する線分の長さは、それぞれ等しい。
- (2) 対応する角の大きさは、それぞれ等しい。

図形は必ずしも線分と角だけから成り立つのではないから、たとえば、扇形の場合には、対応する弧の長さや「曲がり具合」などもそれぞれ等しくなる。また、図形が閉じた線で描かれていたなら、対応したそれによって囲まれた部分の面積もそれぞれ等しくなる。半径の等しい2つの円は合同だから、その面積は等しい。したがって、上に述べた合同な図形の性質はその全てを述べたものではなく、基本的なものを拾い集めたということである。他の性質はこれらから説明できる、と考える。

平行線の学習では、定義、性質、条件をほぼ同時に取り扱った。しかし、図形の一般的な学習の順序は定義 → 性質 → 条件の順序を守って進める。これは主に数学の成り立ちに基づいた順序であり、学習課題を明確にさせるためでもある。平行線では公理に関わるもっとも基本的なことであったから、それが守れなかったのである。

2つの図形が合同になるための条件は、図形の種類によって変わってくる。

〔例題 1〕 半径 2cm の2つの円 O と円 O' は合同であることを証明せよ。

円 O の円周上の点を点 P とする。線分 OP の長さは 2cm である。「線分は、作図の公法に従って任意の位置に移動できる」から、線分 OP を移動させて、線分 O'P' に移動したとする。移動によって線分の長さは変わらないから、線分 O'P' の長さは 2cm であり、点 P' は円 O' の円周上の点である。逆に、円 O' の円周上の任意の点 P' は、線分の移動によって、P' から円 O の円周上の(別の)点 P に移動する。よって、もれなく円 O' の円周上の点は円 O の円周上の点から移動しており、円 O は円 O' に移動している。したがって、2つの円は合同である。

一番よく出てくる一般の三角形については次の合同条件が成り立つ。

三角形の合同条件

2つの三角形において、次のいずれかが成り立てば、その2つの三角形は合同である。

- (1) 3組の辺がそれぞれ等しい。(三辺相等)
- (2) 2組の辺とその間の角がそれぞれ等しい。(二辺夾角相等)
- (3) 1組の辺とその両端の角がそれぞれ等しい。(一辺両端角相等)

なぜはじめに三角形の合同条件を学習するのは、平面上の全ての図形は有限個の三角形、あるいは無限個の三角形の集まりで表せる、平面の図形の多くの性質は三角形の性質に基づいて説明できることによると理解しておこう。まず、〔例題 1〕でみたように、既に証明した次の定理を思い出しておこう。

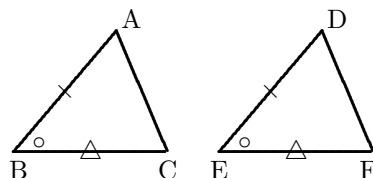
線分の移動

線分は、作図の公法に従って任意の位置に移動できる。

はじめに、「二辺夾角相等」を証明しておく。

図において、 $BC=EF$, $AB=DE$, $\angle B = \angle E$ とする。

$\triangle ABC$ を辺 BC が辺 EF に重なるように移動させる。移動は平行移動、回転移動、対称移動を含んでもよい。この移動に伴って、点 A も移動する。移動によって、角度の大きさは変わらず、 $\angle B = \angle E$ だから、辺 BA が半直線 ED に重なる(点 A が EF に関して点 D と反対側に移動するときは、EF に関して対称移動すれば済むことだ)。半直線 ED 上で $BA=ED$ となる点は ただ一つ だから、点 A は点 D に重なる。

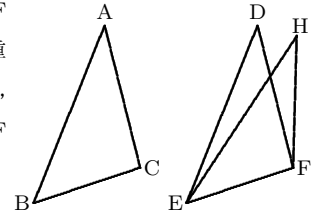


したがって、辺 AC と辺 DF も重なり、結局 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は重なる。これを一般的に述べたのが、2 回目の合同条件「2 辺夾角相等」、すなわち「2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しい」、である。

「三辺相等」では、 $AB=DE$, $BC=EF$, $CA=FD$ とする。「二辺夾角相等」と同様に、 $\triangle ABC$ を辺 BC が辺 EF に重なるように移動させる。2 点から距離が決まった点は 2 点を結ぶ直線の両側にできるが、それはその線に対称移動させれば重なるから、ただ一つの点 がきまる (証明は後述) とする。 $BA=ED$, $CA=FD$ だから、BC の EF への移動によって、同時に、点 A は点 E から BA の距離、かつ点 F から CA の距離である点 D に重なる。よって、「三辺相等」が成り立つ。

『原論』の三辺相等では、「ただ一つの点」に関して、およそ次のように書かれている。

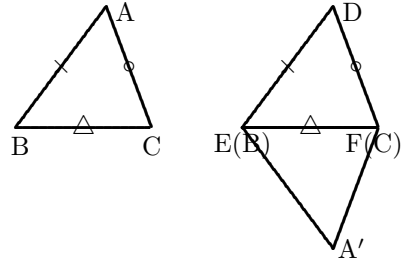
$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、 $AB=DE$, $BC=EF$, $CA=FD$ とする。線分 BC を線分 EF に移動したとする。この時、BA, AC も ED, DF に重なる。なぜなら、辺 BC が辺 EF に重なり、辺 BA, AC が ED, DF に重ならず EH, HF のようにずれたとする。DH を結ぶと、二等辺三角形の性質を使うと, $ED=EH$, $FD=FH$ より $\angle DHE = \angle HDE > \angle HDF = \angle DHF$ となり、矛盾する。



『原論』では「二辺夾角相等」と「三辺相等」の証明の間に「二等辺三角形の性質の定理」を証明している。後で見るように、「二等辺三角形の性質の定理」の証明には、「二辺夾角相等」のみを用いる。「三辺相等」は、「二等辺三角形の性質の定理」を用いて証明する「ただ一つの点」が存在することを基に証明されているのだ。どこにも、不具合はない。

しかし、どうせ二等辺三角形の性質の定理を用いるのなら、次のような証明の方が分りやすい。

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ で $AB=DE$, $BC=EF$, $CA=FD$ とする。 $\triangle ABC$ を辺 BC と辺 EF が重なり、頂点 A と頂点 D が反対側になるように移動させた三角形を $\triangle A'EF$ とする。 $DE=A'E$ より、 $\triangle DEA'$ は二等辺三角形となる。後で証明するが、二等辺三角形の性質 (重要なことは、二等辺三角形の性質の証明は「二辺夾角相等」のみを用いていることである) より、 $\angle EDA' = \angle EA'D$ 。同様に $\angle FDA' = \angle FA'D$ 。よって $\angle D = \angle A'$ 。従って、 $\triangle DEF$ と $\triangle A'EF$ は「二辺夾角相等」となり、合同である。よって、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同である。



同様に、「一辺両端角相等」では、 $BC=EF$, $\angle B = \angle E$, $\angle C = \angle F$ だから、辺 EF の両端からそれぞれ、 $\angle B$, $\angle C$ に等しい角の方向の点は ただ一つ (証明は後述) だから、BC の移動によって点 A は点 D に重なる。

「一辺両端角相等」については、『原論』では次のように書いてある。

$\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、

$BC=EF$, $\angle ABC = \angle DEF$, $\angle ACB = \angle DFE$ とする。

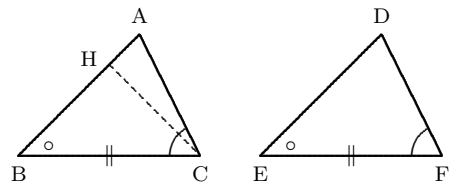
$AB \neq DE$ と仮定し、いま、 $AB > DE$ とする。

AB 上に、 $BH=ED$ となる点 H をとり、HC を結ぶ。

$\triangle HBC$ と $\triangle DEF$ は、「二辺夾角相等」で合同となる。

したがって、 $\angle HCB = \angle DFE$ 。これは、条件 $\angle ACB = \angle DFE$ に反する。

他の場合も同様である。よって、「一辺両端角相等」は証明された。



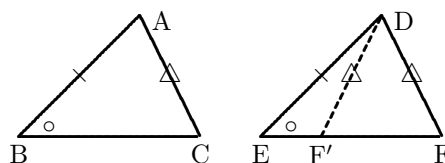
さらに、関心のある人は、「ユークリッドの原論」の証明、

第 1 巻 4 … 二辺夾角相等 第 1 巻 8 … 三辺相等 第 1 巻 26 … 一辺両端角相等

を参照して見よう。

以上で、「三角形の合同条件」の証明は全て完了する。どの教科書でも触れられていることだが、「二辺夾角相等」はあくまで、2 組の辺と その間の角 がそれぞれ等しくなければ合同条件にはならない。

図のように 2 組の辺と 1 角がそれぞれ等しいだけでは 2 種類の三角形ができるからだ。条件をみたら三角形が「ただ一つ」ではないからだ。したがって、どちらか一方であることがわかっている場合には、実用的に「2 組の辺と 1 角がそれぞれ等しい」ければ合同ということになる。



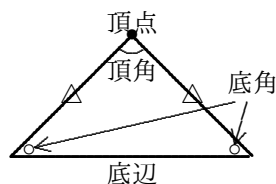
たとえば、条件 $\angle C > 90^\circ$, $\angle F > 90^\circ$ が付加されていると、2 つの三角形は合同となる。上の議論は、「条件の定理」とは別の条件を考えることもできることを示している。「条件の定理」は、利用しやすいよ

うに、いくつか整理したもの過ぎない。

同様に「性質の定理」も、これが性質の全て、というのではなく、多くの場合、他の性質はこの「性質の定理」から導ける範囲で、できるだけ整理したもの過ぎない。

3.6 二等辺三角形，直角三角形

二等辺三角形の定義 … 「2辺が等しい三角形」
 等しい辺に対する角を底角，等しい辺の交点を頂点，その角を頂角，
 頂点に対する辺を底辺という。

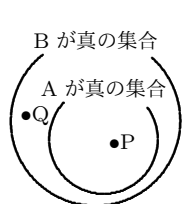


- 二等辺三角形の性質
- (1) 2つの底角は等しい。
 - (2) 頂角の2等分線は底辺を垂直に2等分する。

二等辺三角形になるための条件
 2つの角が等しい三角形はその角に対する辺が等しい二等辺三角形である。
 二等辺三角形については以上のことを学ばよ。

「集合と論理」は『中学数学発展』を参照してください。

命題「もし A ならば，B である」を A が真である集合と B が真である集合の「包含関係」で表せば，意味が分かりやすい。



「もし A ならば，B である」は，A が真である集合に含まれている要素 P は必ず B が真である集合に含まれていることを表している。

「逆は必ずしも真ならず」は，B が真である集合に含まれている要素 Q は必ずしも A が真である集合に含まれていないことを表している。

対偶「もし B でないならば，A でない」は，B が真である集合に含まれていない要素 R は A が真である集合に含まれていないことを表している。元の命題「もし A ならば，B である」が真であると，その対偶も真である。

「もし ○○○ ならば，△△△ である」 \longleftrightarrow 「もし △△△ ならば，○○○ である」

は互いに仮定と結論が入れ替わっている。これらの命題の関係を「逆」という。

二等辺三角形の性質の定理「二等辺三角形ならば，2つの底角は等しい」という命題と，二等辺三角形になるための条件の定理「2つの角が等しい三角形はその角に対する辺が等しい二等辺三角形である」という定理は互いに逆の定理である。

逆の命題は元の命題が真(理)であっても必ずしも真(理)ではない。

「逆は必ずしも真ならず。」

動物園でヒグマの飼育係が熊に襲われて殺害された(05,10)。そのヒグマはその動物園で生まれて3年になるそうだが，この時点でも雌雄が分かっていたいなかったそうだ。

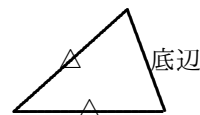
もしその熊が赤ちゃんを生んでいたならば，その熊は雌である。

という主張は間違いはない。しかし，

もしその熊が雌ならば，その熊は赤ちゃんを生んだことがある。

といえば，間違っている。現在までに出産しなかった熊もあるし，さらに生涯出産しない熊もあるだろう。こんな議論を行えば，単に論理的に間違っているというだけでなく，人の尊厳を傷つけることもありえる。

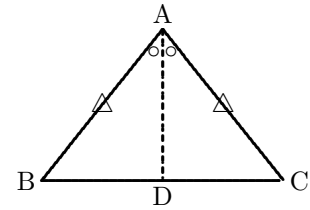
さらに注意が必要である。底角という言葉は，二等辺三角形について等しい辺に対する角と定義されているのであって，一般の三角形について定義されているのではない。すでに二等辺三角形であることが分かっている場合以外は「底角」という語は使ってはいけない。「底辺」も同様である。また，もともと上，下，底などの語は紙面あるいは視点(座標系)に対する語であるが，これを図形自身の部位を示す言葉に流用したものである。ただし，教科書でも一部には相変わらず三角形の面積は「底辺×高さ÷2」などの表現も混在し，統一性がない。



さて、二等辺三角形の性質の定理を証明しよう。

図の二等辺三角形 ABC の頂角の 2 等分線が底辺 BC と交わる点を D とする。

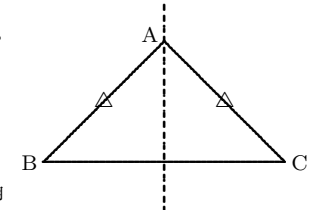
$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、 $AB=AC$, $\angle BAD=\angle CAD$,
 $AD=AD$ (AD は共通), したがって、2 組の辺とその間の角が
 それぞれ等しいから、 $\triangle ABD \cong \triangle ACD$ 。これより、
 $\angle B = \angle C$, $BD=CD$ 。また $\angle ADB=\angle ADC$, $\angle ADB+\angle ADC=180^\circ$



だから $\angle ADC=90^\circ$ がえられる。これは、「二等辺三角形の性質の定理」全てを証明したことになっている。

かなり前になるが、ある塾生は自分で次のような証明を考え、それが正当かどうかを質問した。
 二等辺三角形を $\triangle ABC$ とする。

$\triangle ABC$ と $\triangle ACB$ において、 $AB=AC$, $AC=AB$, $\angle A$ は共通。したがって、
 2 組の辺とその間の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABC \cong \triangle ACB$ 。よって $\angle B = \angle C$ 。
 見事である。どちらかという、頂角の 2 等分線を引くやり方は遠回りをしている。それは三角形の合同条件の混乱を避け、あわせて 2 つ目の性質も証明するために採用されたものである。



もちろん、塾生の考えた証明も毎年説明してきており、解説書などにも必ず触れてあるが、こうした自主的な発想は良く合同を考えた生徒のみのできる事だ。もう少し、付け加えておけば、この証明は、 $\triangle ABC$ を $\angle A$ の二等分線に関する対称移動によって説明したものと同一になっている。対称移動の説明のところを良く見直して欲しい。対称移動によって、点 B は点 C に、点 C は点 B に移り、点 A は動かない。したがって、辺 AB は辺 AC に、辺 AC は辺 AB に移るから、 $\angle ABC$ は $\angle ACB$ に移る。よって $\angle B = \angle C$ 。

つぎに、条件の定理を証明する番だ。証明は簡単だ。各自証明しておこう。

初期のころは、これで十分だったのだが、分からない人が増えてきた。
 証明例 $\triangle ABC$ の頂点 A から底辺 BC への垂線の BC との交点を D とする。

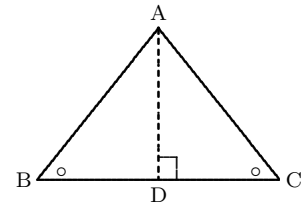
$\triangle ABD$ と $\triangle ACD$ において、

$$\angle ABD = \angle ACD \quad \dots (1) \quad \angle ADB = \angle ADC \quad \dots (2)$$

(1), (2) より、2 つの三角形において、2 つの対応する角がそれぞれ等しいから、残りの角も等しく、
 $\angle BAD = \angle CAD \quad \dots (3)$ また、 AD は共通 $\dots (4)$

(1), (3), (4) より、1 辺とその両端の角がそれぞれ等しいから、

$$\triangle ABD \cong \triangle ACD \quad \text{よって、} AB = AC$$

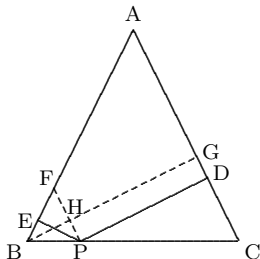


こうして、今の場合、二等辺三角形の性質の定理の一つ「2 つの底角は等しい」の逆の定理「2 つの角が等しい三角形は二等辺三角形」という条件の定理も成り立つことがわかった。

〔演習 1〕 頂点 A の二等辺三角形 $\triangle ABC$ の B, C から対辺 AC, AB にひいた垂線の足をそれぞれ BD, CE とすると、
 $BD = CE$ であることを証明せよ。

〔演習 2〕 $\triangle ABC$ の頂点 B, C から対辺 AC, AB にひいた垂線の足をそれぞれ BD, CE とすると、
 このとき $BD = CE$ ならば、 $AB = AC$ であることを証明せよ。

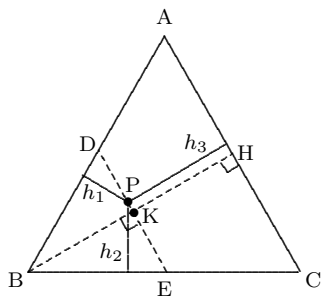
〔演習 3〕 二等辺三角形の底辺上の 1 点から、等しい 2 辺への垂線の足の長さの和は一定であることを証明せよ。



二等辺三角形 ABC の底辺上の点を P, P から AC, AB に下した垂線を PD, PE とする。
 P を通り、AC に平行な直線と AB との交点を F とする。また B から AC への垂線を BG, BG と PF の交点を H とする。

$\triangle FBP$ は二等辺三角形より、 $BH=PE$ 。四角形 HPGD は長方形より、 $PD=HG$ 。したがって、 $PE+PD=BH+HG=BG$

〔演習 4〕 正三角形内の任意の点から各辺に下した垂線の足の長さの和は、一つの頂点からの辺への垂線の長さに等しいことを証明せよ。(下図で $h_1 + h_2 + h_3 = BH$ を証明すればよい。証明は各自でやっておこう。)



ここでは、 $h_1 + h_2 + h_3 = BH$ の意味を考える。
 $\triangle ABC = \triangle APB + \triangle BPC + \triangle CPA$
 $= (AB \times h_1 + BC \times h_2 + CA \times h_3) \times \frac{1}{2}$
 $= \frac{1}{2} CA \times (h_1 + h_2 + h_3)$
 一方、正三角形 $\triangle ABC$ の面積は
 $\triangle ABC = \frac{1}{2} CA \times BH$
 である。したがって、
 $\frac{1}{2} CA \times BH = \frac{1}{2} CA \times (h_1 + h_2 + h_3)$
 これより、 $h_1 + h_2 + h_3 = BH$ が得られる。

次に、直角三角形について議論しておこう。

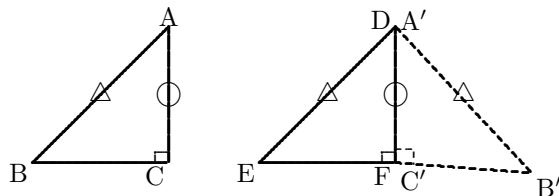
直角三角形について、斜辺などの定義は省く。

- 直角三角形の合同条件
- (1) 斜辺と1鋭角がそれぞれ等しい。
 - (2) 斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい。

2つの直角三角形において、(1)の斜辺と1鋭角がそれぞれ等しければ、他の鋭角も等しく、「1辺両端角相等」になり、2つの三角形は合同となる。

(2)の「斜辺と他の1辺がそれぞれ等しい」が成り立てば、2つの直角三角形が合同であることは次のように証明できる。

図の $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ において、 $AB = DE$ 、 $AC = DF$ 、 $\angle ACB = \angle DFE = 90^\circ$ のとき、この2つの直角三角形の合同を証明する。 $AC = DF$ だから、 $\triangle ABC$ を AC が DF に重なるように移動する。



このとき、点BはDFに関して点Eと反対側に来るようにする。移動した三角形を $\triangle A'B'C'$ とする。 $\angle DFE = \angle A'C'B' = 90^\circ$ だから、E, F(C'), B' は一直線上にならぶ。したがって、D, E, F, B' は二等辺三角形となる。二等辺三角形の性質より、 $\angle E = \angle B'$ 、よって $\angle B = \angle E$ となる。したがって(1)の「斜辺と一鋭角」の条件を満たし、 $\triangle ABC$ と $\triangle DEF$ は合同となる。

直角三角形の合同条件を用いて三角形の合同を証明するときには、必ずはじめに「直角三角形において、」と書き出してほしい。「斜辺」などは直角三角形についての用語だから、直角三角形についての論証であることに違いないが、明確にそれを示すための「枕詞」のように考えてほしい。

塾のプリントなどを用いて、「三角形の合同」の練習を十分してから、次に進んで下さい。

3.7 平行四辺形

平行四辺形の定義 … 「2組の向かい合う辺がそれぞれ平行な四角形」
 四角形において、向かい合う辺を対辺、向かい合う角を対角という。

- 平行四辺形の性質
- (1) 2組の対辺の長さはそれぞれ等しい。
 - (2) 2組の対角の大きさはそれぞれ等しい。
 - (3) 対角線が互いの中点で交わる。

- 平行四辺形になる条件
- (1) 2組の対辺の長さがそれぞれ等しい。
 - (2) 2組の対角の大きさがそれぞれ等しい。
 - (3) 対角線が互いの中点で交わる。
 - (4) 1組の対辺が平行でその長さが等しい。

条件の(3)と(4)の順序を違える人もいる。教科書の順序に従っておこう。

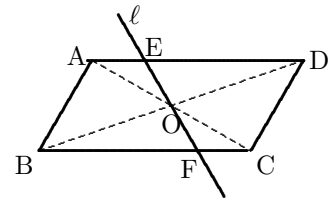
平行四辺形の性質、平行四辺形になる条件は 全て 各自で証明して欲しい。教科書にもきっちり書いてある

はずだ。条件の証明では、どれを先に証明すれば、話が簡単かもちょっと注意しておいて欲しい。それ以上の補足することはない。したがって、これ以上何も記さない。

平行四辺形について、欠かすことのできない重要な性質を議論する。

「対角線の交点を通る直線は平行四辺形を合同な2つの四角形に2等分する。」

平行四辺形 ABCD の対角線の交点を O とし、点 O を通る直線 l が AD, BC と交わる点を E, F とする。△AOE と △COF は AO=CO, ∠AOE = ∠COF, また AD//BC より ∠OAE=∠OCF で1辺両端角相等だから合同。台形 ABFE は △ABC に △AOE を追加し, △COF を削除した図形であり, 同様に台形 CDEF は △CDA に △COF を追加し, △AOE を削除した図形である。したがって, 台形 ABFE ≡ 台形 CDEF となる。

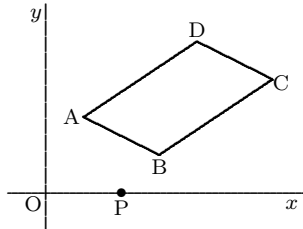


平行四辺形のこの性質は、直線による平行四辺形の面積の2等分によく使われる。

しかし、この証明の過程で、もっと重要な性質、OE=OF が明らかとなった。すなわち、

「平行四辺形は、対角線の交点を中心とした点対称な図形である。」

〔例題 1〕 「点 P(2,0) を通り、点 A(1,2), B(3,1), C(6,3), および点 D を結んで出来る平行四辺形 ABCD の面積を二等分する直線の方程式を求めよ。」



対角線の交点は $(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ だから、平行四辺形の面積の二等分線は
2点 (2,0), $(\frac{7}{2}, \frac{5}{2})$ を通る直線 $y - 0 = \frac{5}{3}(x - 2)$ 。
よって、 $y = \frac{5}{3}x - \frac{10}{3}$

特殊な平行四辺形

- (a) 長方形… 4つの角が全て直角の四角形
性質：2つの対角線の長さが等しい
条件：平行四辺形で、対角線の長さが等しい
- (b) 菱形… 4つの辺が皆等しい四角形
性質：対角線が直交する
条件：平行四辺形で、対角線が直交する

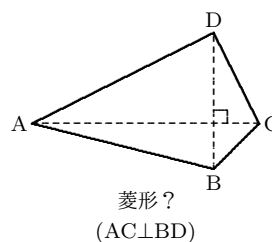
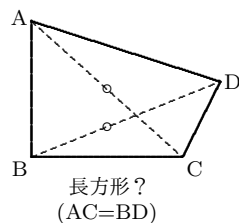
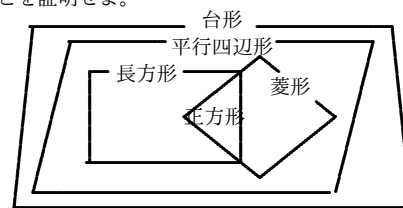
各自全て証明を確認しておいて欲しい。教科書にも書かれている。

〔演習 1〕 長方形は平行四辺形であることを証明せよ。

〔演習 2〕 1つの角が 90° の平行四辺形は長方形であることを証明せよ。

ただし、右図のような各四角形の包含関係は正確に理解しておく必要がある。

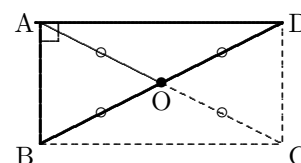
したがって、たとえば、長方形になる条件は「平行四辺形で、対角線の長さが等しい」であるが、「平行四辺形」を忘れると、とんでもないことになる。



長方形の性質を使うと、直角三角形の重要な性質が得られる。

直角三角形の性質

直角三角形の斜辺の中点は3頂点から等距離にある。

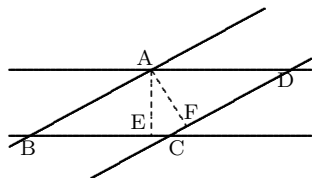


∠A が直角の直角三角形 ABD の斜辺 AD の中点を O とし、AO の延長上に AO=OC となる点 C を取る。四角形 ABCD は、対角線が互いの midpoint で交わるから、平行四辺形であり、∠A が直角だから、長方形である。したがって、AC=BD。よって、AO=BO=CO である。

逆に、線分 BD の midpoint O から OB に等しい距離に点 A をとると、∠BAD は直角になる。これを使うと、斜辺が与えられたときの直角三角形の作図ができる。中3ではこれを円を使って学ぶ。

塾のプリントを用いて、平行四辺形に関する練習を十分やって欲しい。ここではひとつだけ取り上げる。

【例題 2】 同じ幅のテープを図のように重ねたとき、重なった部分の四角形 ABCD は菱形であることを証明しなさい。



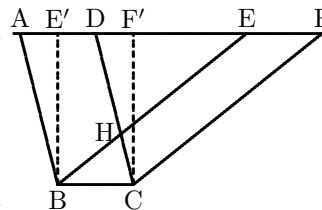
A から BC, CD への垂線と BC, CD との交点を E, F とすると、 $AE=AF$ 。
 $\triangle ABE \cong \triangle ADF$ を証明する。

3.8 三角形の等積移動

「ユークリッドの原論」では、平行四辺形および三角形の面積を以下のように取り扱っている。

「同じ底辺の上にあるかつ同じ平行線の間にある平行四辺形の面積は等しい。」

四角形 ABCD は平行四辺形であるから、 $AD=BC$, $AB=DC$ 。同様に $EF=BC$, $BE=CF$ 。ゆえに $AD=EF$ 。両辺に DE を加えて、 $AE=DF$ 。しかも、 $AB=DC$, $BE=CF$ 。 $\triangle EAB$ と $\triangle FDC$ において、対応する 3 組の辺がそれぞれ等しいから、 $\triangle EAB \cong \triangle FDC$ (ユークリッドは、 $\angle EAB = \angle FDC$ を用いている)。ゆえに $\triangle EAB = \triangle FDC$ 。両辺から、共通部分 $\triangle DHE$ を引き去ると、四角形 ABHD = 四角形 EHCF。両辺に $\triangle HBC$ を加えると、平行四辺形 ABCD = 平行四辺形 EBCF。



さらに、E, F を点 B, 点 C を通る直線 BC の垂線と AD との交点に選ぶと、四角形 EBCF は長方形となる。

この定理と「長方形の面積 = たて × 横」を用いると、

$$\begin{aligned} \text{平行四辺形 } ABCD &= (\text{一般の}) \text{ 平行四辺形 } EBCF \\ &= \text{長方形 } E'BCF' \\ &= BC \times BE' \\ &= (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \end{aligned}$$

が得られる。

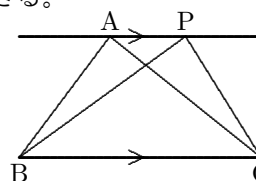
$\triangle ABC \cong \triangle CDA$ より $\triangle ABC = \frac{1}{2} \times \text{平行四辺形 } ABCD$ ，同様に $\triangle EBC = \frac{1}{2} \times \text{平行四辺形 } EBCF$ ，しかも、 $\text{平行四辺形 } ABCD = \text{平行四辺形 } EBCF$ 。よって、 $AE \parallel BC$ のとき、 $\triangle ABC = \triangle EBC$ 。

しかも $\triangle ABC = (\text{底辺}) \times (\text{高さ}) \div 2$ 。これが『原論』に基づいた三角形の面積の公式の展開である。

『原論』が絶対である、ということではなく、ここでは、算術ではなく数学的展開とは、如何なるものか、をしっかりと学んでほしい。注意すべきは、ユークリッド幾何学の立場からは、三角形の面積の公式は、平行四辺形の学習の後に導かれるものである。

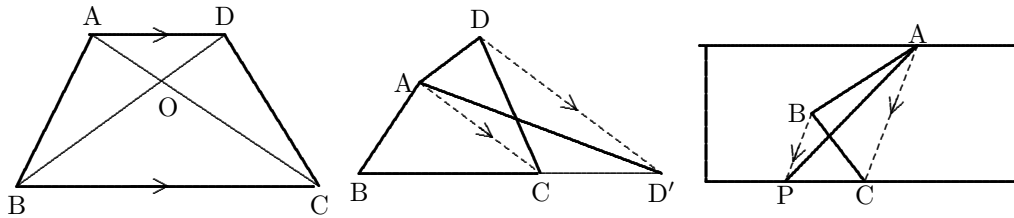
上のことから、三角形は、面積を変えずに変形させることができる。

三角形の等積移動
 点 A を通り BC に平行な直線上に点 P をとるとき
 $\triangle PBC = \triangle ABC$ である。



逆に、 $\triangle PBC = \triangle ABC$ とすると、A, P から BC までの距離が等しくなり、 $AP \parallel BC$ となる。面積を持つ図形についての等号 (=) は、面積が等しい事を表す。

等積移動の重要な応用は以下のものである。



一番左の図において、台形 ABCD で、その対角線の交点を O とすると $\triangle OAB = \triangle ODC$ 。また、中央の図において、四角形 ABCD と面積が等しい三角形の作図は、点 D を通り AC に平行な線が BC と交わる点を D' とすると、 $\triangle ABD'$ となる。また、右端の図では長方形の面積が折れ曲がった境界線で 2 分されているとき、それぞれの面積を変更することなく点 A を通る一つの直線で再分割する方法である。その他多くの問題をプリントで充分練習してほしい。その中の三つだけを例題として示す。

〔例題 1〕 「平行四辺形 ABCD において、BC 上の点を E、AE の延長線と DC の延長線との交点を F とする。このとき、 $\triangle BEF$ と $\triangle EDC$ の面積が等しいことを証明せよ。」

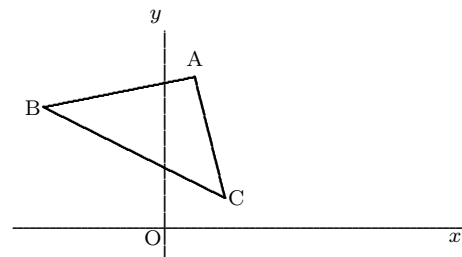
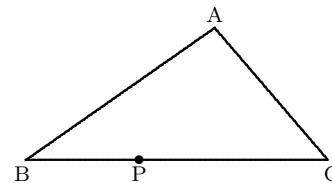
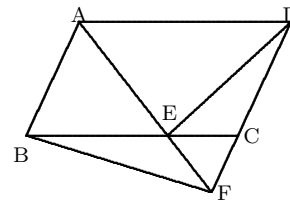
AD//BC より、 $\triangle EDC = \triangle AEC$ 。AB//DC より、 $\triangle ABC = \triangle ABF$ 。両辺から $\triangle ABE$ を引くと、 $\triangle AEC = \triangle BEF$ 。よって、 $\triangle BEF = \triangle EDC$ 。

〔例題 2〕 「 $\triangle ABC$ の辺 BC 上の点 P を通り、 $\triangle ABC$ の面積を 2 等分する直線を書きなさい。」

面積を 2 等分するのだから、とりあえず 2 等分した面積を作成しなければならない。BC の中点 M をとする。M を通り、AP に平行な直線が AC と交わる点を Q とすると、PQ が求める直線となる。

〔例題 3〕 「点 A (1,5)、点 B (-4,4)、点 C (2,1) を頂点とする $\triangle ABC$ と同じ面積となる $\triangle DBC$ となる x 軸上の点 D の座標を求めよ。」

直線 BC $y - 1 = -\frac{1}{2}(x - 2)$ が x 軸と交わる点 E の x 座標は $x = 4$ 、点 A を通り、直線 BC に平行な直線 $y - 5 = -\frac{1}{2}(x - 1)$ が x 軸と交わる点 D の x 座標は $x = 11$ である。もう一つの点 D は点 E に関して、(11,0) に対称な点だから、(-3,0)。 答え (-3,0), (11,0)



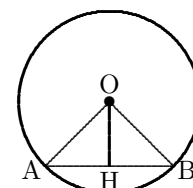
3.9 円

以下では円について現状の中学レベルで必要な定理の全てについて述べる。しかし、指導要領の順次改訂によって、入試ではこの数年に比べ、かなりレベルの高い問題が出題されると考えられる。そのため、塾プリントによる演習は欠かせない。円以外に関する定理と関連した総合的な問題となる。

3.9.1 円と直線、円と円の関係

円あるいは円周は「一点から等距離の点の集まり」である。その一点を円の中心、中心と円周上の点を結ぶ線分、あるいはその長さを半径という。円と直線は共有点があるか、ないかである。共有点が 2 個ある場合は交わるという。

右図において、 $\triangle OAB$ は $OA = OB$ の二等辺三角形である。したがって、 $\angle AOB$ の 2 等分線は底辺 AB を垂直に 2 等分する。逆に、円の中心 O は点 A、点 B から等距離にあるから、弦 AB の垂直二等分線上にある。

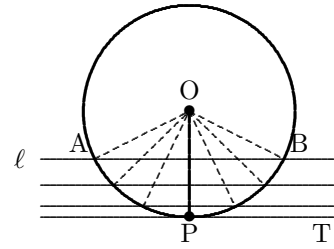


円の中心

円の中心は弦の垂直二等分線上にある。

作図題 … 右図の円を完成せよ。

右図のように、円に交わる直線 l を平行に保ったままで中心から遠ざけて（中心 O と直線の距離を大きくして）いくと、円と直線の2つの交点はどんどん近づいていく。 $\angle OAB = \angle OBA$ で、 $\angle AOB$ がどんどん小さくなるから、 $\angle OAB$ は 90° に近づき、2点 A, B は一点 P に、 $\angle OAB$ は 90° になる。このときの直線を円の接線といい、その一点を接点という。また接線と半径は垂直となる。



円の接線

円の接線は接点で半径に垂直である。

この定理は、その導出から分かるとおり、接線の定義と性質を同時に述べたものである。

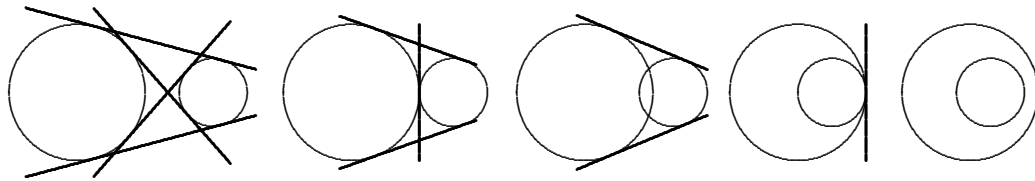
つぎに、2つの円の関係を考えよう。

円 O_1 にも、円 O_2 にも接する直線があればそれを「共通接線」という。2つの円は2つの共通接線の数と対応している。

2つの円の関係

(2つの円 O_1, O_2 の半径を r_1, r_2 ($r_1 > r_2$)、中心間の距離を d)

2つの円の関係	外部にある	外接する	2点で交わる	内接する	含まれる
中心間の距離	$d > r_1 + r_2$	$d = r_1 + r_2$	$r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2$	$d = r_1 - r_2$	$d < r_1 - r_2$
共通接線の数	4	3	2	1	0



ただし、2つの円の半径が等しいときは、「内接する」と「含まれる」が一つの「重なる」に変わる。

3.9.2 円周角

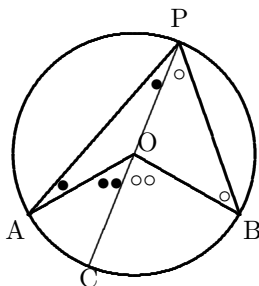
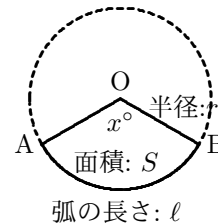
一つの円に対して、円周の一部を弧といい、この両端と中心を結ぶ2つの半径を合わせた図形を扇形という。弧の両端を結ぶ線分を弦という。また、2つの半径のなす角を中心角という。扇形の弧の長さ l 、扇形の面積 S は中心角に比例する。

扇形の中心角と弧の長さ、面積

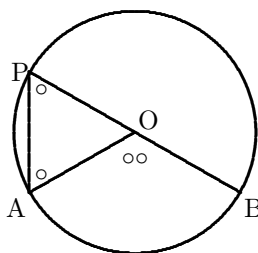
$$\text{半径を } r, \text{ 中心角を } x^\circ, \text{ 弧の長さを } l, \text{ 面積を } S \text{ すると,}$$

$$l = 2\pi r \times \frac{x}{360}, \quad S = \pi r^2 \times \frac{x}{360} \quad (S = \frac{1}{2}rl)$$

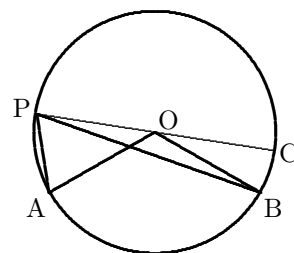
であることはよく知っている。重要なことは、弧の長さや扇形の面積が中心角に比例することである。弦の長さは中心角に比例しない。弧の両端と円周上の点を結んでできる角を円周角という。



中心が円周角の内部にある



中心が円周角の辺上にある



中心が円周角の外にある

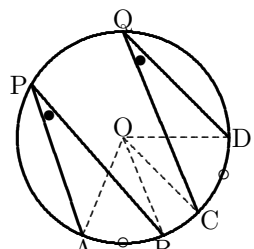
いずれの場合も、 $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$ となっている。弧 AB が決まると円周角は円周上の点 P によらず一定となる。

〔円周角の定理〕
 同じ円で同じ弧にたつ円周角は等しく、中心角の半分である。

念のため、中心が円周角の外にある場合について証明を書いておく。
 $\triangle OPA$ は $OP=OA$ (半径) の二等辺三角形だから $\angle OAP = \angle OPA$ 、したがって、 $\angle AOC = \angle OPA + \angle OAP = 2\angle OPA$ 。
 同様に $\angle BOC = 2\angle OPB$ 。よって、 $\angle AOB = \angle AOC - \angle BOC = 2\angle OPA - 2\angle OPB = 2(\angle OPA - \angle OPB) = 2\angle APB$ 。
 したがって、 $\angle APB = \frac{1}{2} \angle AOB$ 。
 中心が円周角の辺上にある場合、中心が円周角の内部にある場合は、上の図を用いて、自分で証明しておこう。

この定理から、直ちに次の定理も成り立つことがわかる。

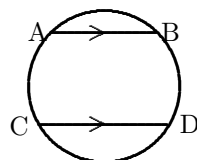
〔円周角と弧の定理〕
 (1) 同じ円で等しい弧に対する円周角は等しい。
 (2) 同じ円で等しい円周角に対する弧は等しい。



各自、(1), (2) とも証明しておこう。また、半径が同じ円は合同であることを思い出しておこう。したがって、この定理は、同じ円について述べているが、半径が等しい2つの円の弧に対する定理と見なしてもよい。

この定理の重要性は次の問題に表れている。

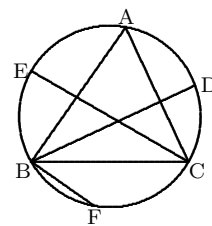
〔例題〕「図のように円が平行な2直線で切り取られるときにできる2つの弧 AC と弧 BD が等しいことを証明せよ。」



もう既に学習し終わっているかも知れないが、証明の仕組みを身につける的確な問題である。①結論は弧 AC と弧 BD が等しい、②仮定 $AB \parallel CD$ を使わねばならない。③円周角と弧の定理の学習のときである。以上が問題設定だ。弧が等しいことをいうためには、円周角が必要になる。そのため補助線 AD をひく。直ちに、仮定 $AB \parallel CD$ から、 $\angle BAD = \angle CDA$ である。よって弧 AC と弧 BD は等しい、となる。(残念ながら、最近の教科書にはあらかじめ補助線が引かれているものが多い。図形の証明問題は一期一会だ。)

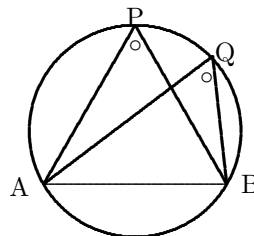
〔演習〕「図において、3点 A, B, C は円周上の点であり、2点 D, E はそれぞれ $\angle ABC$, $\angle ACB$ の二等分線と円との交点である。また、点 F は $EC \parallel BF$ となるような \widehat{BC} 上の点である。このとき、 $\triangle ADE \cong \triangle CDF$ を証明せよ。」(智弁和歌山 13 年度)

ヒント：各辺の弧に対する円周角を比較せよ。



円周角の定理の逆の定理も成立する。

〔円周角の定理の逆〕
 2点 A, B を結ぶ直線の同じ側に点 P, Q があり、
 $\angle APB = \angle AQB$ のとき、この4点は同じ一つの円周上にある。



証明はこれまで用いてきた論理とちょっと違う方法を用いる。

$\triangle APB$ の外接円を円 O とし、点 Q は直線 AB に関して点 P と同じ側にあるとする。このとき次のことが成り立つ。(自分で証明しておくこと)

- (1) 点 Q が円の外にある $\rightarrow \angle AQB < \angle APB$
- (2) 点 Q が円周上にある $\rightarrow \angle AQB = \angle APB$
- (3) 点 Q が円の内にある $\rightarrow \angle AQB > \angle APB$

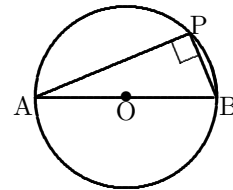
の3つの場合のみである。したがって $\angle AQB = \angle APB$ となるのは点 Q が円周上にあるときだけである、

すなわち (2) の逆, 「 $\angle AQB = \angle APB$ ならば点 Q が円周上にある」が成り立つ。よって証明された。

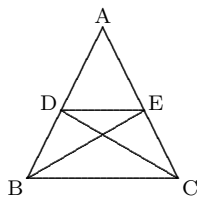
こうした証明法を「転換法」と言う。「集合と論理」(『中学数学発展』)を読み直しておいて欲しい。

自明だが, 直角三角形について, 重要な性質がある。

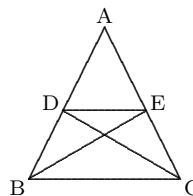
〔直径と円周角
直径に対する(半円の弧に対する)円周角は 90° である。〕



〔演習 1〕 $AB=AC$ である二等辺三角形 ABC で, 点 D , 点 E は AB, AC 上において, $\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$ である。
 $DE \parallel BC$ を証明せよ。(ヒント: 4 点 D, B, C, E が同一円周上にある, $\triangle DBC \cong \triangle ECB$ を用いる。)



〔演習 2〕 $\triangle ABC$ で, 点 D , 点 E は AB, AC 上において, $\angle BDC = \angle BEC = 90^\circ$ であり, $DE \parallel BC$ である。 $\triangle ABC$ は二等辺三角形であることを証明せよ。

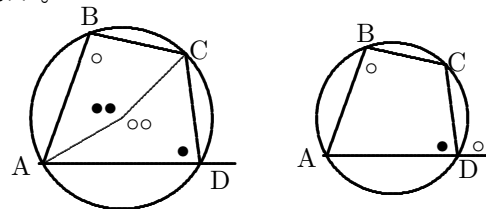


次に内接四角形について考える。

多角形の全ての頂点の一つの円周上にあるとき, その多角形は円に内接するという。三角形は常に外接円に内接する。四角形が内接するとき次の定理が成立する。

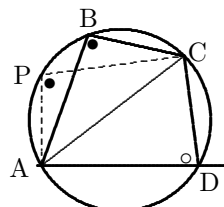
証明は簡単で, 対角のそれぞれの中心角の和は 360° を使えばよい。

〔円に内接する四角形の性質
(1) 対角の和は 180° である。
(2) 外角はそれと隣り合う内角の対角に等しい。〕



この定理は逆も成立する。

〔四角形が円に内接する条件
次の条件のどちらかで, 四角形は円に内接する。
(1) 対角の和は 180° である。
(2) 外角はそれと隣り合う内角の対角に等しい。〕



証明は簡単で, 図において, $\angle B + \angle D = 180^\circ$ とする。 $\triangle ADC$ の外接円の弧 AC 上の点を P とすると四角形 $APCD$ は円に内接するから $\angle P + \angle D = 180^\circ$ である。したがって, $\angle P = \angle B$ 。よって, 円周角の定理の逆によって A, P, B, C は同じ円周上にある, すなわち四角形 $ABCD$ は円に内接する。

四角形の内接条件は, 円周角の定理の逆とともに, 4 点が円周上にある条件を形成する。

次の定理は円に内接する四角形の代表例である。

「三角形の外接円の周上の任意の点から三角形の各辺へ下ろした垂線と辺の交点は同一直線上にある。逆も成立する。」(シムソンの定理)

P が $\triangle ABC$ の外接円上にある条件 $\angle ABP + \angle ACP = 180^\circ \dots (1)$

H, I, C が同一直線上にある条件 $\angle HIP + \angle JIP = 180^\circ \dots (2)$

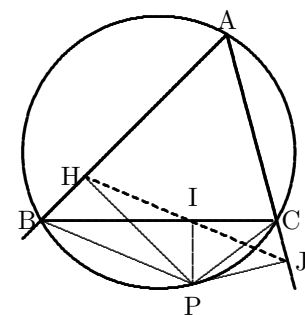
I, P, J, C が同一円周上にある条件 $\angle JIP + \angle ACP = 180^\circ \dots (3)$

H, B, P, I が同一円周上にある条件 $\angle HIP + \angle ABP = 180^\circ \dots (4)$

(3), (4) より, $\angle ABP + \angle ACP + \angle HIP + \angle JIP = 360^\circ$

したがって, (1) が成立すれば (2) も成立し, (2) が成立すれば (1) も成立する。

シムソンの定理の逆の定理は, 4 点が同一円周上にある条件の定理と見なすこともできる。さらに, 相

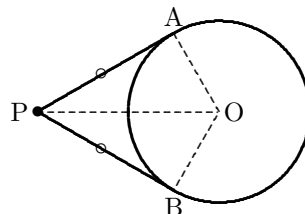


似の応用として学ぶ「トレミーの定理の逆」も4点在同一円周上にある条件の定理と見なすこともできる。

3.9.3 円と接線

接線に関わる定理は3つだけである。すでに「円の接線の定理」によって接線は接点で半径に垂直であることを知っている。2つ目の接線に関する定理は

接線の長さ
円外の一点からその円に引いた2つの接線の長さは等しい。



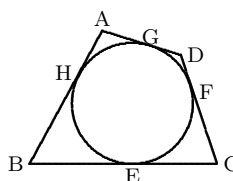
である。証明は $\triangle POA \cong \triangle POB$ を示せばよい。自分で証明しておこう。

接線の長さの定理の問題を一つだけ考える。

【例題1】 「円に外接する四角形の2組の対辺の和は等しい。」

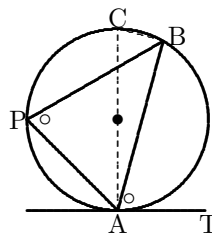
AH=AG, BH=BE, CF=CE, DF=DG より、

$$\begin{aligned} AB+CD &= AH+BH+CF+DF \\ &= AG+BE+CE+DG \\ &= AG+DG+BE+CE \\ &= AD+BC \end{aligned}$$



3つ目の接線に関わる定理は、

接弦定理
円の接線と接点を通る弦のつくる角は、
この角内にある弧に対する円周角に等しい。
である。

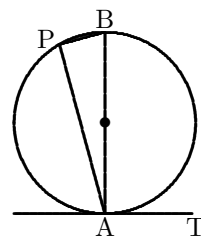


図の場合、直径 AC を引くと、 $\angle APB = \angle ACB$,

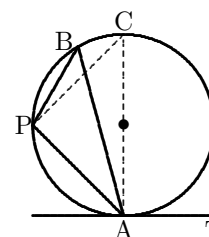
$$\angle ABC = 90^\circ, \angle CAB + \angle BAT = 90^\circ$$

を用いると、 $\angle APB = \angle BAT$ となる。

接弦定理も、円周角の定理と同じ様に、右の2つの場合も含む。いずれも簡単だから、自分で証明しておこう。



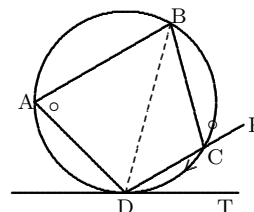
AB が直径の場合



$\angle APB$ が鈍角の場合

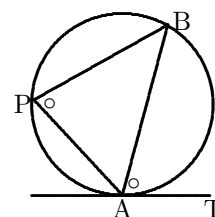
接弦定理は「円に内接する四角形の性質」の定理の延長上にある。

四角形 ABCD は円に内接し、DT は円周上の点 D での接線とする。円に内接する四角形の性質より、 $\angle A = \angle BCP$ である。点 C が円周上を点 D に向かって近づくと、直線 DC は接線 DT に近づき、 $\angle BCP$ は $\angle BDT$ となる。したがって、 $\angle BDT = \angle A$ となる。これは、接線の性質 (接線の定義に関わっていた) から、自然な考え方である。



接弦定理は逆も成り立つ。

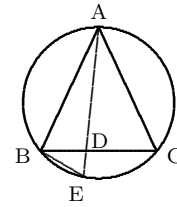
接弦定理の逆
円周上の点 A を通る直線 AT と弦 AB のつくる角が、
この角内にある弧に対する円周角に等しければ、AT は接線である。
点 A における接線は1本だけである (同一法)。同一法は三平方の定理の逆のところで、解説してある。



接弦定理の逆の問題を一つだけ考える。

〔例題 2〕 「 $AB=AC$ の二等辺三角形の頂点 A を通る直線と辺 BC との交点を D , $\triangle ABC$ の外接円との交点を E とする。このとき, 直線 AB は 3 点 B, D, E を通る円の接線であることを証明せよ。」

ヒント : $\angle ABC = \angle ACB = \angle AEB$



ほうべき
方巾の定理は相似のところで議論する。円の性質は, 相似, 三平方の定理と不可分の関係にある。一通り図形の学習を終えてから, 塾の演習プリントとあわせて, この節を復習して欲しい。

3.10 相似

3.10.1 相似の基礎

「一つの図形を、形を変えずに一定の割合に拡大，または縮小して得られる図形は，元の図形と相似である」と教科書には書いてある。最近では少し改善して，「あらゆる方向に同じ割合で拡大（縮小）したものを相似」と定義してあるものもある。しかし，まじめに数学を学習しようとする人には，全くその意味が伝わらない。ここでは，「ユークリッドの原論」の展開を活用して明確に相似を定義し，後の議論に備える。（「新しい数学の教科書」（2012年3月初版第1刷）武藤徹著 文一総合出版 には，本書とは違った別の明確な展開がある。検定教科書は，抜本的に改めるべきだ，と考えているのは筆者だけではない。）

基礎となる2つの定理から始める。

△OABの辺OA，OBの延長上に，それぞれ点C，Dをとるとき，
 $AB \parallel CD$ ならば， $OA : OC = OB : OD$ が成り立つ。
 また，逆も成り立つ。

証明

△OADにおいて， $\triangle AOB : \triangle ABD = OB : BD$ … ①

△OBCにおいて， $\triangle AOB : \triangle ABC = OA : AC$ … ②

$AB \parallel CD$ より $\triangle ABD = \triangle ABC$ （等積移動）。

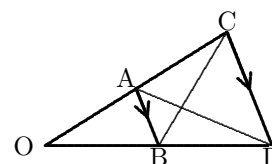
したがって，①から， $\triangle AOB : \triangle ABC = OB : BD$ … ③

②，③から $OA : AC = OB : BD$ … ④

④と比の性質より $OA : (OA + AC) = OB : (OB + BD)$ よって $OA : OC = OB : OD$

逆に， $OA : OC = OB : OD$ ならば， $OA : AC = OB : BD$ となり，①，②から $\triangle ABC = \triangle ABD$ となる。

ABを底辺とした2つの三角形の高さが等しくなり， $AB \parallel CD$ となる。



もう一つの定理は

△ABCと△DEFにおいて， $\angle B = \angle E$ ， $\angle C = \angle F$ ならば，
 $AB : DE = BC : EF = CA : FD$

証明

図のように，辺BCと辺EFが一直線上になるように，点Cと点Eを重ねる。

また，辺BAの延長と辺FDの延長との交点をGとする。

このとき，仮定から $AG \parallel CD$ ， $AC \parallel GD$ ，よって，2組の対辺がそれぞれ平行であるから，四角形ACDGは平行四辺形である。よって，

$AG = CD$ ， $AC = GD$ … ①。

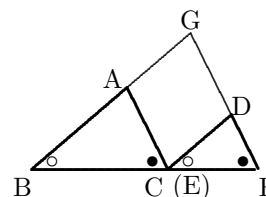
△BFGにおいて， $AC \parallel GF$ であるから， $BA : AG = BC : CF$ 。したがって，①を用いると，

$AB : DC = BC : CF$ ($AB : DE = BC : EF$) … ②。

△BFGにおいて， $CD \parallel BG$ であるから， $FC : CB = FD : DG$ 。したがって，①を用いると，

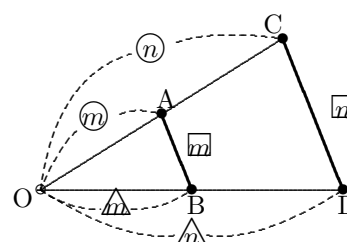
$FC : CB = FD : CA$ ($BC : EF = CA : FD$) … ③。

②，③から $AB : DE = BC : EF = CA : FD$

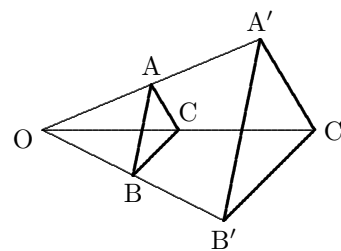


上二つの定理を用いると，以下のようなになる。

OA，OBの延長上に点C，Dをとり，点Oからの距離の比がそれぞれ $m : n$ であるとすると，線分CDは線分ABの拡大（縮小）になっている。このように，図形の対応する点を一点Oを通る同じ向きの直線上にとり，点Oからの距離の比 $m : n$ を全て一定にした図形を「相似の位置」にある，点Oを相似の中心，その比を相似比という。線分CDは線分ABと相似の位置にあり， $AB \parallel CD$ ， $AB : CD = m : n$ である。

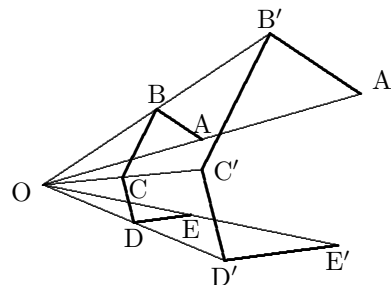


右図のような面上に広がった三角形では、 $AB \parallel A'B'$ 、 $AC \parallel A'C'$ だから、 $\angle A = \angle A'$ となる。すなわち、三角形で考えると、相似の位置によって、対応するどの方向の線分の長さの比も等しくすると、対応する角の大きさは変わらないことになっていた。



この考えは、一般の折れ線図形に拡張できる。

右図で、折れ線 ABCDE と折れ線 $\angle A'B'C'C'D'$ は相似の位置にある。たとえば、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ の対応を考えると、 $\angle B = \angle B'$ となる。さらに、たとえば、AB と DE のなす角は $\angle A'B'$ と $\angle D'E'$ のなす角に等しくなる。

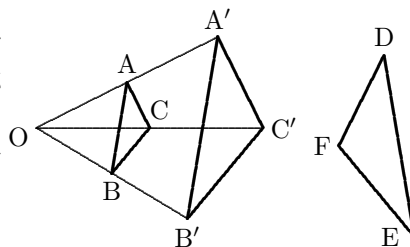


以上によって、拡大（縮小）の意味がかなり明確になってきた。相似の位置によって、対応するどの方向の線分の長さの比も等しくすると、対応する角の大きさは変わらないことになっていた。

では一般に、対応する線分の比が全て等しい三角形では対応する角は等しいだろうか。

$AB:DE=BC:EF=CA:FD = m:n$ の $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ を考える。

$\triangle ABC$ と相似比が $m:n$ で $\triangle ABC$ と相似の位置にある $\triangle A'B'C'$ を描く。3辺相等で $\triangle A'B'C' \equiv \triangle DEF$ 。よって $\angle BAC = \angle EDF$ である。したがって、線分の長さの比が全て等しい三角形では、対応する角はそれぞれ等しくなっている。より一般的な表現をすると、線分の長さの比が全て等しい2つの三角形は、相似な位置に移動することができる。この議論は後で出てくる三角形の相似条件の (1) の証明にもなっている。



後で出てくる三角形の相似条件の (2) の証明も行っておこう。

同じ図で、 $AB:DE=AC:DF = m:n$ で、 $\angle BAC = \angle EDF$ の $\triangle ABC$ 、 $\triangle DEF$ を考える。同様に $\triangle ABC$ と相似比が $m:n$ の $\triangle A'B'C'$ を相似の位置に描く。 $\triangle A'B'C'$ と $\triangle DEF$ は2辺夾角相等で合同となる。したがって、 $\triangle DEF$ を $\triangle ABC$ と相似な位置に移動させることができる。

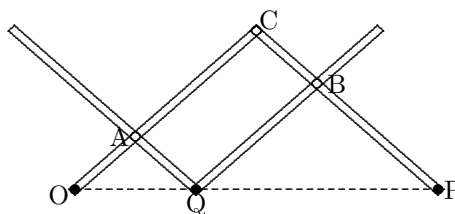
さらに、後で出てくる三角形の相似条件の (3) の証明も行っておこう。

同じ図で、 $\angle A = \angle D$ 、 $\angle B = \angle E$ とし、 $AB:DE = m:n$ とする。この場合も1辺両端角相等によって $\triangle A'B'C'$ と $\triangle DEF$ の合同が成り立ち、 $\triangle DEF$ を $\triangle ABC$ と相似な位置に移動することができる。

多角形は、三角形に分解することによって、上の全ての議論が成り立つことがわかる。曲線を含む一般の平面図形も、小さな折れ線の寄せ集めと考えれば、同じようにとり扱うことができる。

一つの図形に対して、何倍かに拡大縮小した相似な位置の図形を作成する「拡大器」がある。

白地図などの作成に用いていた。現在はコピーの拡大縮小が簡単になり、使われなくなった（塾にあるから試しておいてほしい）。 $OC=PC$ 、 $OA=QA$ 、四角形 AQBC は平行四辺形とすると、点 Q は OP 上にあり、 $OA:OC=OQ:OP$ で、点 P に鉛筆を立て、ここをもって点 Q が図形をなぞるように点 P を動かすと、点 P は $OA:OC$ の比の拡大図を描く。



相似変換 …… 定点 O と、定数 k に対して、図形上の全ての点について $OP' = kOP$ である点 P' からなる図形を「相似変換」した図形という。相似変換した図形はもとの図形と相似の位置にある。

以上によって、ここで改めて、相似を明確に定義することができるようになった。

相似の定義

相似の位置に移動できる2つの図形は相似である。

(図形 A) と (図形 B) が相似であることを, (図形 A) \sim (図形 B) と表す。以上の議論によって直ちに次の, 相似な図形の性質の定理がえられる。

- 相似な図形の性質
- (1) 対応する線分の長さの比は皆同じである。
 - (2) 対応する角はそれぞれ等しい。

(1) について, もし図形の一部が曲線を含んでいたら, 対応する曲線の長さの比も等しいことがわかる。それは, 曲線を短い線分の集まりで表すと, それぞれの対応した線分の長さの比は全て同じだから, それらを加え合わせた曲線の長さについても, その比は相似比に等しくなるからである。

図の中に線で囲まれた図形が含まれていれば, その面積の比は $m^2 : n^2$ に等しい。

相似の位置の図で, $\triangle OAB : \triangle OA'B'$, $\triangle OAC : \triangle OA'C'$, $\triangle OCB : \triangle OC'B'$ はすべて $m^2 : n^2$ だから, $\triangle ABC : \triangle A'B'C' = m^2 : n^2$ である。これぐらいは, 自分で証明しておこう。

その際, $x : x'$ も $y : y'$ も $m : n$ に等しければ, $(x - y) : (x' - y') = m : n$ も確認しておこう。(「比の式」参照)

$$\frac{x}{x'} = \frac{y}{y'} = \frac{m}{n} = k \text{ より, } x = kx', y = ky'. \frac{x - y}{x' - y'} = \frac{kx' - ky'}{x' - y'} = k = \frac{m}{n} \text{ よって, } (x - y) : (x' - y') = m : n$$

- 相似比 $m : n$ の図形の面積比, 体積比
- (1) 相似な図形の面積の比は相似比の 2 乗に等しい。 $m^2 : n^2$
 - (2) 相似な図形の体積の比は相似比の 3 乗に等しい。 $m^3 : n^3$

(2) については空間図形に関する定理であるが, 相似の定義は平面図形と全く同じだから, 納得できる。三角錐については以下のように説明できる。他の空間図形は, 三角錐の集まりだと考えれば, 同じ定理が成り立つことが理解できる。

右図のように, 相似な三角錐 A-BCD と三角錐 A'-B'C'D'

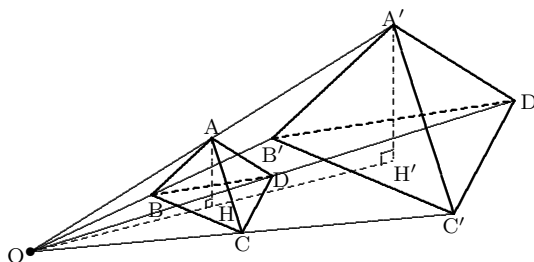
の相似比を $m : n$ とすると,

$$\text{底面積 BCD} : \text{底面積 B'C'D'} = m^2 : n^2,$$

$$\text{高さについて, AH} : \text{A'H'} = m : n.$$

従って, 体積について,

$$\begin{aligned} \text{三角錐 A-BCD} : \text{三角錐 A'-B'C'D'} \\ &= \frac{1}{3} \text{底面積 BCD} \times \text{AH} : \frac{1}{3} \text{底面積 B'C'D'} \times \text{A'H'} \\ &= m^3 : n^3 \end{aligned}$$



全ての円, 全ての正多角形などはそれぞれ相似であることがわかる。また, 後で示すが, 全ての放物線や全ての反比例のグラフ (直角双曲線) も互いに相似である。これらは, 全て相似の定義にしたがって簡単に証明できる。

次は, 図形が相似である条件の定理の番だ。相似の条件は相似の定義から求まる。「2 乗に比例する関数」のところでは, 「全ての放物線は相似である」ということを証明する。これは, 放物線が式で表現され, 簡単に 2 つの放物線が相似の位置にあることが言えるからである。また, 「全ての円は相似である」なども相似の位置へ移動させることによって, 簡単に証明できる。しかし, 合同の場合と同じように, 一般の図形についての相似条件を定式化する事はできない。三角形については次の相似条件が得られる。

- 三角形の相似条件
- 次のいずれかの条件が成り立てば, 2 つの三角形は相似である。
 - (1) 3 組の辺の比が等しい。
 - (2) 2 組の辺の比が等しく, その間の角が等しい。
 - (3) 2 組の角がそれぞれ等しい。

これらは全て既に証明した。

直角三角形の合同条件に対応した, 「直角三角形の相似条件」も議論できる。

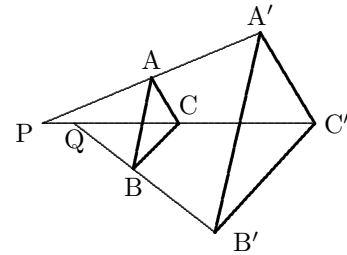
特に役立つのは, 「2 組の辺の比が等しい直角三角形は相似である」である。自分で証明しておこう。

一般の「直線図形」は三角形の組み合わせと考えると, そのまま適用できる。

また逆に、次のことが言える。

相似の位置
 $AB//A'B', BC//B'C', CA//C'A'$ ならば、 $\triangle ABC$ と $\triangle A'B'C'$ は相似の位置にある。

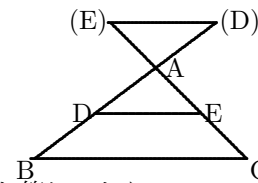
AA', CC' の交点をPとすると、 $PC:PC' = AC:A'C'$ である。また、 BB', CC' の交点をQとすると、 $QC:QC' = BC:B'C'$ である。ところが、2組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABC \sim \triangle A'B'C'$ で、 $AC:A'C' = BC:B'C'$ 。したがって $PC:PC' = QC:QC'$ となり、P, Qは一致する。この点が相似の中心である。



3.10.2 相似の応用

相似に関する定理を整理しておく。

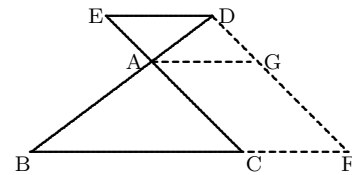
三角形と比
 AB, AC 上の点をD, Eとする。
 (1) $DE//BC$ ならば、 $AD:AB=AE:AC=DE:BC$
 (2) $DE//BC$ ならば、 $AD:DB=AE:EC$



$DE//BC$ より、 $\angle ADE = \angle ABC$, $\angle AED = \angle ACE$ 。2組の角がそれぞれ等しいから $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ 。よって $AD:AB=AE:AC=DE:BC$ 。また、 $AD:DB=AE:EC$ ($a:b=x:y$ ならば $a:(b+ka)=x:(y+kx)$ を使っても良い)。

右図のように、D, EがB, CとAに関して反対側にあるときも成り立つ。

点Dを通りECに平行な直線とBCとの交点を点F、点Aを通り、EDに平行な直線とDFとの交点をGとすると、四角形ECFD、四角形EAGDは平行四边形となり、 $EC=DF$, $ED=AG=CF$ となる。



したがって、

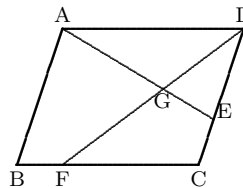
$$AD:DB=GD:DF=AE:EC$$

$$AD:AB=GD:GF=AE:AC \quad AD:AB=CF:CB=DE:BC$$

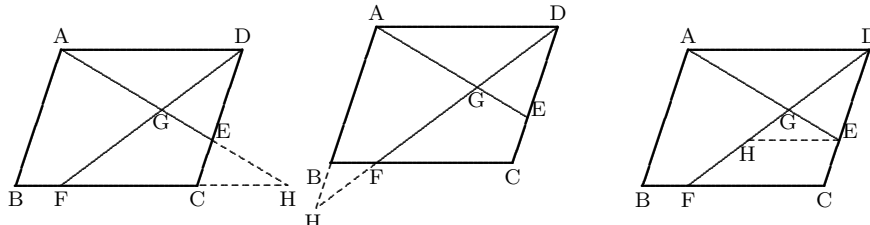
よって、(1), (2)の全ての関係は証明された。

以後の定理を含め、相似の応用はほとんどが「三角形と比」の定理から出発する。次の例題で、そのことを自覚しておこう。

〔例題〕 「図において、四角形ABCDは平行四辺形であり、 $BF:FC=1:3$, $DE:EC=2:1$ である。このとき、 $DG:GF$ を求めなさい。」



論理の中心は「比 \leftrightarrow 平行線」であり、したがってキーとなるテクニックは「平行線が使えるように補助線を引く」である。有効な補助線はいろいろ可能である。たとえば次のようなものがある。



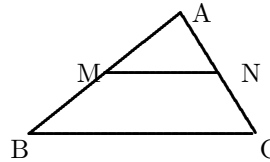
左の図の場合。BF:FC=1:3だから、BF, FCをそれぞれ①, ③とおくと、CHは②, FHは⑤となる。

$DG:GF=AD:FH=④:⑤$ 。したがって、4:5。後の2つはわかるまで自分で考えよ。

三角形と比の逆
 AB, AC 上の点をD, Eとする。
 (1) $AD:AB=AE:AC$ ならば、 $DE//BC$
 (2) $AD:DB=AE:EC$ ならば、 $DE//BC$
 比が等しいことから、 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ が成り立ち、同位角が等しく、平行となる。

中点連結定理

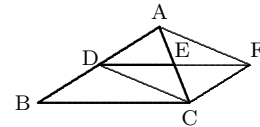
M, N が AB, AC の中点ならば,
 $MN \parallel BC$,
 $MN = \frac{1}{2}BC$



中点連結定理は「三角形と比の定理」に完全に含まれている。応用上、便利だから定理にしているだけである。

しかし、中点連結定理は、相似を使わないでも証明できる。

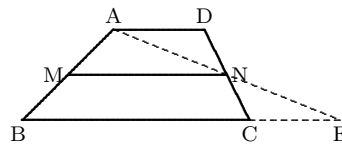
$\triangle ABC$ の AB, AC の中点を D, E とし、DE の延長上に $DE=EF$ となる点 F を取る。点 E は AC, DF の中点より、四角形 ADCF は平行四辺形となり、 $AD \parallel FC$, $AD=FC$ である。したがって、 $DB \parallel FC$, $DB=FC$ となり、四角形 DBCF は平行四辺形である。よって、 $DE \parallel BC$ 。また $DE = \frac{1}{2}DF = \frac{1}{2}BC$ 。



(15 年ほど前までの『中学数学基礎』は、これを整数比 $m:n$ に拡張し、“相似”の基礎を構成していた。少し話が長くなるので、現在は、『原論』に従った構成に改めている。もちろん指導要領準拠の教科書の“相似”は、現在でも、“数学”になっていない。)

[台形の中点連結定理] $AD \parallel BC$ である台形 ABCD の辺 AB, DC の中点をそれぞれ M, N とする。このとき、

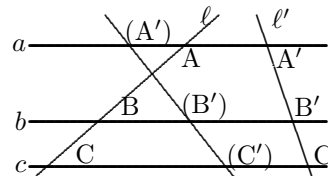
$MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(AD+BC)$ である。



(証明) 直線 AN と BC との交点を E とすると、 $\triangle ADN \cong \triangle ECN$ 。したがって、 $AN=EN$ 。M, N はそれぞれ AB, AE の中点だから、中点連結定理より、 $MN \parallel BE$, $MN = \frac{1}{2}BE$ 。 $AD=EC$ だから、 $MN \parallel BC$, $MN = \frac{1}{2}(AD+BC)$

平行線と比

平行な 3 つの直線 a, b, c が直線 ℓ, ℓ' とそれぞれ A, B, C および A', B', C' で交われれば,
 $AB:A'B' = BC:B'C'$



点 A を通り、直線 ℓ' と平行な直線が直線 b, 直線 c と交わる点をそれぞれ D, E とする (図は省略)。三角形と比の定理から、 $AB:BC=AD:DE$, また四角形 $ADB'A'$, 四角形 $DEC'B'$ は平行四辺形だから、 $AD=A'B'$, $DE=B'C'$ 。よって $AB:BC=A'B':B'C'$ 。したがって、 $AB:A'B'=BC:B'C'$ 。

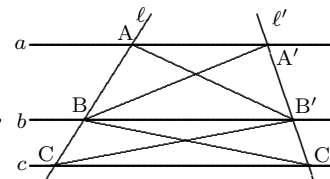
武藤徹著「新しい数学の教科書」には、この定理を面積の考え方 (等積移動) で証明し、全ての「相似」の考えの基礎にしている。重要なことは、我々も展開は全く違うが、その基礎には、面積の考え (等積移動) を用いている。

図において、直線 a, b, c は平行である。

したがって、 $\triangle ABB' = \triangle A'BB'$, $\triangle C'BB' = \triangle CBB'$

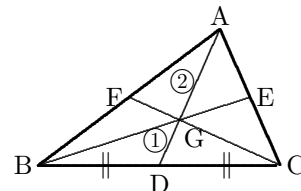
よって、 $AB:BC = \triangle ABB' : \triangle CBB' = \triangle A'BB' : \triangle C'BB' = A'B':B'C'$

点 A と点 A' が一致するとき、「三角形と比の定理」になる。「三角形の比の定理」の逆は、同一法によって、直ちに導かれる。



三角形の重心

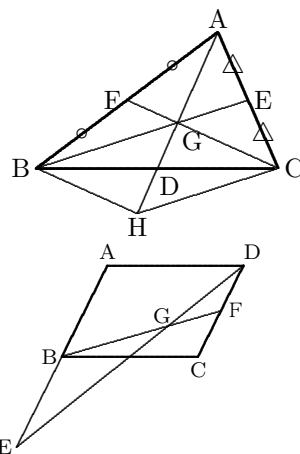
三角形の 3 つの中線は 1 点で交わる。
 その交点は中線を 2:1 に分ける。



FD は中点連結定理から、 $FD \parallel AC$, $FD = \frac{1}{2}AC$ 。したがって $DG = \frac{1}{2}AG$ 。よって中線 AD, CF の交点 G は AD を 2:1 に内分する点である。同様に中線 AD, BE の交点も AD を 2:1 に内分する。よって、3 中線は 1 点 G で交わり、互いに中線を 2:1 に内分する。

さて、上の証明では重心は 3 中線が一点で交わる点であり、これは中線 BE と AD の交点と、中線 CF と AD の交点一致する事と同等である、と考えたからである。「一点で交わる」ということを別の言い方に変えて証明する事もできる。

中線 BE, CF の交点を G とする。AG を延長し BC との交点を点 D, AG=GH となるように点 H をとる。AF=FB, AG=GH で中点連結定理より, FG//BH。同様に EG//CH。したがって四角形 GBHC は平行四角形となり, その対角線の交点 D は BC の中点である。よって 3 中線は一点で交わる。



〔問題〕 図のように, 平行四角形 ABCD があり, 点 E は線分 AB の延長上の点で, AB=BE である。点 F は線分 CD の中点であり, 点 G は線分 DE と線分 BF の交点である。これについて, 次の問いに答えなさい。(香川県)

- (1) BG:GF=2:1 であることを証明しなさい。
- (2) 3 点 A, G, C は一直線上にあることを証明しなさい。

(ヒント: G は $\triangle BCD$ の重心である)

三角形の重心, 外心, 内心, 垂心, 傍心を三角形の「五心」という。三角形の五心をまとめておく。

重心 … 三角形の 3 つの中線の交点 … 理科の重心と同じ (理由は『中学理科基礎』参照)

外心 … 三角形の 3 辺の垂直二等分線の交点 … 外接円の中心

内心 … 三角形の 3 つの内角の二等分線の交点 … 内接円の中心

垂心 … 三角形の 3 つの頂点から対辺へ下ろした垂線の交点

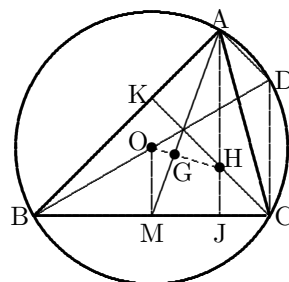
傍心 … 三角形の内角とそれと隣り合わない 2 つの外角のそれぞれの二等分線の交点 … 3 つある。

「五心」は全く同様の証明法を用いることができる (全て, 必ず証明しておいてください)。多くの場合「点が一致する」という証明法の方が簡単である。

「五心」にはいろいろな関係があるが, ここでは, 一つだけ取り上げる。

「 $\triangle ABC$ の重心を G, 外心を O, 垂心を H とするとき,
これらの 3 点は一直線上にある。」

外心 O から BC への垂線を OM, 外接円 O と BO の交点を D, 垂線 AH, CH と BC, AB との交点を J, K とする。AJ//DC, CK//DA より, 四角形 AHCD は平行四角形となり, AH=DC。OM:AH=OM:DC=1:2。AM と OH の交点を G' とすると, OM//AJ より, MG':G'A=OM:AH=1:2。この G' は重心 G と一致する。したがって, O, G, H は同一線上にある。



〔演習〕 「 $\triangle ABC$ の内心を I, $\angle A, \angle B, \angle C$ の内部にある傍心を, それぞれ I_1, I_2, I_3 とする。I は $\triangle I_1 I_2 I_3$ の垂心であることを証明しなさい。」 ($I_1 A \perp I_3 I_2$ を証明すればよい。各自作図して確かめて下さい。)

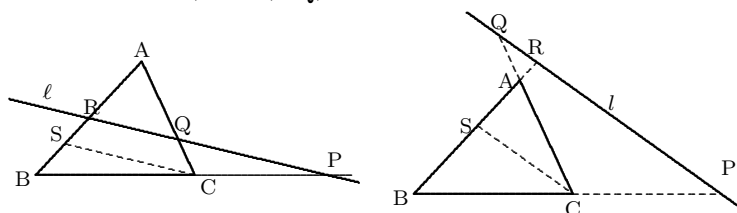
メネラウスの定理

直線 l と $\triangle ABC$ の辺 BC の延長との交点を P, 直線 l と辺 CA, AB との交点を

Q, R とするとき,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \text{ が成り立つ。}$$

逆 (この式を満たせば, 点 P, Q, R は同一線上にある) も成り立つ。



C を通り l に平行な直線が AB と交わる点を S とする。

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = \frac{BR}{RS} \cdot \frac{SR}{RA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

となる。逆に,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR'}{R'B} = 1$$

を満たす AB 上の点 R' は $\frac{AR'}{R'B} = \frac{AR}{RB}$ となり、R' は R と一致する。

すなわち R' は直線 l 上になる。

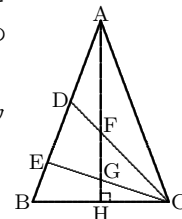
この証明から分かる通り、メネラウスの定理は「三角形と比」の定理を適用しただけのものであるが、少し複雑な問題に対して、しばしば式を使った見通しよい解答を提供する。

以下の例題でそのことを確認しておこう。

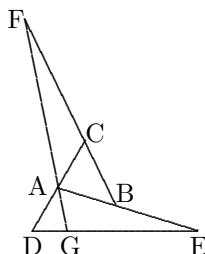
〔例題 1〕 図において、 $\triangle ABC$ は AB の長さと AC の長さが等しい二等辺三角形です。また、AH と BC は垂直で、AD の長さは 4cm、DE の長さは 3cm、EB の長さは 2cm、AH の長さは 8cm です。このとき、 $\triangle AFC$ の面積は $\triangle ABC$ の面積の ① 倍です。また、FG の長さは ② cm です。

これは 11 年度のある中学の入試問題である。①では、 $\triangle ABH$ に直線 CD が交わったとして、メネラウスの定理を使い AF を求める。②では、 $\triangle ABH$ に直線 CE が交わったとして GH を求める。

① $\frac{4}{13}$ ② $2\frac{1}{13}$

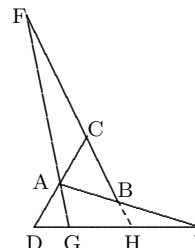


〔例題 2〕 しつこく、メネラウスの定理を利用すれば簡単に解ける問題が中学入試で出題されている。
 (AC の長さ):(AD の長さ)=1:1 (AB の長さ):(BE の長さ)=1:2 (BC の長さ):(CF の長さ)=1:3
 このとき、三角形 ADG の面積は、三角形 ABC の面積の \square 倍です。(灘中学校 2017 年度) (0.6 倍)



ヒント メネラウスの定理を用いる。

- $\triangle DAE$ を FH で切断して、EH:HD=1:1
- $\triangle DCH$ を EA で切断して、CB:BH=1:0.5
- $\triangle DCH$ を FG で切断して、HG:GD=2:3



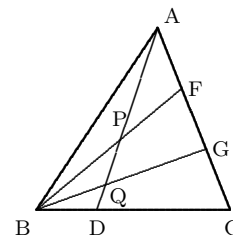
計算をするだけなら、ちょっと進んだ小学生なら、これらは解ける。もし君が中学生としての自覚があるのなら、メネラウスの定理の、図形の学習での位置を考えておこう。

〔例題 3〕 「三角形 ABC において、点 D は辺 BC 上にあり、BD:DC=1:2 をみます。点 F, G は辺 AC 上にあり、AF:FG:GC=1:1:1 をみます。AP:PQ:QD を最も簡単な整数の比で表しなさい。」

この種の問題は分かりにくく、点 D を通る 2 つの補助線、BF に平行な直線と BG に平行な直線を引くことによって解けるが、結局メネラウスの定理を 2 度使うことと同じことになる。線分 AD 上の長さの比を求めるのだから、これらが関わるようにメネラウスの定理を使えばよい。

$\triangle ADC$ に直線 BF が交わっていると考えると、 $\frac{CB}{BD} \cdot \frac{DP}{PA} \cdot \frac{AF}{FC} = 1$ 、
 よって、 $\frac{3}{1} \cdot \frac{DP}{PA} \cdot \frac{1}{2} = 1$ から、 $PA = \frac{3}{2}DP = \frac{3}{2}(DQ+QP) \cdots (1)$

$\triangle ADC$ に直線 BG が交わっていると考えると、 $\frac{CB}{BD} \cdot \frac{DQ}{QA} \cdot \frac{AG}{GC} = 1$ 、
 よって、 $\frac{3}{1} \cdot \frac{DQ}{QA} \cdot \frac{2}{1} = 1$ から、 $QP+PA=QA=6DQ$ 、(1) を代入して、
 $QP = \frac{9}{5}DQ \cdots (2)$ 、 $PA = \frac{3}{2}(DQ + \frac{9}{5}DQ) = \frac{21}{5}DQ$
 よって、 $AP:PQ:QD = \frac{21}{5}DQ:\frac{9}{5}DQ:DQ = 21:9:5$



〔例題 4〕 「右図で、AD:DB=2:1、BE:EC=3:2、CF:FA=2:1 のとき、 $\triangle ABC$ と $\triangle PRQ$ の面積の比を求めなさい。」
 $\triangle ABF$ に直線 CD が交わっているととして、

$\frac{FC}{CA} \cdot \frac{AD}{DB} \cdot \frac{BQ}{QF} = 1$ 、よって、 $\frac{2}{2+1} \times \frac{2}{1} \times \frac{BQ}{QF} = 1$ から、
 $BQ:QF=3:4$ 、したがって、 $\triangle CFB : \triangle CQB = BF:BQ=7:3$ 、

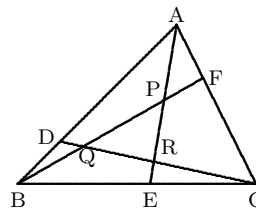
$\triangle CFB : \triangle ABC = CF:CA=2:3$

よって、 $\triangle ABC = S$ とおくと、 $\triangle CQB = \frac{3}{7}\triangle CFB = \frac{3}{7} \times \frac{2}{3} \times \triangle ABC = \frac{2}{7}S$

同様に $\triangle ARC = \frac{1}{3}S$ 、 $\triangle BPA = \frac{3}{11}S$

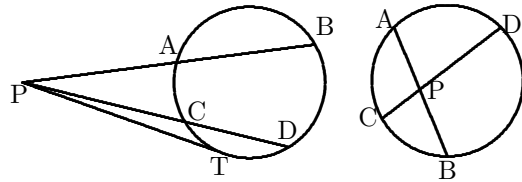
よって、 $\triangle PQR = \triangle ABC - \triangle CQB - \triangle ARC - \triangle BPA$

$= S - \frac{2}{7}S - \frac{1}{3}S - \frac{3}{11}S = \frac{25}{231}S$ 、よって $\triangle ABC : \triangle PQR = 231:25$



円の議論の多くは、「相似」が欠かせない。

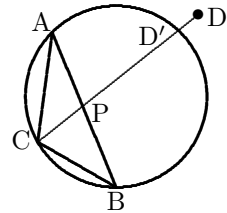
〔方巾(ほうべき)の定理
 $PA \cdot PB = PC \cdot PD = \dots (= PT^2)$
 点Pが円内にあるときは, $(= PT^2)$ はない。



AC, DB を引くと, $\triangle PAC$ と $\triangle PDB$ において, 円に内接する四角形の性質 (点Pが円の内部にあるときは円周角の定理) から $\angle PCA = \angle PBD$, $\angle P$ は共通 (点Pが円内のときは対頂角) だから, 2組の角がそれぞれ等しく, $\triangle PAC \sim \triangle PDB$. よって $PA:PD = PC:PB$. したがって, $PA \cdot PB = PC \cdot PD$. また, AT, BT を引くと, $\triangle PAT$ と $\triangle PTB$ において, 接弦定理より, $\angle PTA = \angle PBT$, $\angle P$ は共通だから $\triangle PAT \sim \triangle PTB$. よって $PA:PT = PT:PB$. したがって $PA \cdot PB = PT^2$.

「方巾の定理の逆の定理」も成り立つことはそれぞれの場合, 円がただ一つしかできないこと (同一法) から, 明らかである. また, この定理は, 「四角形が円に内接する条件」のもう一つの定理にもなっている.

確認のため, 右図のような場合の, 「方巾の定理の逆」の証明をしておこう.
 2つの線分 AB, CD の交点を P とし, $PC \cdot PD = PA \cdot PB$ を仮定する. $\triangle ABC$ の外接円と CP との交点を D' とすると, 方べきの定理より, $PC \cdot PD' = PA \cdot PB$. したがって, $PC \cdot PD = PC \cdot PD'$. よって, D は D' に一致し, 4点 A, B, C, D は一つの円 O の周上にある.



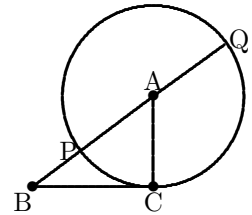
方巾の定理の応用として, 「三平方の定理」を証明しておこう.
 $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形 ABC に対して, 点 A を中心とする半径 AC の円を描く. BA と円 A の交点を点 P, BA の延長と円 A の交点を Q とする. 方巾の定理より

$$BC^2 = BP \times BQ$$

$$BC = a, AC = b, AB = c \text{ とすると, } a^2 = (c - b)(c + b)$$

$$\text{したがって, } a^2 + b^2 = c^2$$

また, 方巾の定理の逆の定理を使うと, 三平方の定理の逆の定理が証明できる. これは直接証明法であり, 意義あることである. 各自証明しておこう.

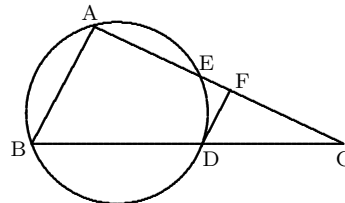


〔例題 5〕 「図において, $AB \parallel FD$, $BD = 6\text{cm}$, $AE = 3\text{cm}$, $EC = 5\text{cm}$ のとき, EF の長さを求めよ。」

$$CE \cdot CA = CD \cdot CB \text{ より } 5 \times 8 = CD \times (CD + 6).$$

$$\text{よって } CD = 4\text{cm}. CD:DB = CF:FA, CF = 8 - FA \text{ より}$$

$$FA = \frac{24}{5}\text{cm}, EF = FA - AE = \frac{9}{5}\text{cm}$$

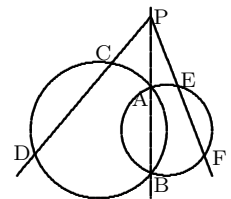


〔例題 6〕 「2つの円が2点 A, B で交わり, BA の延長上の点 P を通る2つの直線がそれぞれの円と交わる点を C, D および E, F とする. このとき, 4点は同一円周上にある. ただし, 4点は同一直線上にないものとする。」

$$\text{方巾の定理より } PC \times PD = PA \times PB, PE \times PF = PA \times PB$$

$$\text{よって } PC \times PD = PE \times PF$$

したがって, 方巾の定理の逆により, 4点 C, D, F, E は同一円周上にある.

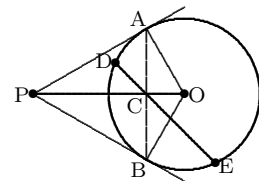


〔例題 7〕 「円 O の外部の点 P から, 接点を A, B とする2つの接線 PA, PB を引き, AB と PO の交点を C とし, C を通る円 O の弦を DE とする. そのとき, 4点 D, E, P, O は一つの円周上にあることを証明しなさい。」

$$\text{点 C は弦 AB, DE の交点より, } CA \cdot CB = CD \cdot CE$$

$$4 \text{ 点 O, A, P, B は一つの円周上にあるから, } CA \cdot CB = CP \cdot CO$$

$$\text{よって, } CD \cdot CE = CP \cdot CO \text{ したがって, 4点 D, E, P, O は一つの円周上にある.}$$

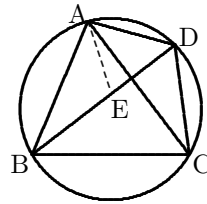


トレミーの定理

円に内接する四角形について、2組の対辺の長さの積の和は対角線の長さの積に等しい。

右図の円に内接する四角形 ABCD では

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$



対角線 BD 上に、 $\angle BAE = \angle CAD$ となる点 E をとる。 $\triangle ABE$ と $\triangle ACD$ において、 $\angle ABE = \angle ACD$ 、 $\angle BAE = \angle CAD$ で、2組の角がそれぞれ等しいから、 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ 。よって $AB:AC = BE:CD$ 、したがって、 $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ 。同様に $\triangle ABC \sim \triangle AED$ より、 $AD \cdot BC = AC \cdot ED$ 。これらを辺々加えあわせると、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot (BE + ED)$ 。よって、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$

このように、トレミーの定理は、点 E をとることに気がつけば(ここが難しい)、極めて簡単に証明できた。

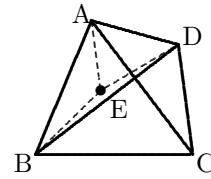
トレミーの定理の証明の仕方から、点 E を $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ となるようにとれば、仮定を用いて E は BD 上にあることが証明でき、これから結論 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ が得られる、と予想できる。

トレミーの定理の逆

四角形 ABCD において、

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$$

が成り立てば、A, B, C, D は同一円周上にある。



点 E を $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ となるようにとると、 $AB:AE = AC:AD$ 、また、 $\angle BAE = \angle CAD$ より、 $\angle BAC = \angle EAD$ 、したがって、 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ 。 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ より $AB:BE = AC:CD$ 、よって $AB \cdot CD = AC \cdot BE$ 。 $\triangle ABC \sim \triangle AED$ より $AC:BC = AD:ED$ 、よって $AD \cdot BC = AC \cdot ED$ 。故に、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + ED)$ 。仮定より $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC \cdot BD$ 、したがって、 $AC(BE + ED) = AC \cdot BD$ 、よって、 $BE + ED = BD$ 、これより、E は BD 上の点である。 $\angle BEA + \angle AED = 180^\circ$ 。ゆえに、 $\angle ABC + \angle ADC = 180^\circ$ 。したがって、点 A, B, C, D は同一円周上にある。

トレミーおよびその逆の定理の証明から、

四角形の対角線の積

四角形 ABCD において、

$$AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD \quad (\text{等号は四角形 ABCD が円に内接するときのみ})$$

が得られる。

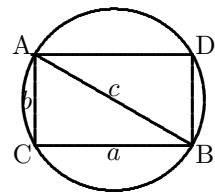
証明を繰り返しておく。上の証明で、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC = AC(BE + ED)$ までは全く同じである。一般に、 $BE + ED \geq BD$ だから、 $AB \cdot CD + AD \cdot BC \geq AC \cdot BD$ 等号は A, B, C, D が同一円周上にある時のみ。

トレミーの定理を長方形に適用すれば、直ちに「三平方の定理」が得られる。

右図で、長方形 ACBD は円に内接するとする。トレミーの定理より、

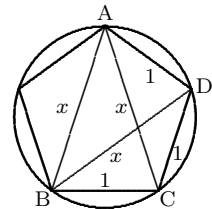
$$AC \times DB + AD \times CB = AB \times CD, \quad CB = AD = a, \quad AC = DB = b \text{ より、}$$

$$a^2 + b^2 = c^2$$



また、半径 1 の円に内接する正五角形に頂点よりなる四角形 ABCD にトレミーの定理を適用する。(「正多角形と円周率」で再度議論する。)

$AB = x$ とおくと、 $x + 1 = x^2$ 。これより直ちに $x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ が得られる。

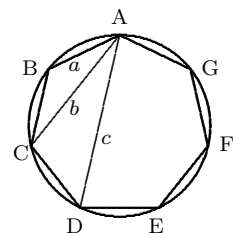


〔演習 1〕 正七角形 ABCDEFG の辺と対角線の長さを図のように

$AB = a$, $AC = b$, $AD = c$ とおくと、

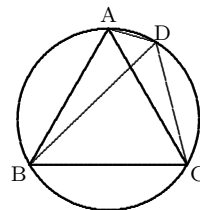
$$\frac{1}{a} = \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \text{ が成立することを証明せよ。}$$

四角形 ABCE にトレミーの定理を適用する。



〔演習 2〕円に内接する正三角形 ABC の頂点と弧 AC 上の点 D からなる四角形 ABCD にトレミーの定理を適用すると、 $AD+DC=BD$ の関係を証明せよ。

これは、トレミーの定理の証明で、 $\triangle ABE \sim \triangle ACD$ が $\triangle ABE \cong \triangle ACD$ となり、 $BE=DC$ 、 $\triangle AED$ が正三角形となることから明らかである。

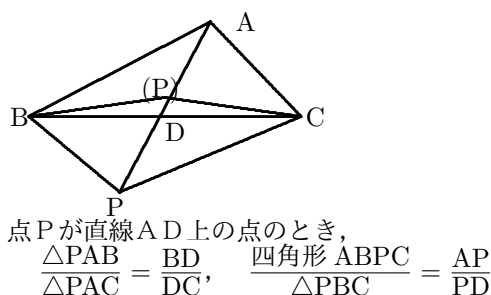
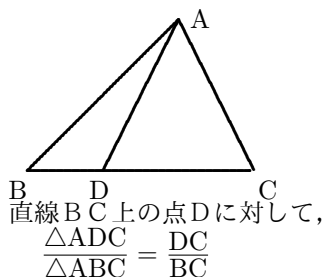


また、『中学数学発展』では、トレミーの定理を用いて、高校数学にとって極めて重要な「三角関数の加法定理」も導いている。

3.11 多角形の面積

以下は、等積移動以外の面積に関係したいくつかの重要な定理で、これらを適用する多くの問題がある。プリントで充分練習してもらいたい。

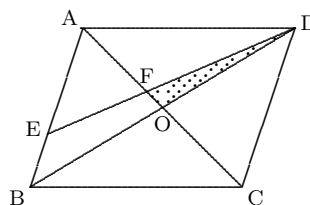
1 面積比と線分比



〔例題 1〕 「右図で、平行四辺形 ABCD の面積は 36cm^2 で、 $AE:EB=2:1$ のとき網目の部分の面積を求めよ。」

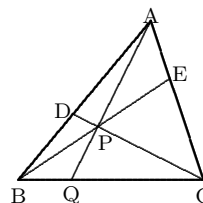
平行四辺形の ABCD の面積を $S = 36\text{cm}^2$ とする。また平行四辺形の対角線の交点を O、AC、DE の交点を F とする。

$AF:FC=AE:CD=2:3$ より、 $AF:FO:OC=4:1:5$
 $\triangle DFO = \triangle ADC \times \frac{1}{10} = S \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{10} = 1.8\text{cm}^2$



〔例題 2〕 「 $\triangle ABC$ の辺 AB および辺 AC 上に、 $AD:DB=CE:EA=3:2$ となる点 D、E をとる。2 直線 CD、BE の交点を P、直線 AP と辺 BC の交点を Q とする。

- (1) 面積の比 $\triangle APC:\triangle PBC$ をもとめよ。
 - (2) 面積の比 $\triangle APB:\triangle PBC$ をもとめよ。
 - (3) 面積の比 四角形 ABPC: $\triangle PBC$ をもとめよ。」
- (1) 3:2 (2) 2:3 (3) 13:6



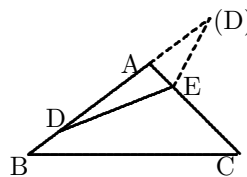
2 1 角が等しいか補角をなす

1 角が等しい (か補角をなす) $\triangle ABC$ 、 $\triangle ADE$ について、

$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC} = \frac{AD \times AE}{AB \times AC}$$

BE を引くと、
$$\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC} = \frac{\triangle ADE}{\triangle ABE} \cdot \frac{\triangle ABE}{\triangle ABC} = \frac{AD \cdot AE}{AB \cdot AC}$$

特に、 $DE \parallel BC$ のとき、 $\triangle ADE \sim \triangle ABC$ で、 $\frac{\triangle ADE}{\triangle ABC} = \frac{AD^2}{AB^2}$ となるが、上の公式はこれの拡張になっている。

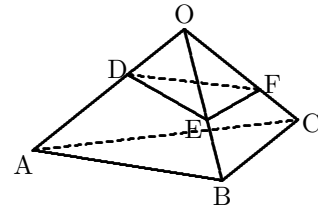


これは、そのまま空間図形に拡張できる。

$$\left[\begin{array}{l} \text{頂点を共有する三角錐} \\ \frac{\text{三角錐 O-DEF の体積}}{\text{三角錐 O-ABC の体積}} = \frac{OD \times OE \times OF}{OA \times OB \times OC} \end{array} \right.$$

B, E から面 OAC への垂線の長さを h, h' とすると $\frac{h'}{h} = \frac{OE}{OB}$ 。

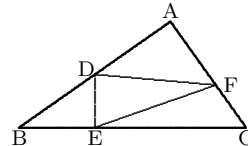
$$\frac{\text{三角錐 O-DEF の体積}}{\text{三角錐 O-ABC の体積}} = \frac{\frac{1}{3} \triangle ODF \times h'}{\frac{1}{3} \triangle OAC \times h} = \frac{OD \times OE \times OF}{OA \times OB \times OC}$$



〔例題 1〕 「図において、AD:DB=1:1, BE:EC=1:2, CF:FA=2:3 である。このとき、 $\triangle DEF$ と $\triangle ABC$ の面積比を求めよ」

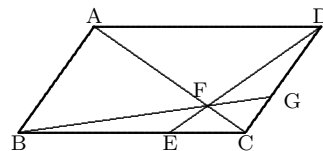
$\triangle ABC = S$ とおく。

$$\begin{aligned} \triangle DEF &= \triangle ABC - \triangle BDE - \triangle CEF - \triangle AFD \\ &= S - \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} S - \frac{2}{3} \times \frac{2}{5} S - \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} S = \frac{4}{15} S \\ \triangle DEF : \triangle ABC &= 4 : 15 \end{aligned}$$



〔例題 2〕 「図において、四角形 ABCD は平行四辺形で、BE:EC=2:1 である。このとき、 $\triangle FBE$ と四角形 AFGD の面積比を求めよ」

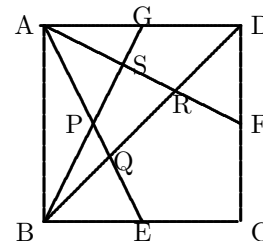
$$\begin{aligned} \text{四角形 ABCD} &= S \text{ とおく。} EC:AD=1:3 \text{ を用いると} \\ \triangle FBE &= \frac{2}{3} \triangle FBC = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} \times \triangle ABC = \frac{1}{12} S \\ \triangle CGF &= \frac{CF}{CA} \times \frac{CG}{CD} \times \triangle CAD = \frac{1}{4} \times \frac{1}{3} \times \triangle CAD = \frac{1}{24} S \\ \text{四角形 AFGD} &= \triangle CDA - \triangle CGF = \frac{11}{24} S \\ \text{よって、} \triangle FBE : \text{四角形 AFGD} &= 2 : 11 \end{aligned}$$



(BD//EG から、 $\triangle FBE = \triangle FDG$ を用いるともっと簡単)

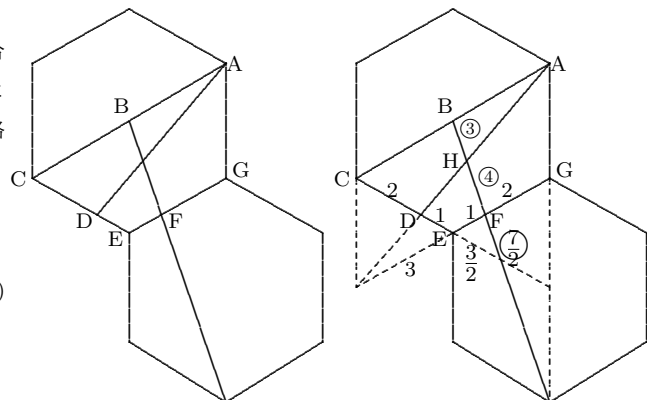
〔例題 3〕 「正方形 ABCD の、辺 BC, CD, DA の中点をそれぞれ E, F, G とするとき、図の四角形 PQRS の面積は正方形の面積の何倍か。」

$$\begin{aligned} \text{正方形の面積を } S \text{ とする。} \\ \text{四角形 PQRS} &= \triangle BSR - \triangle BPQ = \left(\frac{BS \times BR}{BG \times BD} - \frac{BP \times BQ}{BG \times BD} \right) \triangle BGD \\ &= \left(\frac{BS \times BR}{BG \times BD} - \frac{BP \times BQ}{BG \times BD} \right) \times \frac{1}{4} S \\ \text{補助線 PF を描くと } AG // PF \text{ より } GS:PS &= AG:FP = 2:3 \\ \text{よって } BP:PS:SG &= 5:3:2 \\ \text{また、} BQ:QR:RD &= 1:1:1 \text{ となるから、四角形 PQRS} = \frac{11}{120} S \end{aligned}$$



〔例題 4〕 図は面積の等しい正六角形を 2 つ組み合わせたもので、 $AB=BC, CD:DE=2:1$ です。このとき、つぎの比を最も簡単な比で表しなさい。(17 年度洛南付属中学)

- (1) EF:FG
 - (2) BH:HF
 - (3) (三角形 ABH の面積):(四角形 DEFH の面積)
- (1) 1:2 (2) 3:4 (3) 1:1



ヒントと参考

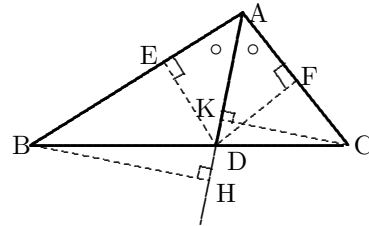
かなり難しい。しかし、解き方を覚えるだけなら、小学生でもできる。

小学生でこれができることと、数学を理解していることとは結び付かない。

$$\triangle ABE = S \text{ とおく。} \quad \triangle ABH = S \times \frac{3}{7}, \quad \text{四角形 DEFH} = S \times 4 \times \frac{1}{2} \times \frac{9}{6} \times \left\{ \frac{5}{9} \frac{15}{21} - \frac{3}{9} \frac{7}{21} \right\} = S \times \frac{3}{7}$$

3 角の2等分線

〔 三角形の頂角の二等分線
 $\angle A$ の2等分線と辺 BC の交点を D とすると
 $\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$
 〕 逆も成り立つ。



これを、「パプスの定理」と呼ぶ人もあるが、混乱するから、避けた方がよい。

証明は面積比 $\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC}$ を2つの方法で表せばよい。一つは BD, DC を底辺として三角形の面積を表す。他は点 D から AB, AC に垂線 DE, DF を引き、点 D が $\angle A$ の二等分線上の点だから垂線の足の長さが等しい、として $DE=DF$ 。したがって

$$\frac{\triangle ABD}{\triangle ADC} = \frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

もう一つの方法は点 B, C から AD またはその延長上に垂線を引き垂線の長さを BH, CK とすれば、 $\triangle BHD \sim \triangle CKD$ より $\frac{BH}{CK} = \frac{BD}{DC}$ となることを用いればよい。

上の定理は、通常、相似の応用として、次のような証明が行われる。

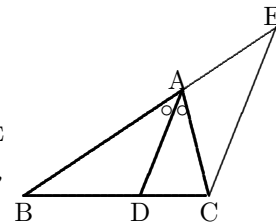
点 C を通って AD に平行な直線と BA の延長との交点を E とする。

AD//EC より、 $\angle BAD = \angle AEC$, $\angle DAC = \angle ACE$, また、

仮定より $\angle BAD = \angle DAC$ 。したがって、 $\angle ACE = \angle AEC$ 。よって三角形 ACE

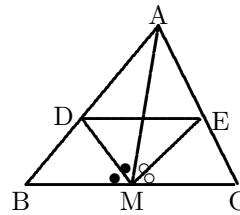
は二等辺三角形となり、 $AC=AE$ 。AD//EC より、 $BA:AE=BD:DC$ 。よって、

$BA:AC=BD:DC$ 。



〔例題〕 「 $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とし、 $\angle AMB$, $\angle AMC$ の2等分線が辺 AB, AC と交わる点をそれぞれ D, E とすると、 $DE//BC$ であることを証明せよ。」

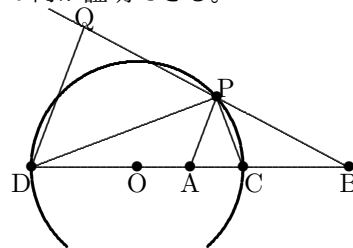
$\frac{AD}{DB} = \frac{AM}{MB}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{AM}{MC}$, また、 $BM=MC$, これより
 $\frac{AD}{DB} = \frac{AE}{EC}$, したがって、 $DE//BC$ 。



4 アポロニウスの円

三角形の頂角の二等分線の定理を用いると、アポロニウスの円が証明できる。

〔 アポロニウスの円
 2点からの距離の比が一定な点の集まりは円である。〕



A, B からの距離の比が $m : n$ ($m < n$) の点を P, 線分 AB を $m : n$ に内分する点を C, 外分する点を D とする。
 $PA:PB=CA:CB=m : n$ より、 $\angle APC = \angle BPC \dots \textcircled{1}$ 。点 D を通って、AP に平行な直線と BP との交点を Q とする。

$$AD:DB = m : n \text{ だから, } PQ = PB \times \frac{m}{n-m} = AP \times \frac{n}{m} \times \frac{m}{n-m} = AP \times \frac{n}{n-m}$$

一方、 $DQ = AP \times \frac{n}{n-m}$ となり、 $QD = QP$ 。したがって、 $\angle QDP = \angle QPD$ 。

ところが AP//DQ より $\angle QDP = \angle APQ$ 。よって、 $\angle QPD = \angle APD \dots \textcircled{2}$ 。①, ②より、 $\angle DPC$ は 90° となり、点 P は DC を直径とする円周上にある。この円をアポロニウスの円という。

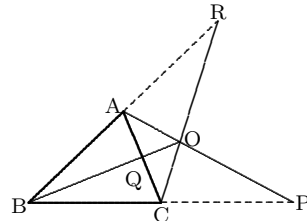
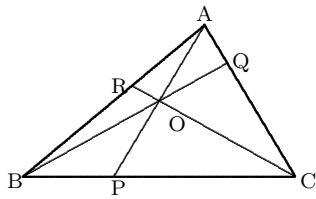
5 チェバの定理

チェバの定理

点 O と $\triangle ABC$ の頂点 A, B, C を結ぶ 3 つの直線が対辺と交わる点を P, Q, R とすると,

$$\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1 \text{ が成り立つ。}$$

また、逆 (この式が成り立てば、AP, BQ, CR は一点 O で交わる) も成り立つ。



$$\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO} \cdot \frac{\triangle BCO}{\triangle BAO} \cdot \frac{\triangle CAO}{\triangle CBO} = 1 \quad \text{したがって、} \quad \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

逆に、 $\frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$ が成り立てば、AP, BQ の交点を O とし、CO と直線 AB との交点を R' とすると、 $\frac{AR}{RB} = \frac{AR'}{R'B}$ となり、R' は R と一致する。

上の右図のような、点 O が $\triangle ABC$ の外にある場合の証明は、

全く同様に
$$\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO} \cdot \frac{\triangle BCO}{\triangle BAO} \cdot \frac{\triangle CAO}{\triangle CBO} = 1$$

から始める。点 C を通り AP に平行な直線が AB と交わる点を T とすると、CT // PA,

したがって、 $\triangle ACO = \triangle ATO$, $\frac{BP}{PC} = \frac{BA}{AT}$, よって $\frac{\triangle ABO}{\triangle ACO} = \frac{\triangle ABO}{\triangle ATO} = \frac{BA}{AT} = \frac{BP}{PC}$,

同様に、 $\frac{\triangle CAO}{\triangle CBO} = \frac{AR}{RB}$ を用いる。

重要なことは、チェバの定理は、メネラウスの定理によって証明できる ことである。

$\triangle ABP$ に直線 CR が交わったとみると、
$$\frac{BC}{CP} \cdot \frac{PO}{OA} \cdot \frac{AR}{RB} = 1$$

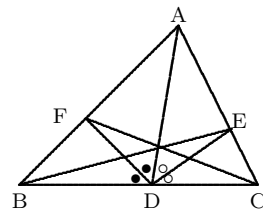
$\triangle APC$ に直線 BQ が交わったとみると、
$$\frac{AO}{OP} \cdot \frac{PB}{BC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

辺々掛け合わせると、
$$\frac{AR}{RB} \cdot \frac{BP}{PC} \cdot \frac{CQ}{QA} = 1$$

チェバの定理は面積の比の考えで証明した。メネラウスの定理は相似の応用であるが、相似の基礎は、もともと面積の考え (三角形の等積移動) で導かれた。チェバの定理がメネラウスの定理で証明できるのは、何も不思議なことではない。

【例題 1】 「 $\triangle ABC$ の辺 BC 上に点 D をとり、 $\angle ADB$, $\angle ADC$ の 2 等分線が辺 AB, AC と交わる点をそれぞれ F, E とする。このとき、3 直線 AD, BE, CF は 1 点で交わることを証明せよ。」

角の 2 等分線の定理より、 $\frac{AF}{FB} = \frac{AD}{BD}$, $\frac{AE}{EC} = \frac{AD}{DC}$, したがって
$$\frac{AF}{FB} \times \frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} = 1$$
 となり、AD, BE, CF は 1 点で交わる。

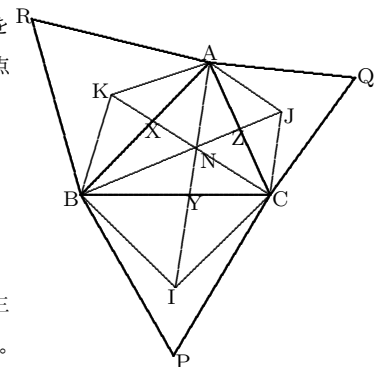


【例題 2】 $\triangle ABC$ の外側に三つの正三角形 $\triangle BCP$, $\triangle CAQ$, $\triangle ABR$ を描き、その三つの正三角形の重心を I, J, K とすると、AI, BJ, CK は一点で交わることを証明せよ。(これをナポレオン点という。)

$AK = \frac{1}{\sqrt{3}} AB$, $AC = \sqrt{3} AJ$, $\angle KAC = \angle BAJ$ より、 $\triangle KAC = \triangle BAJ$, 同様に、 $\triangle IBA = \triangle CBK$, $\triangle JCB = \triangle ACI$.

$$\frac{AX}{XB} \cdot \frac{BY}{YC} \cdot \frac{CZ}{ZA} = \frac{\triangle AKC}{\triangle BKC} \cdot \frac{\triangle BIA}{\triangle CIA} \cdot \frac{\triangle CBJ}{\triangle ABJ} = \dots = 1$$
 したがって、CX, BZ, AY は 1 点で交わる。

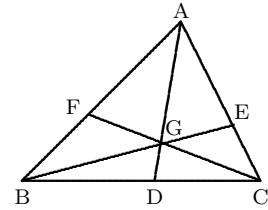
AP, BQ, CR は一点で交わり (フェルマー点), $AP = BQ = CR$, $\triangle IJK$ は正三角形 (ナポレオンの三角形) である、などは塾の演習プリントで学習して下さい。



チェバの定理はメネラウスの定理と組み合わせてよく用いられる。

〔例題 3〕 「図において、 $AF:FB=3:2$ 、 $AG:GD=5:2$ のとき、 $AE:EC$ を求めよ。」

$\triangle ABD$ に直線 FC が交わったと見て、メネラウスの定理より、
 $\frac{BC}{CD} \times \frac{DG}{GA} \times \frac{AF}{FB} = 1$ 、これより、 $\frac{BC}{CD} = \frac{5}{3}$ 、したがって $BD:DC=2:3$
 $\triangle ABC$ にチェバの定理を適用して、 $\frac{BD}{DC} \times \frac{CE}{EA} \times \frac{AF}{FB} = 1$
 これより、 $\frac{CE}{EA} = 1$ 、したがって $AE:EC=1:1$

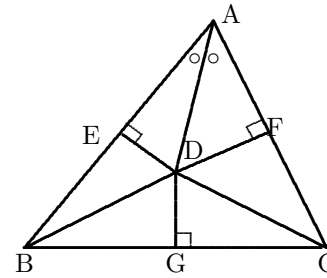


相似の応用には少し「慣れ」が必要です。塾には「相似」に強くなるための体系的なプリントが用意されています。いずれも何処にでも載っている有名な問題ばかりですが、それらによって、テクニック「比 ⇔ 平行線」を修得してください。

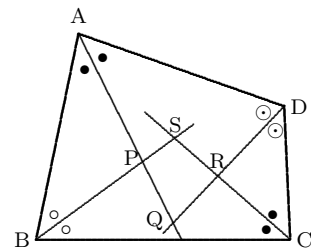
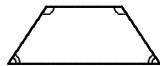
3.12 図形のテクニック

空間図形を含む図形の問題が、高校入試での合否を決定することが多い。しかし、学習の本道は、「図形」の科学の構成がどのようになっているのかであって、「指導要領」の枠内で与えられた課題を短時間に正解することではない。このメモは入試対策の問題集ではなく、小賢しいテクニックはあまり書かないが、以上の基礎の学習だけでは図形の問題に的確に対応する技法は分かりにくいと考えられ、その手法に重点をおいて、ごく一部の問題について解説を試みる。

- 1 「すべての三角形は、二等辺三角形である」と以下のように証明した。誤りを指摘せよ。
 $\triangle ABC$ の内角 A の二等分線と、辺 BC の垂直二等分線との交点を図のように D とする。
 D から辺 AB へ下ろした垂線の足を E 、辺 AC へ下ろした垂線の足を F とすれば、 D は $\angle A$ の二等分線上の点であるから、 $\triangle ADE \equiv \triangle ADF$ 。よって $AE=AF$ 、しかも $DE=DF$ 。また、 D は辺 BC の垂直二等分線上の点であるから、 $DB=DC$ 。よって、 $\triangle DEB \equiv \triangle DFC$ 。したがって、 $BE=CF$ 。したがって、 $AE=AF$ 、 $BE=CF$ 、から $AB=AC$ 。すなわちすべての三角形は二等辺三角形である。(これは有名なパズルである)
 解説は要らないだろう。何度も繰り返すが、中学で学習する図形の学問「ユークリッド幾何学」は「作図」を基礎に成り立っている。図形の学習は、正確な作図から始まることを再確認しておこう。



「四角形 $ABCD$ で $\angle A = \angle C$ のとき、4つの内角の二等分線がおのおの交わってつくる四角形 $PQRS$ は等脚台形であることを証明せよ。また、四角形が平行四辺形であるとき、四角形はどんな四角形か。」(大谷高改 09)
 等脚台形とは、下図のように台形で上底、下底の両端の角がそれぞれ等しい四角形である。



意図的に図は題意からずらして描かれている。作図し直してみよう。

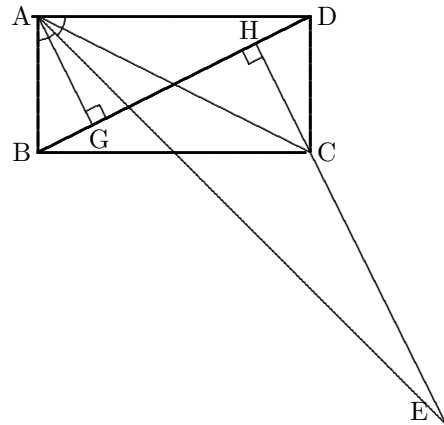
証明は簡単だ。また後半の四角形 $ABCD$ が平行四辺形の時は、 $\angle B = \angle D$ で $PQ \parallel SR$ となり、4つの角が全て等しく、長方形。

- 2 長方形 $ABCD$ (ただし $AB < AD$ とする) の頂点 A, C から対角線 BD に垂線を引き、その交点をそれぞれ、 G, H とする。また、 $\angle BAD$ の二等分線と直線 HC の交点を E とする。
 (1) $\triangle ABG$ と $\triangle ACD$ は相似であることを証明せよ。
 (2) $\triangle CAE$ は二等辺三角形であることを証明せよ。(大阪教育大附高平野)

さて、この問題には、図が描かれていない。まず文章に忠実に図を描かねばならない。その注意点を述べる。図は的確に描くことが大切である。それは、図形の問題は将に図の中に解答があるからだ。条件に新たな情報を付加しない、できるだけ一般的な図を描くことが必要である。必ずしも等し

くない辺が等しく見えるような図ではいけない。逆に等しい辺は如何にも等しいことを際立たせる図を描く。そのためには、「極端な」図を描けばよい。

上の問題であれば、 $AB < AD$ を満たす十分細長い長方形がそれにあたる。多くの場合、与えられた長さなどは、正確である必要はない。問題の構造を強調するように描けていればよい。図自身によって、図の構造をつかむことを心がける。ただし、人には「錯覚」が付き物だ。右の図では、どうしても $CA < CE$ に見えてしまう。定規、コンパス、分度器などで確認してもよい。与えられた図では、意識的に等しい量が等しくないように描かれている場合もある。つぎに、問題に記されている条件を図の中に鉛筆でわかりやすく書き込む。各頂点や円の中心などと、等しければ、等しいなどの記号などである。



別の条件に対しては違った記号でわかりやすくする。特に、比などはどれとどれの比であるかが明確に区別できるよう書いておく。これには、平常の授業の中で用いている記号法を使えばよい。数学では、鉛筆ならば、HBを、シャープペンシルならば、Bを用いることを薦めているが、図に書き込む記号はより濃い目のものを用いるなどして、書き換えが容易なものをつかう。小問ごとに書き込みを変更することが必要になることがあるからだ。また、結論に相当する記号は授業の中では赤鉛筆を用いているが、試験時においても、それがよい。仮定と結論の峻別を明確に自分に訴えるためだ。

以上は一般的な注意であるが、それはあくまで手法であり、問題（の特性）によって柔軟に対応しなければならない。

(1) について 再度証明すべき結論を明確にしておく。2つの三角形 $\triangle ABG$ と $\triangle ACD$ の相似を証明せよ、というのだから、基礎学習で学んだ、「三角形の相似条件」を思い出す。 $\angle AGB = \angle ADC = 90^\circ$ であることは明らかだから、相似条件の(2)か(3)であるはずだ。もう一組の角が等しいことは、四角形が長方形であることを用いるとどんな方法でも $\angle ABG = \angle ACD$ を導くことができる。したがって、相似条件の(3)で $\triangle ABG \sim \triangle ACD$ となる。

(2) について、再度証明すべき結論を明確にしておく。二等辺三角形であることを証明するのだから、「二等辺三角形になる条件」の定理を思い出す。図より明らかに $CA = CE$ を証明するのだから、 $\angle CAE = \angle CEA$ を証明すればよいことになる。

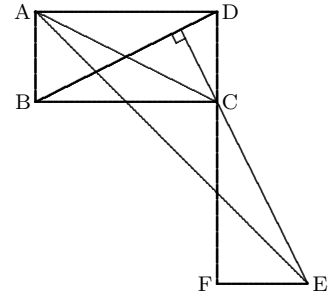
さて、ここで証明問題について、2つの重要な手がかりを述べる。一つは、この問題のように、大問がいくつかの小問からなっている場合、前の小問は多くの場合後の小問の手がかりを与える場合が多い、ということである。後の小問にとって、前の小問の結論を用いたり、前の小問を一般化したり、前の小問の考え方を使ったり、などその関連性は多種多様だが、広い意味で前の小問がヒントになる場合が多い。これを活用しようとする意識が必要である。ただし、必ず関連性がある、と決めつけてしまうこともできない。

もう一つの重要な手がかりは、「数学的に確立された問題」では、全ての与えられた条件を使わなくては証明できない、ということである。どれかの条件を忘れていたり、使わなかったりして証明されたら、それはどこかに誤りがあるはずである。したがって、証明を考えると、まだ、使っていない条件があれば、その利用法はないものか、と発想すればよい。ただし、こうした手がかりも、「数学的に確立した問題」という範囲での議論である。入試問題の中には余分な条件を付け加えてある問題もあるから、全ての条件を使わねばならない、と決めつけてしまってはならない。

(2) にもどって、それでは、 $\angle CAE = \angle CEA$ はどうすれば、証明できるか、上の基礎的な技術が身に付いていれば、極めて簡単な問題であることがわかる。 $AG \parallel CH$ より、 $\angle CEA = \angle GAE$ 。また(1)より $\angle BAG = \angle CAD$ で、 $\angle BAG + \angle GAE = \angle CAD + \angle CAE = 45^\circ$ だから、 $\angle GAE = \angle CAE$ 。したがって $\angle CAE = \angle CEA$ となり、 $\triangle CAE$ は二等辺三角形である。

後の議論のためにも、次の問題を検討する。

〔問題〕 右図のような長方形 ABCD がある。∠A の二等分線と、C を通り対角線 BD に垂直な直線との交点を E、E から DC の延長に下ろした垂線の足を F とする。C と A を結ぶ。



(1) 次の空欄に適切な文字または数字を記入せよ。

$$\angle CAE = \angle \text{ア} - \angle \text{イ}^\circ$$

$$\angle CEA = \angle \text{ウ} - \angle \text{イ}^\circ$$

$$\angle \text{ア} = \angle \text{エ} = \angle \text{ウ}$$

$$\text{従って } \angle CAE = \angle CEA$$

$$\text{故に 線分 } \text{オ} = \text{カ}$$

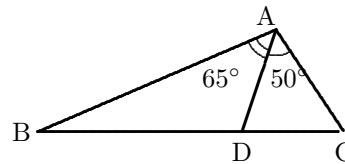
$$\text{このことを用いると } \triangle ABC \cong \triangle \text{キ}$$

(2) AB=3cm, BC=5cm とするとき、AE の長さを求めよ。(開成高)

((1) ア.CAB イ.45 ウ.CEF エ.BDC オ.CA カ.CE キ.EFC (2) $8\sqrt{2}$)

この開成高校の問題は随分昔に出題されたものである。ほとんどの図形の入試問題はこうした傾向がある。君はこのことから何を学ぶか。数年前、有名な日本の作曲家同士の間で、著作権争いがあった。音楽に疎くことの本質は筆者にはわからないが、そのときある専門家は、音楽の世界でも、小節というか短いメロディーの部分はほぼ出尽くして、細かく見れば、過去の作品の一部と似たところがあるのはやむを得ない、といわれていた。

3 図の $\triangle ABC$ について、 $\angle BAD=65^\circ$ 、 $\angle DAC=50^\circ$ 、 $AD=8$ 、 $AC=10$ であるとき、 $BD : DC$ を求めよ。(白陵高)



実は、図は元の問題を少し変形しておいた。一般に与えられた問題の図は必ずしも正確な図を描かない場合が多いからだ。こんな場合は、あらためて自分で正確な図を書いてみることも良いだろう。分度器は大いに使って良いのだ。

正解を得るためだけにヒントは要らないだろう。しかし、この平易な問題を通して、2つのテクニックを身につけてもらいたい。

その一つは、条件に 65° 、 50° 、 $AD=8$ 、 $AC=10$ などの特定の数値が入っている、ということである。この場合は 65° 、 50° がキーである。図形（ユークリッド幾何学）はギリシャ時代から綿々と継承された図形の一分野であり、入試にも見方によっては世界中で出し尽くされている。少しオリジナリティーを出そうとすれば、特殊な角度、特殊な長さの割合、特殊な三角形、特殊な平行四辺形、等々図形が特殊性を含んだ問題とならざるを得ない。一般的なものを列挙すると、

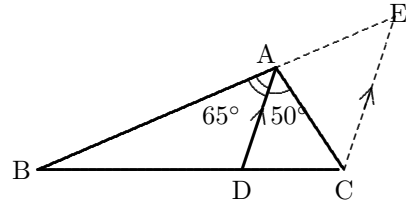
- 30° 、 45° 、 60° 、 90° 、etc ○ 中線、角の2等分線、垂線、平行線
- 三角定規、二等辺三角形、直角三角形、台形、平行四辺形、ひし形、長方形、正多角形、正多面体
- 円にかかわる諸性質 ○ $3:4:5$ 、 $5:12:13$ 、 $1:2:\sqrt{3}$ 、 $1:1:\sqrt{2}$

などである。こうした、特殊性のある図形では、「確定した数学的な問題」の場合、もちろんその特殊性を活かさなければ問題は解けない。特殊性はしかし、一般的なものばかりではない。今の問題では、 $AD=8$ 、 $AC=10$ は特殊ではあっても 8, 10 という数に意味はない。したがって、これは解を求めるヒントにはならない。一方 65° 、 50° は特別な組み合わせになっている。その特殊性を用いなければ解けない。

もう一つのテクニックは、解を得るために、元の図には描かれていない線を補助的に追加する、すなわち「補助線」を書かねばならない場合が多い、ということである。複雑な問題では補助線の的確な導入が正解を得られるかどうかの分かれ目になる、といっても過言ではない。補助線は直線ばかりでなく、円の場合もある。それでは、的確な補助線の導入法はあるのか、といえよそんなものはない。それでは解説の意味がないではないか、と思われるかも知れないが、どんな場合に補助線が必要になる場合が多いかはわかる。長さ、角度、面積などの移動のときである。合同のときの「移動」ではなく、単に移す、という意味である。この角とこの角が等しいはずだが、このままではそれが証明できない、どこかに線を引いて、新しい図形要素を間に挟んで、段階的に角度を移すなどが考えられる。基礎定理を正確に理解しておけば、この移動にどの補助線がほしいな、ということは自ずと見

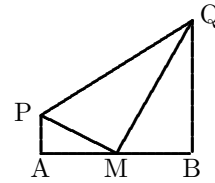
えてくる。そのために、基礎定理はこれが全てだ、というところまで徹底して理解し、身につけておくが必要になる。あいまいな理解では暗闇の中を突き進む洞察力は期待できない。

問題に戻ろう。図を見て、 $65^\circ + 50^\circ + 65^\circ = 180^\circ$ という特殊性に気が付かないならば、君は諦めてほしい（勿論苦しむことはあるだろうが、それを和らげるために、上のテクニックを書いたのである。一つのテクニックだけで、これを思いつくのではなく、補助線をいろいろ書く中で気が付くことの方が多し。将棋などと同じで、無数にしまっているタンスの中の知的なストックを短時間にチェックし、どれが最適かを判断（計算）する日頃の訓練が必要である）。したがって、BA を A の方に延長することを考える。どこまで延長するかは、手垢の付いた問題で十分訓練されているだろう。点 C を通り、DA に平行な直線と BA の延長との交点を E とすればよい。 $\triangle CAE$ は二等辺三角形となり、 $CE=10$ である。したがって、 $BD:BC=8:10=4:5$ ，したがって、 $BD:DC=4:1$ となる。仕組みがわかれば、これほど易しい問題はない。なお、問題集には、別の補助線を用いて、これを解いている。解き方、は一つではないのだ。



【例題】図において、 $AM=MB$ ， $\angle PAM=\angle QBM=\angle PMQ=90^\circ$ である。

- (1) $\angle APM=\angle QPM$ であることを示しなさい。
- (2) $PQ=PA+QB$ であることを示しなさい。



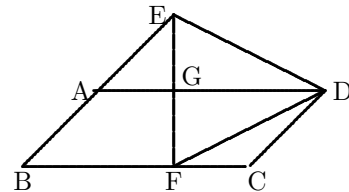
この問題がわかりにくいのは、自分で補助線を引かねばならないことだけである。

- (1) のように、PM は $\angle APQ$ の二等分線であることを証明したり、逆に角の二等分線を仮定したときは、「二等分線は延長せよ」という“定石”をつかえばよい。

PM と QB の交点を点 R とする。直ちに $\triangle PMA \equiv \triangle RMB$ が証明でき、 $\angle APM = \angle BRM$ ， $PM=RM$ 。つづいて、 $\triangle QPM \equiv \triangle QRM$ が証明でき、 $\angle QPM = \angle QRM$ 。したがって、 $\angle APM = \angle QPM$

- (2) (1) より、 $PA+QB=RB+QB=QR=QP$

- 4 右の図で四角形 ABCD は平行四辺形である。辺 BA の延長線上に、 $BA=AE$ となる点 E をとり、E から BC に垂線 EF をひき、AD との交点を G とする。このとき、 $DE=DF$ であることを証明せよ。(滋賀女子高改)



きっちり学習している諸君には、解説を示すまでもないだろうが、図形のテクニックの習得のために以下を読んでほしい。

この問題では $DE=DF$ ，すなわち長さが等しいことを証明せよ，という問題である。問題のレベルによっては、直ちに証明が思い当たるだろうが、常にそうだ、とはいかない。そこで次のような戦略を考えてみる。

いったい長さに関係した既得の知識はどんなものだっただろうか。もっと煮詰めて、長さに関係した定理の全ては何だっただろうか、その中に当該の（いま、関係する）定理はどれか、それが見つければ解は見えてくる。そのためには事前に学習を通じて、図形の計量についての定理を整理しておく必要がある。暫定的ではあるが、次のようなものが考えられる。

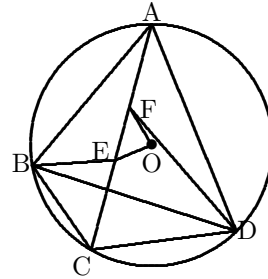
- 長さ・三平方，二等辺三角形，合同，相似，接線の長さ，平行四辺形の対辺，長方形の対角線，平行線間の距離
- 角，角の移動・平行線，二等辺三角形，弧・中心角・円周角，接弦定理，円に内接する四角形
- 面積，体積の公式

問題に戻って、 $DE=DF$ だから、 $\triangle DEF$ が二等辺三角形であることを言えばよい。ところが、通常の二等辺三角形の成立条件（2つの角が等しい）はこの場合つかいづらい。（条件の定理とは、その条件が成立さえしていれば、結果が言える、ということをも主張するものである。従って、別の条件でも、同じ結果が言えることもあることを忘れてはいけない。高校ではこのことをはっきりさせるため「十分条件」という表現をする）。二等辺三角形の性質の定理の一つ、「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する」を思い出すと $EG=FG$ ， $EF \perp DG$ が言えたら $DE=DF$ が言えそうだ、

結局、 $\triangle DEG \cong \triangle DFG$ が言えればよい、となる。

点AはBEの中点で、 $AD \parallel BC$ だから交点GはEFの中点となり、 $EG=FG \dots \textcircled{1}$ 、 $\angle BFE=90^\circ$ で $AD \parallel BC$ だから $\angle DGE=\angle DGF=90^\circ \dots \textcircled{2}$ 。 $\triangle DEG$ と $\triangle DFG$ において、DGは共通であるから、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ と合わせて、 $\triangle DEG \cong \triangle DFG$ 、よって $DE=DF$ 。

- 5 中心がOの円に、四角形ABCDが内接している。対角線AC上に2点E、Fを、それぞれ $\angle ABE = \angle DAC$ 、 $\angle ADF = \angle BAC$ を満たすようにとるとき、つぎの(1)、(2)、(3)が成り立つことを証明せよ。



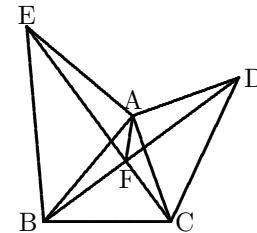
- (1) $AE:CD=AB:BD$
 (2) $\triangle CDF \sim \triangle BDA$
 (3) $OE=OF$ (灘高)

(1)について、 $AE:CD=AB:BD$ を証明するのだから、それが関係する相似な三角形をさがす。したがって $\triangle ABE$ 、 $\triangle DBC$ の相似を言えばよいことがわかる。これは、 $\angle BAE=\angle BDC$ 、 $\angle ABE=\angle DAC=\angle DBC$ より $\triangle ABE \sim \triangle DBC$ 。

(2)について、 $\triangle CDF$ と $\triangle BDA$ で $\angle ABD=\angle FCD$ 、まだ使っていない条件 $\angle ADF=\angle BAC$ と $\angle BAC=\angle BDC$ から $\angle CDF=\angle BDA$ 。したがって $\triangle CDF \sim \triangle BDA$

(3)について、長さが等しいことを証明する方法は、三角形の合同、二等辺三角形、平行四辺形、長方形の対角線などその他いくらかあったが、比を用いて長さが等しいことを証明する珍しい問題だからこれを採り上げたのである。OE=OFだから二等辺三角形を思いつくが、直ぐには証明できそうにない。従って、別の原理、先立つ小問(1),(2)との関連を考える。(2)の相似から(1)と同様の関係 $CF:CD=BA:BD$ がえられるから、(1)と合わせ、 $AE=CF$ が得られる。したがって、AE,CFとOE,OFが関わる合同な三角形、 $\triangle AEO$ と $\triangle CFO$ が浮かびあがる。もはやこれが合同なことは簡単に証明できる。よって $OE=OF$ となる。

- 6 右の図は鋭角三角形ABCの外側に直角二等辺三角形ABE、ACDを描いたもので、 $\angle BAE=\angle CAD=90^\circ$ である。BDとCEの交点をFとする。



- (1) $BD \perp CE$ であることを証明せよ。
 (2) AFは $\angle EFD$ を2等分することを証明せよ。(甲陽学院高)

直角二等辺三角形が2つも出てくる「特殊性」を使った問題だ。

(1)について、手垢の付いた問題で、ヒントも要らないだろう。しかし、合同な三角形、 $\triangle ABD$ は $\triangle AEC$ を点Aの周りに 90° 回転した図形であることを確認しておこう。したがって、直ちに $BD \perp CE$ といえる。これを見抜けなければ、たとえばABとEFの交点をGとして

$$\angle EFD = \angle GBF + \angle BGF = \angle AEG + \angle AGE = 90^\circ \text{と面倒だ。}$$

(2)について、角の2等分といってもこの問題の「特殊性」から、 $\angle AFE (= \angle DFA)$ が 45° を示せばよいことに気づく。そのために(1)との関係を考えて直ちに4点A,E,B,Fは同一円周上にあることに気がつく。よって $\angle AFE = \angle ABE = 45^\circ$ となる。

第4章 三平方の定理と平方根

4.1 三平方の定理

直角をはさむ2辺の長さを a, b , 斜辺の長さを c とする直角三角形 $\triangle ABC$ を考える。図のように、各辺を1辺とする正方形を三角形の外側に描く。このとき、直角をはさむ2つの正方形の面積の和は、斜辺を1辺とする正方形の面積に等しいことを証明する。

図において、 $\triangle ABE \cong \triangle AHC$ である。したがって、

$$\begin{aligned} \text{四角形 ACDE} &= 2 \times \triangle AEC = 2 \times \triangle ACH \\ &= 2 \times \triangle AJH = \text{四角形 AJKH} \end{aligned}$$

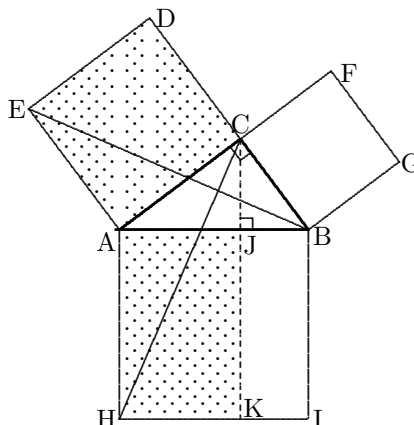
同様に、四角形 BCFG = 四角形 BJKI

これらを加え合わせると

$$\text{四角形 ACDE} + \text{四角形 BCFG} = \text{四角形 ABIH}$$

よって $a^2 + b^2 = c^2$

となる。すなわち、直角を挟む辺の2乗の和は斜辺の2乗に等しい。これは「三平方の定理」あるいは「ピタゴラスの定理」といわれる。



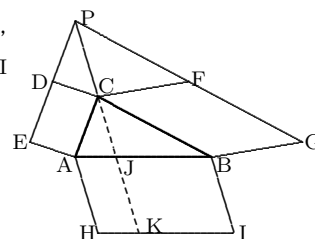
上の証明法はギリシャ時代の「ユークリッドの原論」で採用されている方法で、百を超える初等的な証明法の中の一つである。ユークリッドの「原論」については、すでに何度もこのメモで言及してきたが、紀元前300年ほど前に、ユークリッドによって、それまでの図形の学問（幾何学）を集大成し、論理的知性的な思考の範を示したと言われている大著であり、多くの翻訳が残されている。ただし、ユークリッドは実在の個人であったかどうかさえ必ずしも明確ではない。

ところで、上の図で ED と GF の交点を P とすると、 $\triangle ABC \cong \triangle CPD$ だから PC は AB に垂直となる。したがって、PCJK は直線となり、 $PC=AH$, $PC \parallel AH$ である。よって、 $\triangle ACP \cong \triangle CAH$ である。したがって、上の証明は、次の「パプスの定理」の特別な場合とも考えることができる。（パプスの定理と言われる定理は多数ある）

右図 $\triangle ABC$ において、それぞれ AC, BC を一辺とする平行四辺形 ACDE, BCFG を作り、ED, GF の交点を P とする。辺 AB を一辺とする平行四辺形 ABIH を $PC=AH=BI$, $PC \parallel AH \parallel BI$ とする。このとき

平行四辺形 ACDE + 平行四辺形 BCFG = 平行四辺形 AHIB となる。

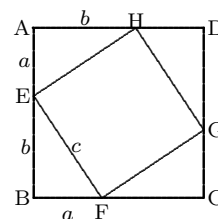
(証明は $\triangle ACP \cong \triangle CAH$ を用いる)。



すでに、「方べきの定理」による証明、「トレミーの定理」による証明を示してきた。ここでは、他の代表的な証明を2つだけ示しておく。

右図のように辺の長さが $a+b$ の正方形 ABCD で、AB 上で A から a だけ離れた点を E、同様に F, G, H をとる。 $\triangle AEH \cong \triangle BFE$ より $EH=FE$, $\angle HEF=90^\circ$ などが得られ、四角形 EFGH は正方形となる。

$EF=c$ において、正方形 ABCD の面積を2つの方法で表せば、 $(a+b)^2 = c^2 + \frac{1}{2}ab \times 4$
これより、 $a^2 + b^2 = c^2$



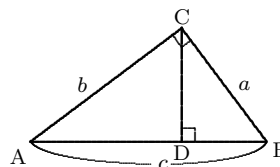
右図のように直角三角形 ABC の頂点 C から BC への垂線を CD とする。

$$\triangle ABC \sim \triangle ACD \text{ より } \frac{AB}{AC} = \frac{AC}{AD} \text{ よって } AC^2 = AB \cdot AD$$

$$\triangle BAC \sim \triangle BCD \text{ より } \frac{BA}{BC} = \frac{BC}{BD} \text{ よって } BC^2 = BA \cdot BD$$

$$\text{よって } AC^2 + BC^2 = AB(AD + BD) = AB^2$$

$$\text{したがって } a^2 + b^2 = c^2$$

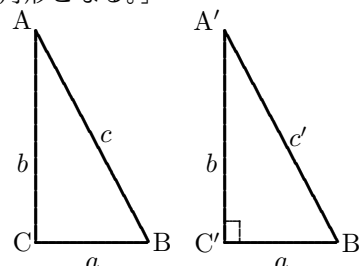


三平方の定理は座標平面における「距離」を定義する基礎（“距離”は『中学数学発展』に議論している。）になるもっとも基本的な定理である。いくつかの証明を知って、確信を深めておいた方がよい。しかし、より重要なことは、三平方の定理の逆も成り立つことである。

「 $a^2 + b^2 = c^2$ ならば、直角を挟む2辺を a, b , 斜辺を c とする直角三角形となる。」

証明は簡単で、まだ直角三角形かどうかわからない、 $a^2 + b^2 = c^2$ が成り立つ三角形を $\triangle ABC$ とし、 a, b を直角を挟む2辺とする直角三角形を $\triangle A'B'C'$ 、 $\triangle A'B'C'$ の斜辺を c' とする。

仮定より $a^2 + b^2 = c^2$, $a^2 + b^2 = c'^2$, したがって $c = c'$
 これより2つの三角形は3辺がそれぞれ等しく、合同となる。よって $\angle ACB = \angle A'C'B'$ 。したがって $\triangle ABC$ は直角三角形となる。



証明は極めて簡単であったが、実に面白い論理展開だ。こうした間接証明法を「同一法」という。同一法を要約すると

「A ならば B という定理が真で、性質 B をもつものが ただ一つしかない ならば、B ならば A という逆の定理も成り立つ」

となる。同一法を適用するときには、「ただ一つしかない」ことを必ず証明しておかねばならない。三平方の定理の逆の証明では、 $\triangle ABC \cong \triangle A'B'C'$ を証明した。ただ一つしかないはずだ、と勝手に仮定してはいけない。このメモでも、同一法を既に何度も用いている。探してみよう。さらに意識的に別の局面でも活用しよう。

三平方の定理の逆の証明は、次のような直接証明法でも出来る。

仮定は $a^2 + b^2 = c^2$ である。変形すると、 $(c-b) : a = a : (c+b)$ … ①

右図のように、 $\triangle ABC$ の3辺を a, b, c とし、AB 上に $AD = b$ となる点 D, BA の延長上に $AE = b$ となる点 E をとると、

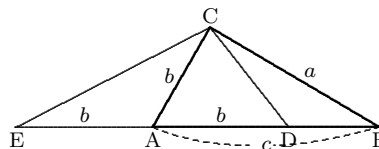
①は、 $BD : BC = BC : BE$ … ② と表せる。

$\triangle BCD$ と $\triangle BEC$ において、②と $\angle B$ が共通より $\triangle BCD \sim \triangle BEC$ となり、 $\angle BCD = \angle BEC$ … ③

$AE = AC$ より、 $\angle ACE = \angle AEC$ … ④ ③, ④より、 $\angle BCD = \angle ACE$ … ⑤

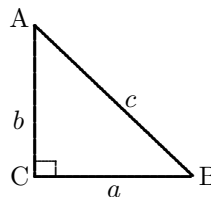
点 C は ED を直径とする円周上の点より、 $\angle ECD = 90^\circ$, よって $\angle ACE + \angle ACD = 90^\circ$ … ⑥

⑤, ⑥より、 $\angle ACB = 90^\circ$



三平方の定理

直角を挟む2辺を a, b , 斜辺を c とすると
 $a^2 + b^2 = c^2$
 となる。また逆も成り立つ。



どんな有理数の組が直角三角形の3辺となるかを調べてみよう。こうした議論は全て整数の範囲で行えばよい。なぜなら、分数が関わるとしたら、3数の分母の最小公倍数をかけて、整数の組にしておけば、それは元の三角形と相似となるからである。

三平方の定理を満たす 整数の組 をピタゴラス数という。

m, n は互いに素な自然数とし、

$$a = d(m^2 - n^2), b = d \times 2mn, c = d(m^2 + n^2)$$

とすると、 (a, b, c) はピタゴラス数である。

$$a^2 + b^2 = d^2(m^2 - n^2)^2 + d^2(2mn)^2$$

$$= d^2(m^4 + 2m^2n^2 + n^4) = d^2(m^2 + n^2)^2 = c^2$$

表は最も簡単な比となる場合のピタゴラス数の組である。

原始ピタゴラス数

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
...

もう少し詳細にピタゴラス数について議論しておく。

最大公約数が1であるようなピタゴラス数は素あるいは原始的 (primitive) であるという。全ての原始ピタゴラス数が、 $a = m^2 - n^2, b = 2mn, c = m^2 + n^2$, (m, n は互いに素で、一方が偶数、他方は奇数の自然数)、で求められ

ることは次のように証明できる。

a と b がともに偶数, a と b がともに奇数, の場合 a, b, c は原始ピタゴラス数にはならない。したがって証明では b を偶数, a, c は奇数 としておく。 $c+a, c-a$ もともに偶数となるから, $c+a=2p, c-a=2q$ (p, q は $p > q$ の自然数) とおく。ところが, p, q の最大公約数を G とし, $p=Gp', q=Gq'$, (p', q' は $p' > q'$ の互いに素な自然数) とおくと, $c=p+q=G(p'+q')$, $a=p-q=G(p'-q')$ となって, $G=1$ でなければならない。

$b^2=c^2-a^2=(c+a)(c-a)=2p \times 2q$ より, $(b/2)^2=pq$ となり, pq は平方数である。ところが, 互いに素な2数の積が平方数のときは, それら2数はともに平方数でなければならないから, $p=m^2, q=n^2$, (m, n は互いに素な自然数) とおける。よって, $(c+a)/2=m^2, (c-a)/2=n^2, b/2=mn$ である。したがって, $a=m^2-n^2, b=2mn, c=m^2+n^2$ となる。 m, n がともに奇数の場合, とともに偶数の場合は a, b, c が全て偶数 となるので省いて, m, n は一方が偶数, 他方は奇数 とする。

原始ピタゴラス数が無数に存在することは次のような場合を考えると簡単にわかる。

正の整数 n にたいして, $(n+1)^2=n^2+2n+1$ となるが, $2n+1=k^2$ となる正の整数 k が存在すれば,

$(n+1)^2=n^2+k^2$ となり, $(n+1, n, k)$ はピタゴラス数となる。従って, $k \geq 3$ の奇数 k を任意に選ぶ

と, n が決まり, ピタゴラス数を求めたことになる。各組で k は最小の数だから, これらは全て別の組であり, 原始ピタゴラス数は無数に存在することになる。 ($k \geq 3$ のとき, $n=\frac{1}{2}(k^2-1), n-k=\frac{1}{2}\{(k-1)^2-2\} > 0$)

また, 上のことを用いると, 次のような性質があることがわかる。

a, b, c がピタゴラス数のとき,

① a か b は3の倍数である (関西学院大), ② a か b は4の倍数である, ③ a か b か c は5の倍数である。

という性質がある。これらは, 「文字を使った説明」の問題としてよい練習問題である。

①について… a, b もともに3の倍数でないときは $a=3m \pm 1$ (m は整数), $b=3n \pm 1$ (n は整数) と表せる。したがって, $a^2+b^2=3(3m^2+3n^2 \pm 2m \pm 2n)+2$ (3で割ったとき余りが2) となる。ところが, $c=3p, 3p \pm 1$ (p は整数) とすると, c^2 はいずれも3の倍数か, 3で割ったとき余りが1の場合のみで, 余りが2にならない。よって a か b のいずれかは3の倍数である。

②について, b は $2mn$ で求められ, m か n は偶数だから, b は4の倍数となる。

③について, a, b, c のいずれも5の倍数でないとする。 a^2, b^2 をそれぞれ5で割った余りは, 1または4である。したがって, a^2+b^2 を5で割った余りは, 0または2または3となるが, c^2 を5で割った余りは1または4であり, 矛盾する。したがって, a, b, c のうち少なくとも一つは5の倍数である。

「抽象数学のてざわり ピタゴラスの定理から圏論まで」

斎藤毅著 岩波科学ライブラリー 305 2021年7月第1刷発行

には, 第0章で原始ピタゴラス数の全く違った証明を与え, それを手掛かりに, 現代の抽象数学への道が開けることを示唆している。そして, 第0章のまとめには, 「現代数学は線形代数と微積分で支えられています」とあり, 中学数学を一通り学んだあとは, 全力で, 線形数学と微積分を学ばねばならないことを教えている。どの科学の分野も, 歴史から発展の契機を理解することは, 極めて重要である。

余談だが, 最近になって「フェルマーの最終定理」

「3以上の自然数 n に対して, 方程式 $x^n+y^n=z^n$ は自然数解 x, y, z を持たない。」

が証明された。こんな定理が成り立つことはギリシャ時代から関心が持たれ, 17世紀にフェルマーが定式化したものとされているが, 多くの数学者の努力の結果, 1994年10月ワイルズによって最終的に証明された。見かけ上, こんな簡単なことも, 数学的に厳密に証明することの難しさを示した例であり, 一方で一見どうでもよいような定理の証明を通じて, 数学は大きく進歩したと言われている。ただし筆者は原論文を読んでもいないだけでなく, 読んでも分からないだろう。解説に目を通したに過ぎない。たとえ中学生でも, ピタゴラス数について話を聞こうと思うならば, フェルマーの最終定理をよく理解している先生の話の方が間違いなく有益だろう。学問とはそういうものであり, 教育はそれを一緒になってみんなのものにすることだ。中学の先生も楽ではないはずだ。

「フェルマーの最終定理」サイモン・シン著 青木薫訳 新潮文庫

には, 面白い話が満載されている。

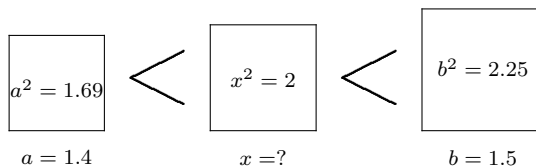
さらに余談だが, 「フェルマーの小定理」というものもある。「 p が素数ならば, 任意の自然数 n について, n^p-n は p で割り切れる。」これなら, 簡単に証明できる。自分でできなければ, ネットで調べておこう。

さて, 直角三角形の直角を挟む2辺の長さ a, b を任意に与えたとき, 斜辺はうまく求まるだろうか。 a, b は整数でなくてもよい, としておく。結局, $s=a^2+b^2$ とおけば, $x^2=s$ ($s > 0$) となる x が求まるか, という問題に帰着する。

4.2 平方根と無理数

$x^2 = s$ ($s > 0$) を解くことを考えよう。これは面積が s となる正方形の一辺の長さに相当する。いま、 $s = 2$ としておくと、面積 2 cm^2 の正方形の一辺は何 cm かという問題である。図のように、 $a < x < b, a > 0$ のとき、 a, x, b を一辺とする正方形の面積 a^2, x^2, b^2 について $a^2 < x^2 < b^2$ が成り立つ。

逆に、面積の考えから $a^2 < x^2 < b^2, a, x, c > 0$ なら $a < x < b$ が得られる。 a を $a^2 \leq 2$ の範囲で、どんどん a^2 を 2 に近づけていく。 b も $b^2 \geq 2$ の範囲で b^2 を 2 に近づけていく。



$1.4^2 < 2 < 1.5^2, 1.41^2 < 2 < 1.42^2, 1.414^2 < 2 < 1.415^2, 1.4142^2 < 2 < 1.4143^2, a^2 < 2 < b^2$ と繰り返していけば、 a も b も、 $x^2 = 2$ となる数 x にいくらかでも近づき、最終的に x になるだろう。こうした手続きで本当の値にどんどん近づくことを「挟み込み」という。こうして得られた最終の数 x を $\sqrt{2}$ と表し、ルート 2 と読む。ルートは root で木などの根を意味する。 $\sqrt{\quad}$ を根号という。2 乗して s となる数が \sqrt{s} ならば、 $-\sqrt{s}$ も 2 乗すれば s となる。したがって

$$x^2 = s, s > 0 \text{ の解は } x = +\sqrt{s}, -\sqrt{s} \text{ となる。}$$

この、 $\pm\sqrt{s}$ を s ($s \geq 0$) の平方根という。平方根とは、平方 (2 乗) すれば s になる もとの数 という意味である。ただし、2 乗すれば s になる数は $\pm\sqrt{s}$ ($s > 0$) の 2 つあったから、 \sqrt{s} は 2 乗すれば s になる正の方の数である。

$\sqrt{2}$ は間違いなく「存在するはずだ」ということがわかったが、本当に存在するかどうかは「数」とは何か、の定義による。そして、こうしたものも数である、という立場をとる。その時の数の集まりを「実数」という。この議論は後でもう少し詳しく考察することにして、それでは、 $\sqrt{2}$ を有理数の知識でどう近似すればよいか、という課題が出てくる。すなわち、中 3 では任意の十進数の平方根計算は挟み込みの原理で学んだことになっているが、ただ能率良く近似的な値を求める方法がカリキュラムにはないだけである。基本的には電卓で用を足すが、簡単なことだから計算法 (開平という) も知っておいた方がよい。勿論、塾生は三年のはじめに 20 分ほどこれを練習する。使っている間に論拠はだんだん自然とわかってくるものだ。この方法の利点は、解が十進数の有限小数であらわせるとき、有限回の操作で厳密にその解を得ることができることである。

例として、 $\sqrt{26.245129} = 5.1234$ を求めるには

2 乗して 26 以下でできるだけ大きい整数 5 を見付ける。 $5 + 5 = 10, 26 - 5^2 = 1$ を求める。差 1 に 0.1, 0.01 の位の数 2, 4 を下ろして、124 とする。124 以下で $10 \textcircled{0} \times \textcircled{0}$ が最大となる $\textcircled{0} = 1$ を見いだす。 $10 \textcircled{1} + \textcircled{1} = 102, 124 - 10 \textcircled{1} \times \textcircled{1} = 23$ を計算する。差 23 に 0.001, 0.0001 の位の数 5, 1 を下ろして、2351 とする。2351 以下で $102 \textcircled{0} \times \textcircled{0}$ が最大となる $\textcircled{0} = 2$ を見いだす。 $102 \textcircled{2} + \textcircled{2} = 1024, 2351 - 102 \textcircled{2} \times \textcircled{2} = 307$ を計算する。...

				5	.	1	2	3
	5		$\sqrt{26}$	26	.	24	51	29
	5			25				
1	0	1		1	24			
				1	01			
1	0	2	2		23	51		
			2		20	44		
1	0	2	4	3		3	07	29
				3		3	07	29
1	0	2	4	6				0

以下の分かりやすい場合に対応する考察から、その計算法は十分理解できる。特定の場合ではあるが、どんな 0 でない十進数 s も適当な数 10^{2n} (n は整数) を掛けて、 $1 \leq s < 100$ にすることができるから、議論の一般性は失われない。

s ($s > 0$) の正の平方根の整数部分を a_0 、0.1 の桁を a_1 、0.01 の桁を a_2 、0.001 の桁を a_3 、0.0001 の桁を a_4 、 \dots ($a_1, a_2, a_3, a_4, \dots$ は $0 \leq a_k \leq 9$ の整数) とすると

$$\begin{aligned} s &= x^2 = (a_0 + a_1/10^1 + a_2/10^2 + a_3/10^3 + a_4/10^4 + \dots)^2 \\ &= a_0^2 + (2a_0 + a_1/10^1) \cdot a_1/10^1 + (2a_0 + 2a_1/10^1 + a_2/10^2) \cdot a_2/10^2 \\ &\quad + (2a_0 + 2a_1/10^1 + 2a_2/10^2 + a_3/10^3) \cdot a_3/10^3 + (2a_0 + 2a_1/10^1 + 2a_2/10^2 + 2a_3/10^3 + a_4/10^4) \cdot a_4/10^4 + \dots \\ &= a_0^2 \quad + (2 \cdot 10^1 a_0 + a_1) \cdot a_1/100^1 \\ &\quad + (2 \cdot 10^2 a_0 + 2 \cdot 10^1 a_1 + a_2) \cdot a_2/100^2 \\ &\quad + (2 \cdot 10^3 a_0 + 2 \cdot 10^2 a_1 + 2 \cdot 10^1 a_2 + a_3) \cdot a_3/100^3 \\ &\quad + (2 \cdot 10^4 a_0 + 2 \cdot 10^3 a_1 + 2 \cdot 10^2 a_2 + 2 \cdot 10^1 a_3 + a_4) \cdot a_4/100^4 \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

小数点を中心に 2 桁ずつ区切って順次下の 2 桁を下ろしながらそれぞれの段の積を引いていく様子を確認して欲しい。この開平は、厳密な解に収束する手続きとなっている (一段進む度に、差の上限が一桁ずつ小さくなっている)。

アルゴリズム風に書くと

$s = a_0^2 + r_0$, $b_0 = 2a_0$ から始めて, ($0 \leq a_k \leq 9$ の整数)

$k = 1, 2, 3, \dots$ について,

$r_k = 100r_{k-1} - a_k(10b_{k-1} + a_k)$ ただし, a_k は, $0 \leq r_k < 10b_{k-1} + 2a_k + 1$

$b_k = 10b_{k-1} + 2a_k$

となることがわかる。

(注) r_k は余りだから, $0 \leq r_k$

a_k を 1 増やしたとき, $(100r_{k-1} - a_k(10b_{k-1} + a_k)) + r_k < (a_k + 1)(10b_{k-1} + a_k + 1)$

でなければならない。これより, $r_k < 10b_{k-1} + 2a_k + 1$

したがって, r_k が余りである条件は $0 \leq r_k < 10b_{k-1} + 2a_k + 1$

計算法 (アルゴリズム) が正しいかどうかはプログラミングを行えばすぐ確かめられる。塾生の中には、簡単なプログラミング言語が使える人もいるだろう。自分でプログラムしてみれば、多くの問題が発生し、したがって多くのことを学べる。数学を含む科学の学習は指導要領に従ったカリキュラムを着実にこなすことが全てというのではなく、自分の興味があることに執拗に食らいついていく、という姿勢も欠かせない。小学高学年から、実用的なプログラミング言語を学習するべきだと考えているが、正規の授業への導入はずっと先のことになる。上記の手続きをプログラムする (コーディングする) のは、アルゴリズムが理解できている手慣れた人には数分でできるが、初心者にはちょっと難しい。

入試問題に簡単に答えるには、有効数字 2 桁ではちょっと不足の場合がある。上の開平を行っても良いが、繰り返しの方法によって近似値を得た方が簡単な時もある。

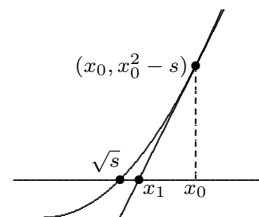
例えば, $x = \sqrt{2}$ をもとめるには, $x_0 = 2$ から始めて,

$$x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{2}{x_0}) = \frac{3}{2} = 1.5$$

$$x_2 = \frac{1}{2}(x_1 + \frac{2}{x_1}) = \frac{17}{12} = 1.4166\dots$$

$$x_3 = \frac{1}{2}(x_2 + \frac{2}{x_2}) = \frac{577}{408} = 1.41421\dots$$

原理は簡単で, $x^2 = s$, ($s > 0$) の解とは, $y = x^2 - s$ のグラフで y が 0 になる x であることを用いる。塾ではこの関数のグラフ, およびグラフ上の点での接線の傾きを学んでおり, $x = x_0$ での傾きは $2x_0$ である。したがって点 $(x_0, x_0^2 - s)$ における接線の式は $y - (x_0^2 - s) = 2x_0(x - x_0)$ である。これより, 近似値を x_0 とするとその改良した近似値は, $x_1 = \frac{1}{2}(x_0 + \frac{s}{x_0})$ となる。全く同様に, 順次 x_2, x_3, \dots が得られる。



この方法は一般に「ニュートン法」といわれ, 証明はしないが, 誤差は「二次収束」で, 急速に真の値に近づく方法である。右に, C 言語の例を示す。(塾生で C, Fortran, Java など自分で学習したい人は申し出て下さい。塾の授業についてこれる人ならば誰でも, その概略は簡単に修得できます。)

2 次収束とは, 解を α , 第 k 段の近似値および誤差を x_k, ϵ_k とすると

$$\epsilon_k = x_k - \alpha, \quad \epsilon_{k+1} \sim \epsilon_k^2, (k = 0, 1, 2, \dots)$$

ということである。 \sim はおおざっぱな近似という程度の意味。

Newton 法は解の近くの曲線の傾きが求めれば, 常に計算できる極めて一般的な方法である。

```
#include <stdio.h>
main(){
double s=2.0,x=2.0; int i;
for(i=1;i<=3;++i){
x = (x + s/x)/2.0;
printf("%f ",x);}
}
```

\sqrt{s} については, その導入から重要な性質があることがわかる。

$a > 0, b > 0$ のとき,

$$\sqrt{a} < \sqrt{b} \iff a < b \quad \text{である。}$$

たとえば, $(70\sqrt{2})^2 = 9800$, $99^2 = 9801$ で, $9800 < 9801$ よって $70\sqrt{2} < 99$

$a > 0, b > 0$ で, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ のときは, $a = (\sqrt{a})^2 = \sqrt{a} \times \sqrt{a} < \sqrt{a} \times \sqrt{b} < \sqrt{b} \times \sqrt{b} = b$ である。

上の説明から, 次のような議論が展開できる。

$a > 0, b > 0$ で, $\sqrt{a} < \sqrt{b}$ のとき, $a < b$, $\sqrt{a} = \sqrt{b}$ のとき, $a = b$, $\sqrt{a} > \sqrt{b}$ のとき, $a > b$ 。

逆は, 既に述べた転換法により成り立つ。

さて, $\sqrt{2}$ はこれまで用いていた数とは少し違う。整数の分母, 分子からなる分数は結局, 約分すると常にもはや互いに約分できない分母, 分子からなる分数にすることができる。こうした分数を「既約分数」

という。整数も分数の一種だと見なせる。すべての分数は既約分数で表せる。円周率 π を別にすると、これまで用いてきた数はすべて既約分数で書ける、と暗黙のうちに了解していた。すなわち、数とは既約分数のことであった。既約分数で表せる数を有理数という。しかし、ここで導入した $\sqrt{2}$ は既約分数では書けないことがすぐわかる。有理数でない数を無理数という。したがって、これ以降、数は有理数だけでなく、無理数にも拡大される。まず、 $\sqrt{2}$ が無理数である、すなわち有理数ではないことを証明しよう。これには「背理法」というちょっとうまい証明法を用いる。はじめに

$$\sqrt{2} = \frac{q}{p}, \quad p, q \text{ は互いに素な整数}$$

と仮定する。互いに素な整数、とはもはや約分できない（1 以外の共通因数を持たない）一組の整数のことである。すなわち、 $\frac{q}{p}$ は既約分数である。この仮定は正しい（数学では真という）かどうかかわからないとする。そしてこれが正しくない、ことを証明するのが課題だ。そのため、仮にこれが正しいと仮定したのだ。両辺を平方して

$$q^2 = 2p^2$$

となる。 q^2 は 2 の倍数だから q 自身も 2 の倍数となる。なぜなら、 q が 2 の倍数（偶数）のときは q^2 は 2 の倍数となり、それ以外のとき、すなわち奇数のときは q^2 は 2 の倍数にならないからだ。したがって、

$$q = 2q', \quad q' \text{ は整数}$$

となる。これを上の式に代入して、

$$p^2 = 2q'^2$$

これより、同様に考えて $p = 2p'$ 、 p' は整数 となる。したがって、 p, q ともに 2 の倍数となり、これはもともと仮定した p, q は互いに素、という仮定に反する。「矛盾」だ。どうしてこんな矛盾が発生したかを考えると、正しくない仮定をしたから以外に考えられない。こうして $\sqrt{2}$ は無理数だということが証明された。

ここで証明法について少し復習しておこう。既に、円周角の定理の逆などでは「転換法」、三角形の 3 中線が一点で交わる、三平方の定理の逆、相似な図形の性質、チェバの定理などでは「同一法」、などそれなりの巧妙な証明法を用いてきた。さらにすでに「対偶証明法」を使ってきた。「集合と論理」（『中学数学発展』）のところを読み直しておいて欲しい。

〔例題 1〕 q^2 が 3 の倍数ならば、 q は 3 の倍数であることを証明せよ。

これは、一般的に第一章で証明したが、ここでは、転換法で証明しておこう。

q が 3 の倍数ならば、 q^2 は 3 の倍数である。… ①

q が 3 の倍数でないなら、 q^2 は 3 の倍数でない。… ②

q は 3 の倍数か、3 の倍数でないか、どちらかであり、 q の全てはそれらで尽くされている。 q^2 も同様である。

したがって、①、②の逆は成立する。

しかし、場合は①、②の 2 つだけだから、課題に答えるだけならば、②の対偶だけで十分である。転換法は対偶証明法の拡張である。

〔例題 2〕 $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明せよ。

本文で $\sqrt{2}$ が無理数であることを背理法で証明したが、少し違った方法で背理法を適用しよう。

$\sqrt{3}$ が有理数だと仮定する。

$$\sqrt{3} = \frac{q}{p}, \quad p, q \text{ は整数}$$

両辺を平方して、

$$q^2 = 3p^2$$

左辺は素因数 3 は偶数個でなくてはならないが、右辺は奇数個でなければならない。これは矛盾である。

したがって、 $\sqrt{3}$ は無理数である。この証明では、「 p, q は互いに素」の条件は不要である。

〔参 考〕 π が無理数であることを証明するのは、中学数学では難しいが、平方根以外で、比較的簡単に無理数であることを証明できる場合もある（ただし、数の連続性についての知識を要す）。

高校で自然対数の底として学ぶネイピア数 e は、

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \cdots$$

となることが証明できる（ここでは、これを定義と考えておく）。

この極限值が存在し、無理数であることを証明せよ。

二項定理より、

$$a_n = 1 + n \frac{1}{n} + \frac{n(n-1)}{2!} \left(\frac{1}{n}\right)^2 + \dots + \frac{n(n-1)\dots(n-n+1)}{n!} \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \dots + \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n}\right)$$

$$a_{n+1} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) + \dots$$

$$+ \frac{1}{n!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n-1}{n+1}\right)$$

$$+ \frac{1}{(n+1)!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \dots \left(1 - \frac{n}{n+1}\right)$$
したがって、 $a_n < a_{n+1}$
また、 a_n の式で、 $1 - \frac{1}{n} < 1$, $1 - \frac{2}{n} < 1$, \dots , $1 - \frac{n-1}{n} < 1$
および、 $2! = 2, 3! > 2^2, \dots, n! > 2^{n-1}$ を考慮すると、

$$a_n < 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \dots + \frac{1}{n!}$$

$$< 1 + 1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} < 1 + \frac{1}{1-1/2} = 3$$
したがって、 $\{a_n\}$ は、有界な単調増加数列であるから収束する。

e が無理数であることを証明するため、有理数と仮定して矛盾を導く (Wikipedia より)
 $e = \frac{a}{b}$, a, b は自然数と仮定する。

$$b! \cdot e = \left(b! + \frac{b!}{1!} + \frac{b!}{2!} + \frac{b!}{3!} + \dots + \frac{b!}{b!} \right)$$

$$+ \left\{ \frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \frac{b!}{(b+3)!} + \dots \right\}$$
 $b!/(b+1)!$ 以降の全ての項の和は、 b が 1 以上であるから、

$$\left\{ \frac{b!}{(b+1)!} + \frac{b!}{(b+2)!} + \frac{b!}{(b+3)!} + \dots \right\}$$

$$= \frac{1}{(b+1)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)} + \frac{1}{(b+1)(b+2)(b+3)} + \dots$$

$$< \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^3} + \dots = 1$$
と 1 未満になる。したがって、() 内と { } 内を足した右辺は自然数でないことになり、左辺が自然数という結果と矛盾する。
ゆえに $e = a/b$ を満たす自然数 a, b が存在するという仮定は誤りである。よって、 e は無理数である。

さて本題に戻って、有理数 a は

$$a = \frac{q}{p}$$
, p, q は互いに素な整数
と書ける数だった。分数を割り算で計算すると、一般に ***** という形になるだろう。小数点より下の桁がすべて 0 ならば整数であり、小数点以下何桁目かで割り切れればいわゆる小数で、数学ではこれを有限小数という。ところが $\frac{1}{3}$ や $\frac{1}{7}$ のように何桁計算しても割り切れない分数もある。こうした無限に続く小数を無限小数という。後ですぐわかることだが、有限小数か無限小数かは数学的にそれほど重要なことではない。それは以下の考察によっても明らかである。

既約分数が無限小数になったとしても、各桁の計算では余りの種類は $0, 1, 2, \dots, p-1$ の p 種類で、そのうちあまり 0 は割り切れる場合だから、無限小数では $p-1$ 桁以内に必ず同じあまりが出てくる。同じあまりが出てきたときから、同じ計算を繰り返すことになる。こうして、既約分数が無限小数になるときはどこかの桁から必ず同じ $p-1$ 個以内の一組の数字が繰り返すことになる。割り切れない既約分数は無限小数で、それは必ずある桁以下は無限に循環する「循環小数」になる。

$$\begin{array}{r} 0.142857142 \dots \\ 7 \overline{) 1.0000000 \dots} \\ \underline{7} \\ 30 \\ \underline{28} \\ 20 \\ \underline{14} \\ 60 \\ \underline{56} \\ 40 \\ \underline{35} \\ 50 \\ \underline{49} \\ 10 \end{array} \quad \frac{1}{7} = 0.1428571428571428 \dots$$

$$\frac{1}{7} = 0.\dot{1}4285\dot{7}$$

循環小数は、無限桁の数をそのままでは明示できないので、たとえば $123.4567567567 \dots$ ならば、循環する桁のはじめの数と最後の数の上に点をつけて、 $123.4\dot{5}6\dot{7}$ のように表記する。また $5.67333333 \dots = 5.6\dot{7}3$ のように一桁で循環するときは循環する桁の数のみに点を付ける。 $\frac{1}{3} = 0.\dot{3}$ である。逆にどんな循環小数も簡単に既約分数で表すことができる。

例を示す。
 $s = 1.2\dot{3}4\dot{5} = 1.2345345345345 \dots$ とすると、

$$s = 1.2 + \frac{1}{10} \times 0.345345345 \dots = 1.2 + \frac{1}{10} \times 0.\dot{3}4\dot{5}$$
 である。
 $a = 0.\dot{3}4\dot{5}$ とおくと、 $1000a = 345 + a$ となる。よって $a = \frac{345}{999}$
したがって、 $s = 1.2 + \frac{1}{10} \times \frac{345}{999} = \frac{4111}{3330}$ となる。

循環小数を既約分数に変換する方法はいろいろあるが、結局原理は同じことであるから、どれかの方法でできるように練習しておいてほしい。上の方法も、論理的には不十分なところもある ($0.\dot{3}4\dot{5}$ が確定している、という仮定が入っている。高校での楽しみだ)。

通常は $\frac{1}{9} = 0.\dot{1}$, $\frac{1}{99} = 0.0\dot{1}$, $\frac{1}{999} = 0.00\dot{1}$, \dots を知っておき、

$$5.1\dot{2}0\dot{3} = 51.20\dot{3} \times \frac{1}{10} = (51 + \frac{203}{999}) \times \frac{1}{10} = \frac{51152}{9990} = \frac{25576}{4975}$$

〔演習〕 次の循環小数を既約分数で表しなさい。
(1) $0.\dot{2}\dot{3}$ (2) $0.010\dot{2}$ (3) $10.\dot{3}\dot{5}$ (4) $10.010\dot{1}$
(1) $\frac{23}{99}$ (2) $\frac{17}{1665}$ (3) $\frac{1025}{99}$ (4) $\frac{100001}{9990}$

結局、数を以下のように分類することができる。

$$\text{数 (実数)} \left\{ \begin{array}{l} \text{有理数 (既約分数で表せる)} \left\{ \begin{array}{l} \text{整数} \\ \text{有限小数} \\ \text{循環小数} \end{array} \right. \\ \text{無理数 (既約分数で表せない)} \cdots \text{循環しない無限小数} \end{array} \right.$$

このことから、無理数は幾らでも作ることができる。たとえば、

$$0.101001000100001000001 \cdots$$

$$0.123456789101112131415 \cdots$$

$$0.2357111317192329313741 \cdots$$

である。一番目はすぐ理解できます。2つ目の数は簡単ですが、無理数であることを厳密に証明するにはどうしたらよいか筆者は知りません。教えてください。3つ目が無理数でないとすると、素数には、重大な規則性があることになります。それは矛盾です。

次の問に答えなさい。(学校の定期テストで出題された問題です)

「 次の分数のうち、循環小数になるものを全て答えなさい。 $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{11}$ 」

そして、以下の文を読んでから、再度応え直してください。

有理数か無理数かは位取り記数法によらない。しかし、有限小数か循環小数かは位取り記数法によって変わってくる。たとえば2進数 $100.1101_{(2)}$ は

$$100.1101_{(2)} = 1 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 0 \times 1 + 1 \times \frac{1}{2^1} + 1 \times \frac{1}{2^2} + 0 \times \frac{1}{2^3} + 1 \times \frac{1}{2^4}$$

という意味である。分数 $\frac{1}{3} = 0.333333 \cdots = 0.\dot{3}$ と無限の循環小数になるが、これを3進数で表すと $\frac{1}{3} = 0.1_{(3)}$ と有限小数となる。有理数は整数か割り切れる有限小数か、無限に続く循環小数かのいずれかであった。しかし、それらはそれぞれ適当な位取り記数法を採用するとそれぞれ有限の桁で表せることがわかる。既約分数の分母の整数を位取りに採用すればよいことだからだ。 $0.1 = 0.0\dot{9}$ だから、 $1.2 = 1.1\dot{9}$ と表せる。同様にしてすべての有限小数は必ず循環小数で表せる。同じ数にたいして異なった表現があり、有限小数か循環小数かは便宜的な違いである。

数値計算で混乱が起こることもある。10進数の $0.1_{(10)}$ は最も簡単な小数だと思われるが、2進数に変換すると

$$\begin{aligned} 0.1_{(10)} &= 0.000110011001100110011 \cdots_{(2)} \\ &= 0.000\dot{1}10\dot{0}_{(2)} \quad \text{循環小数} \end{aligned}$$

となる。計算機の内部での処理は2進数を基礎にしており、たとえ厳密に10進数で0.1を入力しても、計算機の中ではすでに必ず誤差が発生している。

さらに、容易に予想できることだが、位取り記数法を決めると、

0以外の全ての有理数は一意的に循環小数で表される

ことも証明できる。したがって、無理数は整数から発生するいかなる位取り記数法を用いても有限桁で表したり、循環小数になったりすることはない。

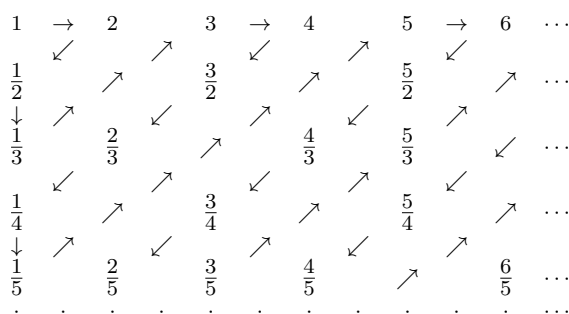
小学入学以来、整数、小数、分数、負の数など数の考え方がどんどん拡張されてきた。しかし、たとえば数直線を引いたとき、すべての点はこうした数(有理数)で表せるかということ、そうではない。 $\sqrt{2}$ や π は有理数ではない。ところが、数直線上には明らかに $\sqrt{2}$ や π は存在する(作図できる)。そのため、数には有理数だけでなく、無理数も数の仲間に入れなければ話が進まなかった。方程式 $x^2 = 2$ もこうして初めて解ける。ところで、数直線は無数の点からなっているが、有理数だけを考えるとあらゆるところに穴があいたような数直線のようなものになる。無理数でそれらを埋めなければいたる所に穴があいていることになる。有理数と無理数を合わせた数を実数という。これ以降断りなく数といえば、この実数を表すことにする。無理数の方が有理数より無限に多いように見える。一つの無理数たとえば $\sqrt{2}$ に対して勝手な0

でない有理数 r を持ってきて $r\sqrt{2}$ としただけで別の無理数になる。 $r + \sqrt{2}$ も別の無理数だ。一つの有理数に対して無限個の無理数を対応させることができる。

以上のことで、単純に「無理数の方が有理数より多い」と言うことは出来ない。既に有理数は無限個の集合であるからだ。有限個の要素をもつ2つの集合に対しては、その要素の数の比較は簡単である。一方が有限集合、もう一方が無限集合であれば、無限集合の方が要素の数は多い。しかし、たとえば、自然数と偶数はどちらが多い、という議論は慎重に検討しなければならない。なぜなら、たとえば、とりあえず正の偶数だけで考えて、 $1 \leftrightarrow 2, 2 \leftrightarrow 4, 3 \leftrightarrow 6, \dots$ と全ての偶数を自然数と1対1に対応させることができるからである。

すべての有理数は自然数 $1, 2, 3, 4, \dots$ と1対1に対応させることができる。すなわち、番号付けができる。もちろん有理数の個数は無限大である。

「有理数は可付番である。」すなわち 「有理数全体の集合は可算集合である」
 正の既約分数で考える。たとえば、縦に分母、横に分子の表を作り、次のように既約分数になるところだけをカウントすればよい。



もっと簡単に、全ての既約分数は分数で表せる、すなわち全ての既約分数の集合は分数の部分集合である。全ての分数 $\frac{n}{m}$ の集合は簡単に番号付けることができる。したがって、有理数は可付番である。

一般に n 次方程式

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \dots + a_{n-1}x + a_n = 0, \quad a_0 \neq 0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n \text{ は整数}$$

の解となる数を「代数的数」と言う。全ての有理数や、二次方程式などの解は代数的数である。カントルは「代数的数全体の集合は可算集合である」ことを示した。したがって、代数的数全体の集合は自然数の集合とどちらが多いか、という議論は成り立たない。敢えて言えば、同じレベル(マージナル数と言われる)の多さである。カントルは、「(実)数の集合は可算集合ではない」ということを証明した。このことの意味は、(実)数の集合は、自然数、有理数、代数的数の集合より別のより階層の高い多さの要素の集合であるということである。

ゲオルグ・カントル (Georg Cantor 1845-1918) はロシアで生まれ、ドイツで活躍した数学、物理学、哲学の専門家。『純粹理性批判』の哲学者イマヌエル・カント (Immanuel Kant) とは別人。カントルは「集合論」の創始者といわれ、「無限」を研究した。直線と平面は同じ(実)数のレベルの多さ(一対一対応ができる)の点からなり、さらに(実)数よりよりレベルの高い多さの集合、さらにそれよりレベルの高い多さの集合を作り出すことができることを示した。上の定理の証明は中学生にも理解可能だが、ここでは深入りしない。

無理数を含めた数全体は数えることができない。それほど多い。したがって、数を学習するためには無理数の理解なしにはほとんど進めない。こうした視点できっちり学習を楽しめるのは大学に入ってからだ。一つのことだけ付け加えておく。 $\sqrt{2}$ の導入で考えたように、すべての無理数は有理数でいくらでも正確に表すことができる。しかし、無理数はあくまで有理数ではない。円周率 π については後で述べる。したがって、 $\sqrt{2}$ などは特殊な性質を持った無理数ということが出来る。無理数も数だから(限りなく近い有理数で近似できるから)、無理数を含む計算は有理数だけの場合と同じ計算法則がなりたつ。すなわち、 a, b, c を数とすると

$$a + b = b + a \text{ (加法の交換法則)}, (a + b) + c = a + (b + c) \text{ (加法の結合法則)}$$

$$ab = ba \text{ (乗法の交換法則)}, (ab)c = a(bc) \text{ (乗法の結合法則)}$$

$$a(b+c) = ab+ac \text{ (分配法則)}$$

$0, 1$ が存在し (どんな a にたいしても, $a+0=a, a \times 1=a$)

$a+x=0$ となる $x, a \neq 0$ のとき $ay=1$ となる y が存在する。

が成り立つ。これらのことをもっと厳密に学習するのは大学に入ってからだ。

ただ, $\sqrt{2}$ などは無理数の内, 特殊な無理数, すなわち $(\sqrt{s})^2 = s$ という特別の関係がある無理数だから, それに応じた特別の取り扱いも必要になる。

$$\left[\begin{array}{l} a, b \geq 0 \text{ に対して} \\ \sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}, \quad \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad (b \neq 0) \end{array} \right.$$

が成り立つ。

$(\sqrt{a}\sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2(\sqrt{b})^2 = ab$ よって $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の平方根の一つである。

$\sqrt{a} \geq 0, \sqrt{b} \geq 0$ より $\sqrt{a}\sqrt{b} \geq 0$ したがって, $\sqrt{a}\sqrt{b}$ は ab の 0 以上の平方根である。

よって, $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$ が成り立つ。

気を付けねばならないことは, これらはいずれも $a, b \geq 0$ の条件が付いていることである。

$$\sqrt{a^2} = |a| = \begin{cases} a & (a \geq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

これらを使って,

$$\sqrt{12} = \sqrt{4}\sqrt{3} = 2\sqrt{3}, \quad \frac{\sqrt{12}}{\sqrt{3}} = \sqrt{\frac{12}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

などの計算ができた。また

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3 \times \sqrt{2}}{\sqrt{2} \times \sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{2}, \quad \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = 3 + \sqrt{6}$$

などの計算ができる。こうした演算を「分母の有理化」という。最終的な計算結果は分母を有理化し, できるだけ簡単な形の表現が求められる。小学で分数の計算の答えは約分して「既約分数」で答えなければならない, というと同じ論理である。解を見通しがよい形で表現する, 形式を統一する, などの要請が背景にある。しかし, 課題によっては, たとえば分母を有理化しない方が意味をよく表す場合もあるから, 計算の目的を定めて, 答えの形を決めなければならない。

もっと積極的に, 「分子の有理化」が要求されるときもある。

$$\sqrt{10001} - \sqrt{9999} = \frac{2}{\sqrt{10001} + \sqrt{9999}}$$

有効数字 3 桁の近似計算をすると, 左辺では $100.0 - 100.0 = 0.000$, 右辺は $2/(100.0 + 100.0) = 0.010$ となる。左辺では有効数字の「けた落ち」がおこり, 結果の有効数字は 1 桁もない。右辺では最終結果の有効数字が 3 桁の範囲で厳密な計算と一致している。

〔例題 3〕 次の事柄を証明せよ。

- (a) 有理数の四則演算は有理数になる。ただし, 割り算では割る数は 0 でないとする。
- (b) a, b が有理数, x が無理数とすると, $a+bx=0$ となるのは $a=0, b=0$ の時だけである。
- (c) $\sqrt{2}+3$ は無理数である。
- (d) 無理数を含む四則演算は必ずしも無理数ではない。
- (e) x^2 が無理数ならば, x は無理数である。

(a) について, 2 つの有理数を $\frac{q_1}{p_1}, \frac{q_2}{p_2}$ (p_1, q_1, p_2, q_2 は整数) とすると,

その和, 差, 積, 商はいずれも $\frac{\text{整数}}{\text{整数}}$ と表せ, 有理数である。

(b) $b=0$ のときは, 明らかである。 $b \neq 0$ のとき, $x = -\frac{a}{b}$ となり, $a \neq 0$ とすると,

左辺は無理数, 右辺は (a) より有理数となり矛盾する。よって $a=0$ 。

(c) について, (b) より明らかであるが, あらためて, 背理法で証明する。

$\sqrt{2}+3$ を有理数 x と仮定する。 $\sqrt{2}+3=x, \sqrt{2}=x-3$, 右辺は有理数となり

$\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾する。よって、 $\sqrt{2}+3$ は無理数。

(d) について、 $\sqrt{3}+(-\sqrt{3})=0, \sqrt{3}\times\sqrt{3}=3$ など、の例証をおこなう。

(e) について、対偶を取る。 x が有理数ならば、 x^2 は有理数である。

したがって、 x^2 が有理数でない、すなわち無理数ならば、 x は有理数でない、すなわち無理数である。

通常、計算の答えは、例えば、 $2+\sqrt{3}$ のような形にする。 $2+\sqrt{3}$ は無理数である。いくら計算を進めようとしても、一つの有理数で表現できない。次に考えられる整理した形は、 $a > 0, a$ は有理数として、 \sqrt{a} の形であるが、そうはならない。

〔例題 4〕 a を有理数として、 $2+\sqrt{3}=\sqrt{a}$ が成り立たないことを証明せよ。

a を有理数として、 $2+\sqrt{3}=\sqrt{a}$ と仮定する。両辺を平方して、変形すると、 $\sqrt{3}=\frac{a-7}{4}$

左辺は無理数、右辺は有理数で、矛盾！ よって $2+\sqrt{3}$ を、 a を有理数として \sqrt{a} の形に表すことはできない。

こうして、一般的には、 $2+\sqrt{3}$ が考えられる最も整理した式となる。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は、考えられるもっと簡単な形には整理できない。

〔例題 5〕 次の式が成り立たないことを証明せよ。 $\sqrt{2}+\sqrt{3}=p+\sqrt{q}$, p, q は有理数で、 $q \geq 0$

等式が成り立つとして、両辺を平方して、 $5+2\sqrt{6}=p^2+q+2p\sqrt{q}$ 。したがって、 $5-p^2-q+2\sqrt{6}=2p\sqrt{q}$

これは、 $p=0$ ならば $\sqrt{6}$ = 有理数 となり矛盾。また $p \neq 0$ ならば、例題 2 と同じ論理で、成立しない。したがって、上の等式は成立しない。

〔問題〕 $\sqrt{3}$ は $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ の無理数であることを用いて、 $a=5-2\sqrt{3}$ は $1.4 < a < 1.6$ の無理数であることを証明せよ。

$\sqrt{3}=\frac{5-a}{2}$ を $1.7 < \sqrt{3} < 1.8$ に代入すればよい。

したがって、 $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ も、一般的には、考えられるもっとも整理した式である。このことは、たとえば $\sqrt{2}+\sqrt{8}$ が $\sqrt{2}+\sqrt{8}=3\sqrt{2}$ と整理できることを排除しているのではない。

〔参考〕 2019 年度京都大学二次試験に次の問題が出題された。将来のこうした問題に備えるべきだ。角度 θ , $\cos \theta$, また、三倍角の公式 $\cos 3\theta = 4\cos^3 \theta - 3\cos \theta = \cos \theta(2\cos 2\theta - 1)$ などは、『中学数学発展』(塾生以外には非公開)を見てほしい。

「 $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ とする。 $\cos \theta$ は有理数ではないが、 $\cos 2\theta$ と $\cos 3\theta$ がともに有理数となるような θ の値を求めよ。

ただし、 p が素数のとき、 \sqrt{p} が有理数でないことは証明なしに用いてよい。」

$$\cos 3\theta = \cos \theta(2\cos 2\theta - 1)$$

もし、 $2\cos 2\theta - 1 \neq 0$ ならば、左辺は有理数、右辺は無理数となり、矛盾。したがって、 $2\cos 2\theta - 1 = 0$ 。よって、 $\cos 2\theta = \frac{1}{2}$ 、また、 $\cos 3\theta = 0$

$\cos 2\theta = \frac{1}{2}$, $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ より、 $2\theta = \frac{\pi}{3}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$ 。これは $\cos 3\theta = 0$ を満たす。

このとき、 $\cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$ となり、3 は素数だから $\sqrt{3}$ は有理数でない。したがって、 $2\sqrt{3}$ は有理数でない。

よって、確かに、 $\cos \theta$ は有理数でない。 答え $\theta = \frac{\pi}{6}$

二重根号についても一寸だけ触れておこう。入試問題などでは巧妙に二重根号が出てこないように問題が作成されているが、自分で課題を設定するとすぐその取り扱いが必要になる。

$x = \sqrt{5+2\sqrt{6}}$ の意味は説明する必要はない。 $x^2 = 5+2\sqrt{6}$ となる正の数 x は $x = \sqrt{2} + \sqrt{3}$ であることがすぐわかる。現に、 $x^2 = (\sqrt{2} + \sqrt{3})^2$ を計算してみればよい。これは $a+b=5, ab=6$ となる正の有理数 $a=2, b=3$ が見つけられたからである。一般に二重根号の式で $x = \sqrt{(a+b) \pm \sqrt{ab}}$ となる $a, b(a \geq b > 0)$ が見つければ、 $x = \sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ と分解できる。さらに、 $x = \sqrt{8-2\sqrt{15}} = \sqrt{5} - \sqrt{3}$ である。 $x = -(\sqrt{5} - \sqrt{3})$ も $x^2 = 8-2\sqrt{15}$ となるが、 $\sqrt{8-2\sqrt{15}}$ は正の方を選ぶことになっているからである。また、 $x = \sqrt{4+\sqrt{7}} = \sqrt{\frac{8+2\sqrt{7}}{2}} = \frac{\sqrt{7}+1}{\sqrt{2}}$ となる。

しかし、一般には二重根号を含む数が一重の根号に分解されるわけではない。また、結果が複雑な二重根号を含む式になったときは、平方して簡単化できないかを調べてみよう。

〔演習〕 次の式から二重根号を取り除きなさい。

(1) $\sqrt{5+2\sqrt{6}}$ (2) $\sqrt{12+2\sqrt{35}}$ (3) $\sqrt{5-2\sqrt{6}}$

(4) $\sqrt{5+\sqrt{21}}$ (5) $\sqrt{4+\sqrt{15}}$ (6) $\sqrt{8-\sqrt{55}}$
 (1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ (2) $\sqrt{5}+\sqrt{7}$ (3) $\sqrt{3}-\sqrt{2}$ (4) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{7})$ (5) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ (6) $\frac{\sqrt{2}}{2}(\sqrt{11}-\sqrt{5})$

一般に、論理的な議論を進めるときには、無理数に対して、勝手に近似的な有理数を用いると全く間違っ
 た結論になることがあるから注意しなければならない。これについてはそれぞれ問題に応じて考察する。
 最近の入試問題で考えてみよう。

1 「 $\sqrt{3}$ の小数部分を a とすると、 $\frac{a-2}{a+1}$ の値を求めよ。」

$\sqrt{3}$ の整数部分は 1 だから、小数部分は $a = \sqrt{3} - 1$ である。したがって $\frac{a-2}{a+1} = \frac{\sqrt{3}-3}{\sqrt{3}} = 1 - \sqrt{3}$ となる。

2 「 $(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$ の小数部分を x とするとき、 x^2+8x の値を求めよ。ただし、正の数 p にたいして $n \leq p < n+1$ となる
 整数 n を p の整数部分といい、 $p-n$ を p の小数部分という。」(灘高)

答え 8

これらは単純に平方することによって整数部分、小数部分を分離することができた。この手法だけでは解が得られない問題も
 ある。

3 「 $(\sqrt{2}-1)^{2004}(\sqrt{2}+1)^{2005}(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2006}(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2007}$ を (整数部分) + (小数部分) と表したとき、整数部分を求
 めなさい。」(清風南海高)

与式が $(\sqrt{2}+1)(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 2 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ となることはすぐわかる。問題は $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ の整数部分がいくら
 になるかである。 $1.4 < \sqrt{2} < 1.5, 1.7 < \sqrt{3} < 1.8, 2.4 < \sqrt{6} < 2.5$ はすぐわかるから、 $5.5 < \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6} < 5.8$ とな
 り、 $\sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{6}$ の整数部分は 5、したがって、答え 7

4 「 $\sqrt{18(20-n)}$ が整数となるような自然数 n の値を全てとめよ。」

$18(20-n) = 3^2 \times 2(20-n)$ より、これが整数の 2 乗になるためには、 $20-n = 2 \times m^2$, m は整数となる。 $n = 20 - 2 \times m^2$
 で、 $m = 0$ のとき、 $n = 20$, $m = 1$ のとき、 $n = 18$, $m = 2$ のとき、 $n = 12$, $m = 3$ のとき、 $n = 2$ である。よって、
 $n = 2, 12, 18, 20$

この問題を、ちょっとひねっただけの問題が、

「正の整数 a は 4 の倍数で、7 で割ると 2 余る数である。 $\sqrt{756-a}$ が正の整数となるような a の値を求めよ。」である。
 7 で割って 2 余る整数で 4 の倍数となるのは $a = 7 \times 2(2p+1) + 2$, p は整数と書ける。したがって、 $756-a = 4 \times 7(20-p)$
 が自然数の 2 乗になるには、 $20-p = 7n^2$, n は自然数。 $p = 20 - 7n^2$ の解は $n = 1, p = 13$ で、 $a = 380$

5 「自然数 k が与えられたとき、 $\sqrt{n^2-10^k}$ が整数になるような自然数 n を考える。

(1) $k = 3$ のとき、 n の値を全て求めよ。

(2) $k = 4$ のとき、 n の個数を求めよ。」(甲陽学院高)

(1) について、 $\sqrt{n^2-10^3} = m$, m は整数とする。 $n^2 - m^2 = 2^3 \times 5^3$ 。

$(n-m)(n+m) = 2^3 \times 5^3$, $n+m, n-m$ はどちらも偶数。

したがって $(n-m, n+m) = (2, 2^2 \times 5^3), (2 \times 5, 2^2 \times 5^2), (2^2 \times 5, 2 \times 5^2), (2^2, 2 \times 5^3)$

これより、 $n = 251, 55, 35, 127$

(2) について、 $(n-m)(n+m) = 2^4 \times 5^4$ 、

これより、 $n-m = 2, 2 \times 5, 2 \times 5^2, 2^2, 2^2 \times 5, 2^2 \times 5^2, 2^3, 2^3 \times 5$ の 8 通り

6 「 n を正の整数とする。 $\sqrt{n^2+2n+49}$ が整数となるような n をすべて求めよ。」

前問と同じ手法を適用する。 $\sqrt{n^2+2n+49}$ が整数となったとして、 $n^2+2n+49 = m^2$, m は整数とおいて、 m, n の
 条件を調べてみる。 $\{m+(n+1)\}\{m-(n+1)\} = 48$ で、 $(m+(n+1), m-(n+1))$ について、どちらも 48 の約数、
 偶数、 $m+(n+1)$ は正だから $m-(n+1)$ も正が得られる。

$(24, 2), (12, 4), (8, 6)$ の 3 組がある。このうち、 n が正の整数となるのは $(24, 2)$ の $m = 13, n = 10$, $(12, 4)$ の $m = 8, n = 3$
 の 2 組だけ。 $n = 3, 10$

「 n も $\sqrt{2012+n^2}$ もともに正の整数となるのは、 $n = \square$ のときである。」(12, 灘高)

$\sqrt{2012+n^2} = m$, m : 正の整数 とおく。

$(m+n)(m-n) = 2012 = 2^2 \times 503$

$m+n, m-n$ ($m+n > m-n$) の組み合わせを調べる。

解は、 $m+n = 1006, m-n = 2$ だけ。したがって、 $n = 502$

7 「 $7\sqrt{2}$ の小数部分と $\frac{7}{\sqrt{2}}$ の整数部分をかけた値の小数部分を求めよ。」(西大和学園高)

$(7\sqrt{2})^2 = 98 = 9^2 + 17$, $(\frac{7}{\sqrt{2}})^2 = \frac{49}{2} = 4^2 + 8.5$ より、 $7\sqrt{2}$ の小数部分は $7\sqrt{2} - 9$, $\frac{7}{\sqrt{2}}$ の整数部分は 4 である。

$(7\sqrt{2} - 9)4 = 28\sqrt{2} - 36$ で、 $(28\sqrt{2})^2 = 392 + 47$ より $28\sqrt{2}$ の小数部分は $28\sqrt{2} - 39$ 。これが 答えである。

$(7\sqrt{2})^2 = 98$, $(\frac{7}{\sqrt{2}})^2 = 24.5$ の開平を行い、それぞれの整数部分が 9, 4 を求めてもよい。

8 「 a を 9 でない正の整数とし、数 $r = \frac{8}{\sqrt{a}-3}$ の整数部分が 7 であるとする。このとき、

(1) $\square \leq r < \square + 1$ である。

(2) $a = \square$, $r = \square$ である。

(3) r の小数部分は \square である。」(金沢工大)

r の整数部分が 7 なので、 $7 \leq r < 7+1$

$7 \leq \frac{8}{\sqrt{a}-3} < 8$, したがって、 $\sqrt{a}-3 > 0$, よって、 $7(\sqrt{a}-3) \leq 8 < 8(\sqrt{a}-3)$

解いて、 $4 < \sqrt{a} \leq \frac{29}{7}$, 平方して、 $16 < a \leq \frac{841}{7} = 17.1\dots$, a は整数より、 $a = 17$

したがって、 $r = \frac{8}{\sqrt{17}-3} = \sqrt{17} + 3$, よって r の小数部分は $r - 7 = \sqrt{17} - 4$

- 9 「 a, b を有理数とする。多項式 $f(x) = x^2 + ax + b$ が $f(1 + \sqrt{3}) = 0$ を満たすとき、 a, b を求めよ。」
 $f(1 + \sqrt{3}) = (1 + \sqrt{3})^2 + a(1 + \sqrt{3}) + b = 0$ 。整理すると、 $(a + b + 4) + (a + 2)\sqrt{3} = 0$ となる。
 $a + b + 4, a + 2$ は有理数、 $\sqrt{3}$ は無理数だから、 $a + b + 4 = 0, a + 2 = 0$ 、したがって、 $a = b = -2$
 実は、これは大阪大学 (09) の入試問題の一部で、次の小問が続く。
 「 n を 2 以上の自然数とする。 $g(x)$ は有理数を係数とする n 次多項式で、最高次の係数が 1 であるとする。 $g(1 + \sqrt{3}) = 0$ となるとき、 $g(1 - \sqrt{3}) = 0$ を示せ。」
 $f(x) = x^2 - 2x - 2 = \{x - (1 + \sqrt{3})\}\{x - (1 - \sqrt{3})\}$ だから、 $g(x)$ を $f(x)$ で割ったときの商を $Q(x)$ 、余りは一次式だから A, B を有理数として、 $Ax + B$ とする。すなわち、
 $g(x) = Q(x) \times \{x - (1 + \sqrt{3})\}\{x - (1 - \sqrt{3})\} + Ax + B$
 $g(1 + \sqrt{3}) = A \times (1 + \sqrt{3}) + B = (A + B) + \sqrt{3}A = 0$ より、 $A + B = 0, A = 0$ 、したがって、 $A = 0, B = 0$
 よって、 $g(x) = Q(x) \times \{x - (1 + \sqrt{3})\}\{x - (1 - \sqrt{3})\}$ 、故に、 $g(1 - \sqrt{3}) = 0$

- 10 (1) p, q, r, s を整数とする。このとき、 $p + q\sqrt{2} = r + s\sqrt{2}$ が成り立つならば、 $p = r$ かつ $q = s$ となることを示せ。ここで、 $\sqrt{2}$ が無理数であることを使っても良い。
 (2) 自然数 n に対して、 $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ を満たす a_n, b_n が存在することを数学的帰納法により示せ。
 (3) a_n, b_n を (2) のものとする。このとき全ての自然数 n について、 $(x, y) = (a_n, b_n)$ は方程式 $x^2 - 2y^2 = 1$ の解であることを数学的帰納法により示せ。(10, 三重大学)

(1) は、 $(q - s)\sqrt{2} = r - p, q - s \neq 0$ とすると、 $\sqrt{2} = \frac{r - p}{q - s} = \frac{\text{整数}}{\text{整数}} = (\text{有理数})$ となり、 $\sqrt{2}$ が無理数であることと矛盾。よって、 $q - s = 0$ 、したがって、また、 $r - p = 0$
 (2) 「 $(3 + 2\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$ 、 n は自然数」となる整数の a_n, b_n が存在することを証明する。
 $n = 1$ のとき、 $(3 + 2\sqrt{2})^1 = 3 + 2\sqrt{2}$ だから、 $a_1 = 3, b_1 = 2$ で成立する。
 $n = k$ で、 $(3 + 2\sqrt{2})^k = a_k + b_k\sqrt{2}$ 、 a_k, b_k は整数 と仮定する。
 $(3 + 2\sqrt{2})^{k+1} = (3 + 2\sqrt{2})(a_k + b_k\sqrt{2}) = (3a_k + 4b_k) + (2a_k + 3b_k)\sqrt{2}$
 で、整数の $a_{k+1} = 3a_k + 4b_k, b_{k+1} = 2a_k + 3b_k$ が得られる。したがって、全ての自然数 n に対して、成立する。
 (3) $a_n^2 - 2b_n^2 = 1, n$ は自然数 を証明する。
 $n = 1$ のとき、 $a_1^2 - 2b_1^2 = 3^2 - 2 \times 2^2 = 1$ で成立。
 $n = k$ で成立すれば、
 $a_{k+1}^2 - 2b_{k+1}^2 = (3a_k + 4b_k)^2 - 2(2a_k + 3b_k)^2 = a_k^2 - 2b_k^2 = 1$ となり、 $n = k + 1$ でも成立。よって、全ての自然数で成立。
 この問題は、数学的帰納法の復習のために取り上げた。
 このタイプの不定方程式、 $x^2 - Dy^2 = \pm 1, D$ は平方数でない整数 をペル方程式という。大学入試では、これに関わる問題がいろいろ出される。

4.3 三角形

ここで、三角形の一般的な性質について整理しておこう。
 $\triangle ABC$ の辺 BC を点 A に対する辺といい、その長さを a と表す。同様に b, c とする。これは数学の習慣で、この記号法によって、見通しの良い議論が可能になる。
 三辺の長さ a, b, c が与えられたからと言って、三角形が決まるわけではない。
 どんな場合に三角形ができるのかを考えよう。つぎが結論である。

- 〔 三角形の成立条件
 (1) $a < b + c, b < c + a, c < a + b$
 (2) $|b - c| < a < b + c$ (または $|c - a| < b < c + a$ または $|a - b| < c < a + b$)
 (1) と (2) は互いに導くことができ、したがって同じ内容を主張している。

はじめに (2) から (1) を導く。 $|b - c| < a < b + c$ を仮定する。 $b > c$ のときは式は $b - c < a < b + c$ したがって、 $a < b + c, b < a + c$ 、また $b > c$ より $c < b < b + a$ となり (1) が成り立つ。同様に $b < c$ のときも言えるから、(2) から (1) が導けた。

次に (1) から (2) を導く。 $a < b + c, b < c + a, c < a + b$ を仮定する。 $b > c$ のとき、 $b - c < c + a - c = a$ となりたつ。また $c > b$ のとき、 $c - b < a + b - b = a$ 。したがって、いずれの場合も $|b - c| < a$ となりたつ。よって $|b - c| < a < b + c$ すなわち (2) が成り立つ。

(2) の括弧の中の記述が同じ内容であることは (2) から (1) を導き、(1) から (2) の別の記述を選べばよいことから理解できる。

さて (1) は、いずれの辺も他の 2 辺の和より短いことを意味している。2 点を結ぶ最短距離は 2 点を結ぶ線分である、ということに依拠している。したがって、定理はその逆、すなわち、3 点 A, B, C について、(1) が成り立てば、三角形 ABC が存在すると主張するものである。

(2) は、特定の辺に注目し、その辺が他の 2 辺の差より大きく、和より小さいことを主張している。これは、「現に作図によって三角形が作図できる」ことを根拠に三角形の成立の条件として真である、としておく。したがって、(1), (2) は同じことを違った形で主張しているだけだったから、我々は (1) の証明を回避し、

(2) を証明の根拠としておいた。

つぎに、内角と対応する辺の長さの関係を考える。

三角形の辺と角の大小関係

三角形で長い辺に対する角は短い辺に対する角より大きい。

逆も成り立つ。



定理は $b > c$ ならば $\angle B > \angle C$ とその逆を主張している。

左の図で、 $AB < AC (b > c)$ とする。AC 上に $AB = AD$ となる点 D をとる。△ABD は二等辺三角形となり $\angle ABD = \angle ADB$ 。 $\angle ABC = \angle ABD + \angle DBC = \angle ADB + \angle DBC = (\angle ADB - \angle DBC) + 2\angle DBC = \angle ACB + 2\angle DBC > \angle ACB$ となる。

逆に、右の図で、 $\angle ABC > \angle ACB$ とする。AC 上に、 $\angle DBC = \angle ACB$ となるような点 D をとることができる。このとき、△DBC は二等辺三角形となり、 $DB = DC$ 。したがって $AC = AD + DC = AD + DB > AB$ となり、逆も成立する（辺及び角について、大きいか、等しいか、小さいかのいずれかのみであり、二等辺三角形の定理を考慮すれば、逆は改めて証明する必要がないことがわかる。これについては円周角の定理の逆のところで議論した転換法を適用している。）

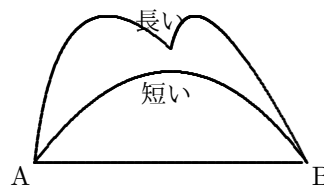
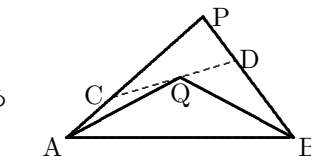
△PAB の辺 AB の長さを固定し、直線 AB の一方の側で点 P が動くとする。点 Q はその一つで、△PAB の内部にあるとする。Q を通る直線と線分 PA、PB との交点を C、D とする。このとき $AP + PB = AC + CP + PD + DB$

$$> AC + CD + DB = AC + CQ + QD + DB > AQ + QB$$

となる。したがって、A から B への一点だけの寄り道は「内側」であるほど短くなる。勿論、線分 AB は最短経路になっている。

（こうした議論は、A から B への最短経路は線分 AB であるという「証明」を与えたものではないことに注意。『中学数学発展』を参照してください）

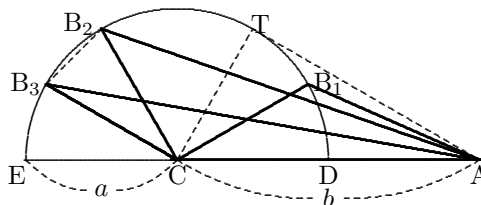
同様のことを繰り返せば、線分 AB を一辺とする 2 つの多角形において、一方が他方に含まれかつ凸多角形であれば、A から B への経路はそのその内側の多角形に沿う方が短い、と言える。一般の曲線は無数の折れ線で表せるとすると、線分 AB の同じ側にある経路について、内側にある線分 AB を含む凸の閉曲線を描く経路は外側の任意の曲線より短いことになる。



三角形には、全ての角が鋭角の鋭角三角形、直角を持つ直角三角形、鈍角を持つ鈍角三角形の三種類に分類できる。これらと辺の長さとの関係で調べておこう。

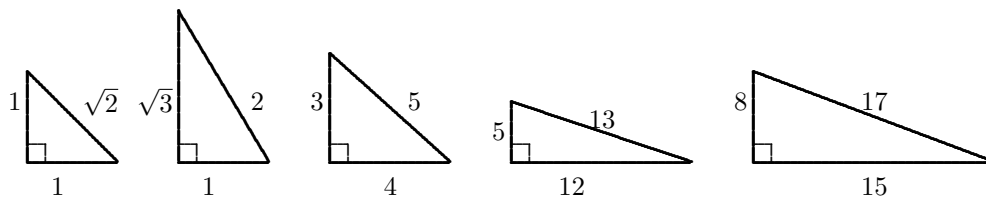
図のような $a < b$ の △ABC について、考察する。点 T は半径 a の円 C への点 A からの接線の接点である。

点 B が点 B_1 のように、点 D から点 T の間で移動する間、 $\angle C$ が増加すると $CB + BA$ は増加する。したがって、 $CB = a$ = 一定だから、 $AB = c$ は増加する。また図のように点 B が B_2 から B_3 のように動くときは、△ AB_2B_3 を考える。 $\angle CB_2B_3 = \angle CB_3B_2$ を考慮すると $\angle AB_2B_3 > \angle AB_3B_2$ となり、 $AB_3 > AB_2$ 。よって B が D を出発して E に至るまで常に $AB = c$ は増加する。

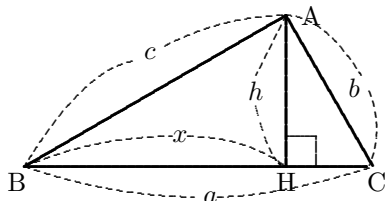


三平方の定理を考慮すると、 $\angle C$ に着目して、 $\angle C < 90^\circ$ では $a^2 + b^2 > c^2$ 、 $\angle C = 90^\circ$ では $a^2 + b^2 = c^2$ 、 $\angle C > 90^\circ$ では $a^2 + b^2 < c^2$ となる。このように 2 辺が与えられたとき、第 3 の辺は 2 辺のなす角の増加関数となる（高校では「余弦定理」によって、一言でこれらの話をすませることができる）。

したがって、2 辺が与えられたとき、2 辺の挟む角が 0 から 180° まで増加するにしたがって第 3 の辺は増加し、鈍角三角形、直角三角形、鋭角三角形、直角三角形、鈍角三角形と変化することがわかる。代表的な直角三角形を記す。



三平方の定理と平方根が利用できるようになった段階で、三角形の3辺の長さ a, b, c から面積が求められるようになる。



$$c^2 - x^2 = b^2 - (a - x)^2 \quad (= h^2)$$

$$\text{より } x = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2a}$$

$$\text{これより } h = \sqrt{c^2 - x^2} \text{ だから}$$

$$S = \frac{1}{2}a\sqrt{c^2 - x^2} \text{ が求まる。}$$

x を代入して整理すると、3辺の長さ a, b, c の三角形の面積 S を求める公式が得られる。

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}, \quad s = \frac{1}{2}(a+b+c)$$

(ヘロンの公式)

上の計算で、キーになるテクニックは、未知数 x を AH ではなく、 BH とすることである。これにより、 x が a, b, c の $\sqrt{\quad}$ を含まない式で表される。ヘロンの公式は対称性が良いから覚えやすい。

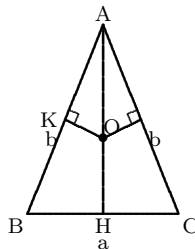
ヘロンの公式から三角形の面積が求まる。この意味を考えておこう。三角形は3辺が与えられると確定する。このことから、三角形の合同条件の「三辺相等」が得られた。したがって、三角形の3辺が与えられれば、その三角形の全ての性質が決まる(求められる)ということである。それでは、他の三角形の合同条件から、例えばその三角形の高さや面積を求める公式が導かれても良いのではないか。これは高校の数学の楽しみに残しておこう。

【例題 1】 「底辺が a 、2辺が b の二等辺三角形の外接円の半径 R を求めなさい。」

図で $\triangle AOK \sim \triangle ABH$ より $R : \frac{b}{2} = b : \sqrt{b^2 - (\frac{a}{2})^2}$

これより $R = \frac{b^2}{\sqrt{4b^2 - a^2}}$ となる。

(一般の三角形の外接円の半径は複雑となり、高校で学習する。)



【例題 2】 「図のように、 $\triangle ABC$ の2頂点 A, C を通る円をかき、円周が辺 AB, BC と交わる点をそれぞれ D, E とする。 $AD=DE=6\text{cm}$ 、 $DB=8\text{cm}$ 、 $BE=7\text{cm}$ のとき、次の各問に答えよ。」

(1) 線分 EC の長さを求めよ。

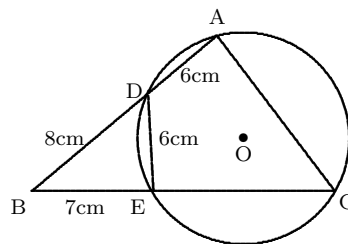
(2) 線分 CD の長さを求めよ。

(3) 円 O の半径を求めよ。

(1) は 方べきの定理をもちいて、 9cm

(2) は、 $\triangle DBE$ で、 D から BE に垂線 DH を引いて、 DH, HE を求め、 DC を計算する。 12cm

(3) は $\triangle BDE \sim \triangle BCA$ より $AC=12\text{cm}$ 。 $\triangle CAD$ は底辺が 6cm 、2辺が 12cm の二等辺三角形となり、 $CO = \frac{8\sqrt{15}}{5}\text{cm}$



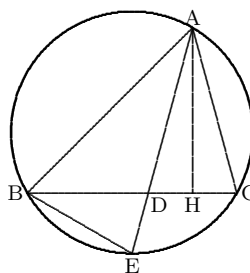
【例題 3】 「図のように、 $AB=12, BC=10, CA=8$ である $\triangle ABC$ が円に内接している。 $\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を D 、円と交わる点を E とし、 A から辺 BC に垂線 AH を引く。このとき、次の問いに答えよ。(10 年度洛南高)

(1) CH の長さを求めよ。

(2) BD の長さを求めよ。

(3) AD の長さを求めよ。

(4) $\triangle ABE$ の面積を求めよ。

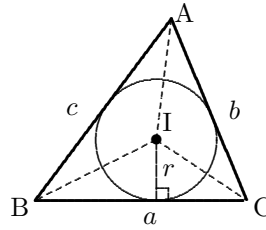


(1) $CH=x$ とし、方程式を作る。 $CH=1$ 、(2) 角の2等分線の定理を用いて、 $BD=6$ 、(3) $AH=3\sqrt{7}$ 、 $DH=3$ をもちいて、 $AD=6\sqrt{2}$ 、(4) $\triangle ABD=9\sqrt{7}$ 、 $\triangle DBE$ と $\triangle DAC$ は相似で、相似比 $6:6\sqrt{2}$ 、 $\triangle DBE = \triangle DAC \times (\frac{6}{6\sqrt{2}})^2 =$

$3\sqrt{7}$ 、よって、 $\triangle ABE = 12\sqrt{7}$

3 辺が与えられれば、面積が求まった。したがって、
内接円の半径と面積の関係

$S = rs$, r : 内接円の半径
が活きてくる。これより、3 辺が与えられると、常に内接円の半径が求まることになる。



上の公式は次のように導ける。

$$S = \triangle IBC + \triangle ICA + \triangle IAB$$

$$= \frac{1}{2}ar + \frac{1}{2}br + \frac{1}{2}cr = r \cdot \frac{a+b+c}{2} = rs$$

同様の考察により、4 面体の内接球の半径 r と 4 面体の体積 V の関係が得られる。

4 面体の各面の面積を S_1, S_2, S_3, S_4 とし $S = \frac{S_1 + S_2 + S_3 + S_4}{3}$ とおくと

$$V = rS$$

となる。

内接球の存在は簡単に理解できる。内心の定理 (三角形の 3 つの内角の二等分線は、一点で交わる) の証明では、角の二等分線上の点は 2 辺から等距離にあることを使って、それぞれの角の二等分線の交点が一致することを証明した。しかし、 $\triangle ABC$ の $\angle A$ の 2 辺に接する円を少しずつ大きくしていけば、必ずどこかで辺 BC にも接する円となるはずであり、これが三角形の内接円である。これは「図形を動的にとらえる」ことである。これを 4 面体に適用すればよい。4 面体 $A-BCD$ において、 $\triangle ABC$, $\triangle ACD$, $\triangle ADB$ に接する球を少しずつ大きくすれば、必ずどこかで $\triangle BCD$ にも接する球が得られる。これが内接球である。

三角形の外接円の半径は、高校では「正弦定理」によって簡単に求めることができる。その考えを、例で示そう。

【例題 4】 「図のような $\angle A = 60^\circ$, $BC = 4$ の三角形の外接円の半径を求めよ。」

外接円の中心を点 O とし、 B を通る直径を BD とする。

$\angle D = 60^\circ$ より、 $BD:BC = 2:\sqrt{3}$ 。これより $BD = 4 \times \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{8\sqrt{3}}{3}$

こうして、 $\angle A$ が、 $30^\circ, 45^\circ, 60^\circ, 120^\circ, 135^\circ, \dots$ などの三角形の外接円の直径は簡単にもとまる。

また、応用上よく出てくる次の「中線定理」(パップスの中線定理と呼ばれる) が成り立つ。

「 $\triangle ABC$ の辺 BC の中点を M とすると、 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$ 」

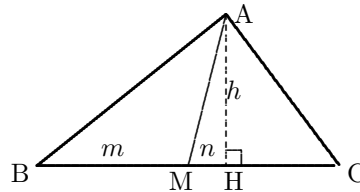
右図において、 $AH = h$, $BM = m$, $MH = n$ とおくと、

$$AB^2 + AC^2 = \{h^2 + (m+n)^2\} + \{h^2 + (m-n)^2\}$$

$$= 2(h^2 + m^2 + n^2)$$

また $AM^2 = h^2 + n^2$

したがって、 $AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$



1 つだけ、例題を考えておこう。

【例題 5】 「 $\triangle ABC$ の重心を G とするとき、次の式が成り立つ。

$$AB^2 + AC^2 = BG^2 + CG^2 + 4AG^2$$

辺 BC の中点を M とし、 $\triangle ABC$ に中線定理を適用すると

$$AB^2 + AC^2 = 2(AM^2 + BM^2)$$

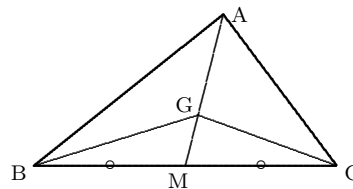
同様に $\triangle GBC$ に適用すると

$$GB^2 + GC^2 = 2(GM^2 + BM^2)$$

これらより、 $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + BG^2 + CG^2 - 2GM^2$

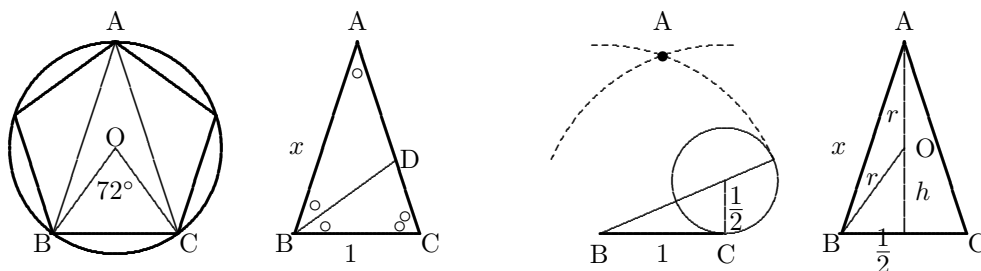
G は重心だから、 $AM = \frac{3}{2}AG$, $GM = \frac{1}{2}AG$

これを代入して、 $AB^2 + AC^2 = BG^2 + CG^2 + 4AG^2$



4.4 正多角形と円周率

円周率がいくらになるか、について正多角形を用いて調べてみよう。
はじめに正五角形の復習をしておく。∠Aが36°の二等辺三角形ABCの∠Bの二等分線がACと交わる点をDとする。△ABC ∽ △BCDである。BC=1, AB=xとすると、 $x:1=1:(x-1)$ より、 $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。これを用いて正五角形の作図ができる。



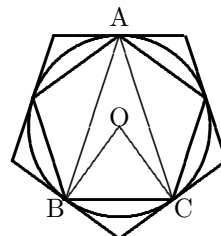
図で、 $(r+h)^2 = x^2 - (\frac{1}{2})^2 = \frac{5+2\sqrt{5}}{4}$, $h^2 + (\frac{1}{2})^2 = r^2$ より $r = \frac{3+\sqrt{5}}{2\sqrt{5+2\sqrt{5}}} = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$

一辺1の正五角形の外接円の半径は $r = \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$, 外接円の外接正五角形の一辺は $h:1 = r:l$ より $l = \frac{r}{h} = \sqrt{2(3-\sqrt{5})}$ となる。

円に対して、内接多角形の辺の和 < 円周 < 外接多角形の辺の和より

$$5 \times 1 < 2\pi \times \sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}} < 5 \times \sqrt{2(3-\sqrt{5})}$$

$$2.938 < \pi < 3.633$$



東大入試で、円周率の問題が出題されて話題になった。円周率が3.05より大きいことを証明せよ、という問題だ。

筆者が高校生に出題するとすれば、「 $3.10 < \pi < 3.16$ を四則・開平のみが使える百均電卓を用いて、証明せよ。」となる。

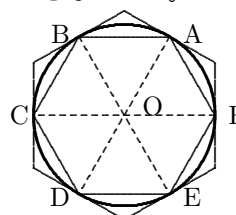
上の問題は、中学生向きだ。

円周率 π が 3.1415... であることは誰でも知っている。それを無反省に使って各種の計算を行っているが、そもそも円周率とは何なのか、を良く理解しておくことが大切だ、という趣旨の問題だ。一時、小学生には $\pi = 3$ でもかまわない、となっていたが、その意味、あるいはどこまで正確な数を用いればよいのか、普通の分数や小数と違いがあるのか、など π の問題は多くの数学的な理解の材料になる。円周率とは「円の直径に対する円周の割合」だった。正五角形ではこれに答えることができなかった。

簡単な場合として、正六角形 ABCDEF を考え、1辺 AB は長さを 1 とする。

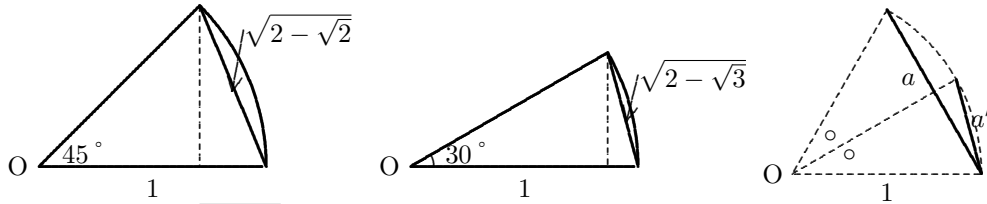
$$6 < 2\pi \times 1 < 6 \times \frac{2}{\sqrt{3}}$$

したがって $3 < \pi < 3.464$



上に述べたことは、一辺が1の6個の正三角形を頂点を1点に並べると正六角形ができ、また全ての正多角形はその頂点を通る外接円が描けるが、正六角形の周の長さは正六角形の外接円の半径の6倍、すなわち直径の3倍だということだった。この場合円周率を3とみなすことは円周を正六角形の外周と見なしたことになる。このように π の近似値として有効数字を何桁まで用いるかということは、どういう性質まで計算に反映させるか、ということと結びついており、計算によって何を知りたいのかによって桁数は選択する必要がある。さて、 $\pi = 3$ はずいぶん粗い近似だ。面積で考えても半径1の正三角形の面積は $\sqrt{3}/4$ だから正六角形の面積は $3\sqrt{3}/2 = 2.598\dots$ となり、単位円の面積 π に遠く及ばない。正五角形、正六角形の議論から、円周率の π の範囲が辺の数が増えるにしたがって狭まっていくことに気が付く。それは、三角形の性質のところで確認した2点を結ぶ曲線の長さについての性質から明らかなことである。更に辺の数を増やしていけば、必ずどこかに収束する。多角形は円周に近づいて行くから、結局正しい円周

率に近づくと予想できる。円周率が3.05より大きいことを正多角形で言おうとすると、次に扱いやすいのは正八角形である。



正八角形の周回は $8\sqrt{2-\sqrt{2}} \approx 6.123$, したがって円周率は3.061と見なしたことになる。多角形の外周は外接円の円周より短いことは各弦の長さは対応する弧の長さより短いことからわかり、円周率は3.05より大きいことが証明できたことになる。面積では $2\sqrt{2} \approx 2.828$ となり証明できない。正十二角形の外周は $12\sqrt{2-\sqrt{3}}$ となり円周率は $6\sqrt{2-\sqrt{3}} \approx 3.1058$ と見なしたことになる。多角形の辺の数を増やせばより3.1415... に小さい方から近づく。

この計算をもう少し見通しよくしておこう。

半径1の円に内接する正 n 角形の一辺を a とする。正 $2n$ 角形の一辺 a' は $a' = \sqrt{2(1 - \sqrt{1 - (\frac{a}{2})^2})}$ となる。そこで正 n 角形の一辺を a_n とすると、 $a_{2n}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_n^2}$ となる。

例えば、正六角形から始めるとする。 $a_6 = 1$ だから $a_{12}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_6^2} = 0.2679\dots$, $a_{12} = \sqrt{a_{12}^2} = 0.5176\dots$, $\pi \approx a_{12} \times 12/2 = 3.105\dots$, 次に a_{12}^2 を用いて $a_{24}^2 = 2 - \sqrt{4 - a_{12}^2}$ から π の近似値を求める。また、半径1の円に外接する正 n 角形の一辺を b_n とすると、 $b_{2n} = \frac{4}{b_n}(\sqrt{1 + b_n/4} - 1)$ となる。これより、 π の値の大きい方から π に近づけることもできる。こうして、電卓の精度が許す範囲でいくらかでも簡単に精度を上げることができる。

π の詳しい値は式を使って、コンピュータで何億桁でも求められている。詳しい値を求める式はいくらでもある。たとえば $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \dots$ が知られているが、これを計算していけばいくらかでも正確に求めることができるはずである。現実には2つの課題がある。1つは、何億桁もの有効数字について誤差なく計算を進めるような工夫が必要であること、もう一つは、もっと速く真の値に近づく(収束の速い)式(計算法)を見つけ出すことである。

収束の速い式はいずれも中学生のレベルを超える。「マチンの式」が有名だが、これとて現在の標準的なカリキュラムでは高校3年を待たねばならない。

しかし、大事なことは、円周率は無理数であるということがわかっていることだ(この証明は中学生には難し過ぎます。2003年度阪大の入試に関連する問題が出題された。 $\sqrt{2}$ のときと同じように背理法を用いる)。したがって、円周率を3としても、3.14としても、いずれも近似値であり、図形などの統一的な理解にはそのことを十分考慮した計算が必要になる。中学ではそのため、多くの場合近似値ではなく、 π (パイ)という文字を使って、矛盾が表れないように表現する。図形の性質を明らかにしようとするとき、近似値を用いて考察(数学での考察は広い意味での「計算」する事とほとんど一致する)すると、ほとんど間違った結果になる。

さらに、 π は単に無理数、というだけではない。整数係数の n 次方程式 (n は自然数) の解で表せる数を代数的数、と言ったが、解として表せない無理数を“超越数”と言う。代数的数は可算個あり、数全体は可算集合ではなかったから、超越数の集合も可算集合ではない。 $\sqrt{2}$ は超越数ではなかったが、 π は無限にある超越数の一つだということがわかっている。 π は、小数などで表したとき、 $\sqrt{2}$ などのようなある種の規則性がある数ではなく、ほとんど全く不規則に数字が出てくるのがわかっている。わかりやすい例で見ると、

0.101001000100001000001...

などは循環小数ではないから無理数である。にもかかわらず、非常に簡単な規則性がある。ところが π には明らかな規則性が見つかっていない。小数で表した各桁の数を乱数として用いることができるほどだ。何億桁目の数字は実際計算してみなければわからない、 π の計算がゲームのように競争されているのもそのためである。

第5章 空間図形

5.1 2直線, 平面

空間図形では, 平面図形の考えをいくらかの点で拡張しなければならない。

2直線の関係

(1) 2直線は交わる。

(2) 2直線は交わらない $\left\{ \begin{array}{l} (a) \text{ 同じ平面内にある} \cdots \text{ 2直線は平行} \\ (b) \text{ 同じ平面内でない} \cdots \text{ ねじれの位置} \end{array} \right.$

とする。(1)の場合, 2直線の交わる角度が定義される。高校では, (2)の(b)のねじれの位置の場合も直線を平行移動して交わらせたときの角度を2直線のなす角, ということが多い。(2)の(a)は, 空間図形における2直線の平行の定義と見なせる。

「2直線が平行とは, 同一平面内であって, 交わらない2直線」

となる。単に「交わらない2直線」では, ねじれの位置を含んでしまうからである。

平面を指定するには, それによって平面が一意的に決まる指定方法を採用しなければならない。そのためには, 次のような平面の決定条件が使える。

平面の決定条件

(1) 同一直線上にない3点

(2) 1直線とその上にない1点

(3) 交わる2直線

(4) 平行な2直線

いま, (1)によって同一直線上にない3点のA, B, Cから平面Pが決定されたとする。これは(2)のように, B, Cを通る直線と点Aによって平面Pが決まる, といっても同じことである。点Aは直線ACと直線ABの交点であり, (3)の条件が得られる。また, BC上にない点Aを通り, BCに平行な直線はただ1本だけだから(2)と(4)は同じことになっている。こうして, 4つの平面の決定条件はほとんど同じことを主張しているだけである。

しかし, これが全てではなく, たとえば, 1平面からの距離が一定であれば2平面がきまり, そのどちらかを確定できれば, 平面の決定条件と言える。

5.2 平面と直線

平面と直線は直線が面に含まれるか, 交わるか, 交わらないかのいずれかである。交わらない場合を平行という。

平面Pに平行な直線を l とする。直線 l と平面P上の点Aに対して平面Qが決定される。このとき, 平面Pと平面Qの交線を直線 m とする。直線 m は, 直線 l と面Pは平行だから直線 l と共有点がなく, かつ, 直線 l と直線 m は同一平面内にあるから, 直線 l に平行となる。

〔演習〕 2平面の交線は直線であることを証明せよ。

2平面P, Qの交線を交線ABとし, 交線AB上の任意の点を点Cとする。もし, 点Cが直線AB上になければ, 点Cは交線上の点だから, 平面P上の点であり, 三角形ABCが決定され, これは平面Pと一致する。同様に三角形ABCは平面Qと一致する。平面Pと平面Qは1平面となり矛盾する。

平面と直線が垂直に交わるとは

定義… 直線 l と面Pの交点を通る面P上の全ての直線と直線 l が垂直である。

とする。したがって, ただちに

性質… 直線 l と面Pが直交するとき, 交点を通る面P上の直線は直線 l と垂直に交わる。

が得られる。しかし、

条件・直線 l と面 P が垂直であるためには、交点を通る面 P 上の 2 つの直線と直線 l が垂直である。は自明でなく証明を必要とする。合同を使って、次のように証明できる。

面 P 上において点 H で直線 l と直交する 2 つの直線を m, n とし、 m, n 上の任意の点を A, B とする。 l 上の点を C とし、 l 上に $HC=HD$ となる点 D を点 C の反対側にとる。

(1) $\triangle ACD, \triangle BCD$ はそれぞれ二等辺三角形となる。

(2) $\triangle CAB \equiv \triangle DAB \therefore \angle CAB = \angle DAB$

AB 上の任意な点を E とすると

(3) $\triangle CAE \equiv \triangle DAE \therefore EC = ED$

(4) $\triangle ECD$ は二等辺三角形 $\therefore EH \perp CD$

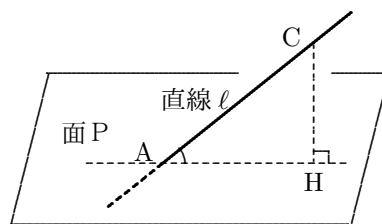
よって交点 H を通る平面 P 上の任意の直線は直線 l に垂直である。

(証明完)

したがって、ある直線 l 上の 1 点で交わる 2 つの直線と垂直に交わっていれば、直線 l はその 2 直線のなす面上の全ての直線と直交する。

面 P 上にない点 C から面 P への垂線 (これを法線という) CH はただひとつだけである。なぜなら、 CH 以外の CH' が存在したとすると、 $\triangle CHH'$ ができるが、 $\angle CHH' = \angle CH'H = 90^\circ$ となることと矛盾する。この CH は、点 C と平面 P 上の点を結ぶ線分のうち、長さが最も短いものである。なぜなら、平面 P 上の任意の点を X とすると、 $\triangle CHX$ は $\angle CHX = 90^\circ$ の直角三角形であり、 CH は全ての CX より短い。この CH の長さを点 C の面 P からの距離とする。

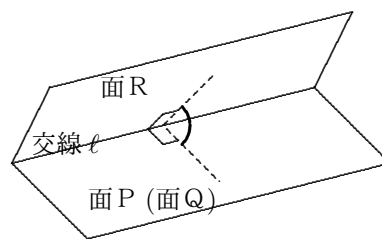
また直線 l と面 P が平行でないとき、その交点を A とし、直線 l 上の一点 C から面 P に引いた垂線と面 P との交点を H とすると三角形 CAH ができ、 $\angle CAH$ を直線 l と面 P のなす角という。直線 l と面 P が垂直に交わっているときはこれが 90 になっている、と考えられる。



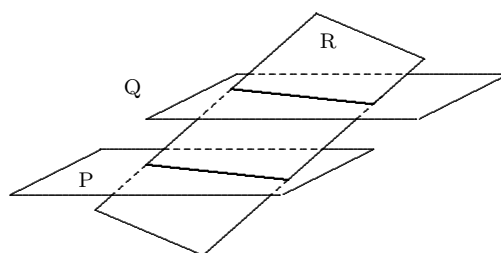
5.3 2 平面

平面と平面の関係は交わるか、交わらないか、のどちらかである。交わらないとき、これを平行という。2 平面が平行のとき、一方の平面上の点から垂線を引けば、他方の平面に垂直に交わる。その 2 つの点を結ぶ線分の長さを 2 平面の距離、という。平行な 2 平面の距離はどこで測っても一定である。なぜなら、一方の面 P の点 A を通る面内の任意の直線を l とし、点 A を通る面 P に垂直な直線と面 Q との交点を B とする。点 B を通り直線 l に平行な直線 m は面 Q に含まれ、したがって、平行な 2 直線の距離はどこで測っても同じだから、平面 P, Q の距離はどこで測っても同じとなる。

2 平面 P, Q が重なっており、その面内の直線を l とする。平面 Q を直線 l を軸に回転した面を平面 R とする。このとき、直線 l は平面 P と平面 R の交線といい、その回転角を 2 つの平面のなす角という。2 つの平面の交線は直線であり、2 つの平面のなす角は、交線上の点を通り、2 平面内の交線に垂直な 2 つの直線のなす角である。



平行な 2 平面 P, Q に第 3 の平面 R が交わったとき、その 2 つの交線は平行となる。なぜなら、2 つの交線は第 3 の面 R 内にあり、かつ平行な面 P, Q 内にあるから、共有点がない、すなわち平行である。



〔問題〕 $AB=3, BC=4, CA=5, AD=3$ であり、側面が全て長方形の三角柱 $ABC-DEF$ と、1 辺の長さが 3 の正四面体 $OPQR$ がある。次の問に答えよ。(東大寺学園高 15)

- (1) 三角柱の頂点 B から辺 AC に引いた垂線と辺 AC との交点を H とする。このとき、 BH の長さを求めよ。
- (2) 図 1 のように、正四面体の面 PQR と三角柱の面 ABC が平行で、三角柱の頂点 B が正四面体の辺 OQ 上にあり、正四面体の辺 OP, OR がそれぞれ三角柱の辺 AC と交わっているとす。このとき、2 つの立体の共通部分の体積を求めよ。
- (3) 図 2 のように、正四面体の辺 PR と三角柱の辺 AC が平行で、正四面体の頂点 O が三角柱の面 $ADFC$ に含まれ、三角柱の頂点 B が正四面体の辺 OQ 上にあり、正四面体の辺 OP, OR がそれぞれ三角柱の辺 AC と交わっているとす。このとき、2 つの立体の共通部分の体積を求めよ。

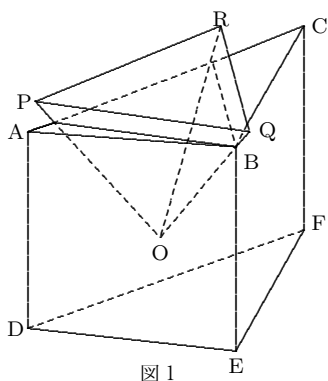


図 1

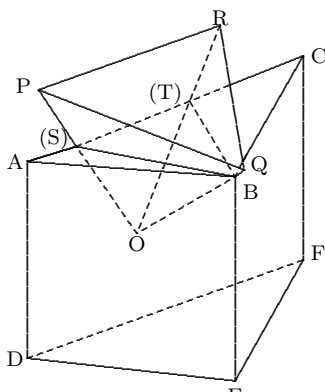


図 2

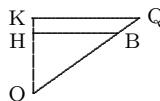
3. 2 節「多角形の面積」を参照してください。時間をかけて考察すれば、複雑ではあるが基礎的な良問であることが分かります。

(1) $BH = \frac{12}{5}$

(2) 正四面体 $O-PQR$ の体積は $\frac{9\sqrt{2}}{4}$, 重なった正四面体の

1 辺の長さは $\frac{8\sqrt{3}}{5}$ これらより, $\frac{128\sqrt{6}}{125}$

(3) Q から OH への垂線と OH との交点を K とすると,



$OK = \sqrt{3}$ これより, $QK = \sqrt{6}$

よって, $OB = \frac{36}{5\sqrt{6}}$ $OH = \frac{12}{5\sqrt{2}}$

これらより, $ST \times OH \times \frac{1}{2} \times BH \times \frac{1}{3} = \frac{96\sqrt{3}}{125}$

5.4 多面体, 正多面体

平面だけで囲まれた空間図形を多面体という。通常、多面体の面の任意の 2 点を結ぶ直線が多面体の他の面と共有点がないとき、これを凸多面体という。多面体は 4 面体 (三角錐) に分解できる。

多面体については次の定理が成り立つことが分かっている。

オイラーの多面体定理

$$(\text{面の数}) + (\text{頂点の数}) - (\text{辺の数}) = 2$$

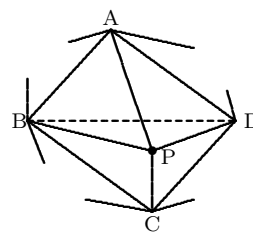
$$(F - E + V = 2)$$

面の数 : F , 稜線 (辺) の数 : E , 頂点の数 : V である。

考え方だけ説明しておこう。

右図は多面体の一部だとする。頂点 P を取り除くと、 $\triangle PAB, \triangle PBC, \triangle PCD, \triangle PDA$ の 4 つがなくなり、 $\triangle ABD, \triangle CBD$ が増えるから面の数の増減は $2 - 4 = -2$ 個、 PA, PB, PC, PD の 4 つの辺がなくなり新たに辺 BD ができるから辺の数の増減は $1 - 4 = -3$ 個、頂点は -1 個の変化となる。したがって

{(面の数) - (辺の数) + (頂点の数)} の変化 = $(-2) - (-3) + (-1) = 0$
 (この議論を一般的に行うためには、例えば $\triangle ABP$ を切り開いて、各辺の長さを変更しながら一番外側が $\triangle ABC$ である平面図形に変形して、平面図形の辺や面、頂点の数を減らしていく。この作業のはじめには面が一つ減っている。)



こうした作業を 4 面体まで行い、4 面体では

$$(\text{面の数}) - (\text{辺の数}) + (\text{頂点の数}) = 4 - 6 + 4 = 2$$

(平面図形にしておくと、三角形まで変形することができる。三角形では $1 - 3 + 3 = 1$, その後で、はじめの面 1 個を加える)。この議論は、一筆書きの議論と結びついている。(興味がある人は、少し古いですが、矢野健太郎著、「数学の考え方」講談社現代新書を見て下さい。)

正多面体の定義

正多面体とは、以下の 2 つの条件を同時に満たす凸多面体である。

- (a) どの面もみな合同な正多角形である。
- (b) どの頂点にも面が同じ数だけ集まっている。

正多面体は、正四面体、正六面体、正八面体、正十二面体、正二十面体の 5 種類あり、それ以外にない。

5種類以外にないことを初等的に確認しておこう。

いま正多面体は正 n 角形からなり、1つの頂点に N 個の面が集まっているとする。正 n 角形の内角の大きさは

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n}$$

であり、これらが N 個集まって1つの頂点をつくっており、凸多面体の条件から、

$$\frac{(n-2) \times 180^\circ}{n} \times N < 360^\circ \quad \therefore (n-2)N < 2n$$

$n \geq 3, N \geq 3$ を考慮すると

$$3 \leq N < \frac{2n}{n-2}$$

となる。この不等式をみたす整数 n, N のすべての組を求めてみる。 n の必要条件として、分母をはらって

$$3(n-2) < 2n \quad \therefore 3 \leq n < 6$$

が得られる。したがって、不等式の解は

$n = 3$ のとき、

$$3 \leq N < 6 \quad \therefore N = 3, 4, 5 \text{ (正四面体, 正八面体, 正二十面体)}$$

$n = 4$ のとき

$$3 \leq N < 4 \quad \therefore N = 3 \text{ (正六面体)}$$

$n = 5$ のとき

$$3 \leq N < 10/3 \quad \therefore N = 3 \text{ (正十二面体)}$$

以上によって正多面体はあるとすれば上の5種類以外にないことが解った。しかし、これだけでは不十分である。それぞれには、何種類かの正多面体があるかもしれないからである。

ところが、正多面体の場合、

面の数： F 、稜線(辺)の数： E 、頂点の数： V とすると、

$$2E = nF \quad \cdots \quad (1)$$

$$2E = NV \quad \cdots \quad (2)$$

の関係があり、オイラーの多面体定理

$$F - E + V = 2 \quad \cdots \quad (3)$$

との連立方程式を解くと、

$$E = \frac{2}{2/n - 1 + 2/N}, \quad F = \frac{4}{2 - n + 2n/N}, \quad V = \frac{4}{2N/n - N + 2}$$

が得られる。

n, N を与えると E, F, V も決まり、多面体の全ての性質が一意的に決まることになる。したがって、正多面体は、5種類のみが存在する。

ユークリッドの『原論』の正多面体の記述は不十分で、スティーヴン・ワインバーグは「科学の発見」(日本語版は2016年出版)のなかで、上の考えで、正多面体が5種類のみが存在することを証明している。ワインバーグは、電磁気力と弱い力を統合するワインバーグ=サラム理論を完成させ、1979年にノーベル物理学賞を受賞した。彼の科学史も、オリジナリティーに溢れている。

正多面体

正多面体 (F)	正四面体	正六面体	正八面体	正十二面体	正二十面体
正多角形 (n)	3	4	3	5	3
辺の数 (E)	6	12	12	30	30
頂点の数 (V)	4	8	6	20	12
1つの頂点に集まる面の数 (N)	3	3	4	3	5

上の表は、覚えにくいから、以下の式で、計算することにすればよい。

正多面体の面の数、頂点の数、辺の数の関係がある。

$$(\text{辺の数}) = (1\text{つの面の辺の数}) \times (\text{面の数}) \div 2$$

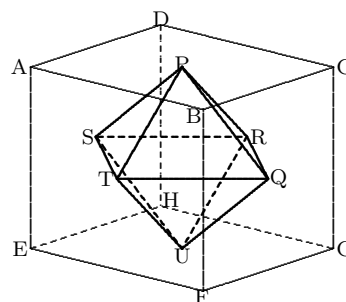
$$(\text{頂点の数}) = (1\text{つの面の頂点の数}) \times (\text{面の数}) \div (1\text{つの頂点に集まる面の数})$$

正多面体のうち、正十二面体、正二十面体を発見したのはピタゴラス学派の人たちだと言われている。正八面体は、正六面体の各面の中心を結んでできる面で切り取ると作成できることから、直ぐ正八面体までは容易にイメージすることができる。

次の問題をやっておこう。

〔例題1〕 「図のような立方体の各面の中心を頂点とする立体を作ったとき、次の各問に答えよ。

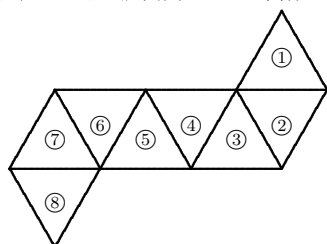
- (1) この立体 PQRSTU の名前を書け。
- (2) 立方体の1辺が 10cm のとき、辺 PQ の長さと、四角形 QRST の面積を求めよ。
- (3) 立方体と立体 PQRSTU の体積の比をもとめよ。(東大寺学園高)



- (1) 正八面体, (2) PQ = $5\sqrt{2}$ cm, 面積 50cm^2 , (3) 6 : 1

正八面体の一辺の長さを a とすると、表面積 $\dots 2\sqrt{3}a^2$, 体積 $\dots \frac{\sqrt{2}}{3}a^3$ である。

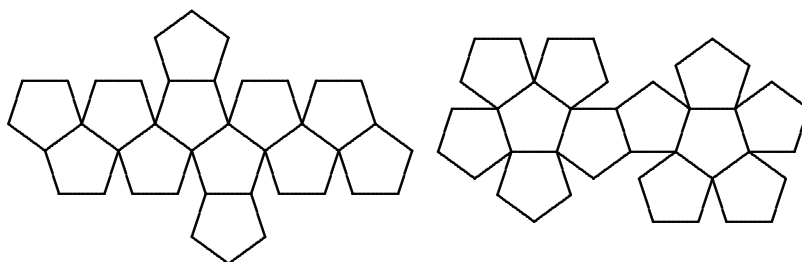
〔問題〕 「下の展開図から正八面体のサイコロを組み立てたとき、1の面と平行な面の数字を答えなさい。」



答えは⑧である。① ② ③ ④が上蓋, ⑤ ⑥ ⑦ ⑧が下蓋で, ④と⑤が繋がっている, \dots とイメージすればよい。よく分からなければ、同じ展開図を書いて、切り抜く。もし問題用紙に傷を付けてもかまわなければ、それを切れればよい。急には空間のイメージを描けるようにはならない。許される範囲で、自分の全ての能力を活用して、問題に全力投入する、という姿勢が重要だ。

正十二面体、正二十面体は適切な展開図を描いて、切り取ることではじめてすっかり認識できたのではないだろうか。最も代表的な展開図を下に示しておく。各自一度は自分でそれぞれの多面体を作成しておくべきだろう。

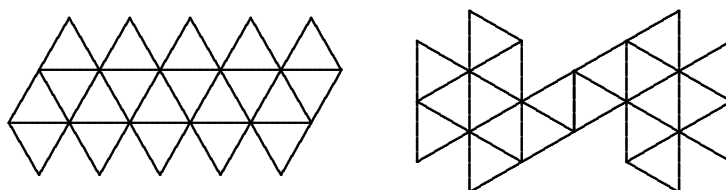
下の2つの正十二面体の展開図はどちらも同じ位の分かり易さだろう。



(参考) 正十二面体の表面積、体積は複雑で、一辺の長さを a とすると

表面積 $\dots 3\sqrt{25 + 10\sqrt{5}}a^2$, 体積 $\dots \frac{15+7\sqrt{5}}{4}a^3$ である。

同様に、2つの正二十面体の展開図を示しておく。



(参考) 一辺の長さを a とすると

表面積 $\dots 5\sqrt{3}a^2$, 体積 $\dots \frac{5}{12}(3 + \sqrt{5})a^3$

である。正二十面体は乱数さい(乱数発生に利用)などに使われる。

5.5 空間図形の表現、展開図と最短距離

1 見取り図

無限の遠方の特定の方向に視点を置いて図形の要素を表現した図をいう。尚、見える線は実線、見えない線は破線などで表現する。影などはつけない。平行な辺は見取り図でも平行になる。

見取り図は、空間図形の見た目の姿に近く、具体的なイメージをつかむのに適している。

有限の距離から見た図も見取り図ということもある。いわゆる遠近法で描かれた図だ。この場合は、平行線は必ずしも平行線にはならない。有限の距離から光を当てた時の投影図である。これを厳密に扱う数学を「射影幾何学」という。射影幾何学は我々が学んでいるユークリッド幾何学を拡張し、幾何学の広い世界へと結びつける重要な役割を果たした、とされている。

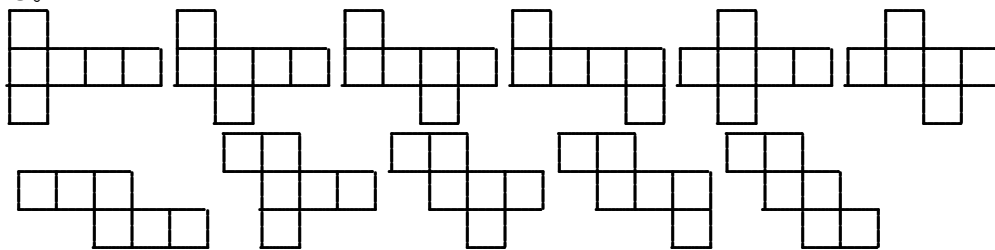
2 展開図

空間図形の各面に注目し、それを平面に表したものが展開図である。

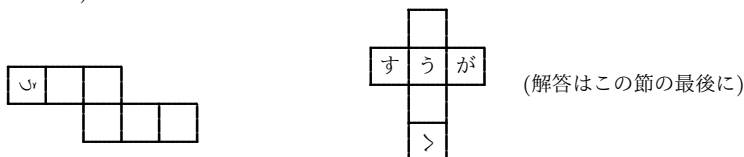
全ての空間図形は展開図が描けるわけではなく、よく知っているように、球のような立体では、厳密な意味での展開図は描けない。したがって、地図ではいろいろな表現法（図法）が使われる。

展開図によって各面を作れば、空間図形が組み立てられる。したがって、紙などによる工作で空間的な広がりのある物体を作るときは展開図を描けばよい。

よく知っているとおり展開図は1つだけではない。立方体の展開図は次の11通りあることが知られている。



〔演習1〕 図のような2つの展開図を組み立てたとき、同じ立方体になるようにしたい。左の展開図に文字を書き入れなさい。(13, 東洋大姫路高)



(解答はこの節の最後に)

〔演習2〕 図1のように、頂点および中点を結んで4本の線が書き込まれた立方体がある。図2は、その立方体を展開したものである。残りの線を書きなさい。

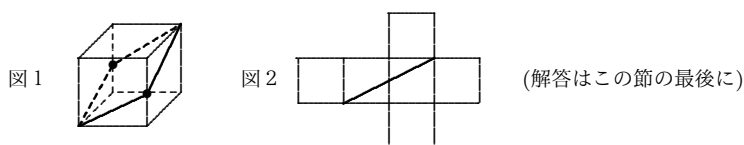


図1

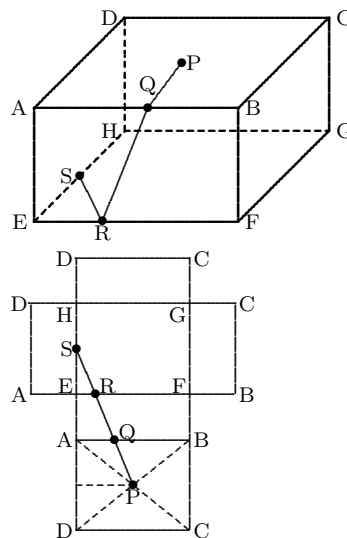
図2

(解答はこの節の最後に)

中学では、最短距離の問題は全て平面上の2点間の距離の問題に還元される。したがって、空間図形の表面上の2点間の距離の問題は必ず展開図で考えることになる。簡単な問題で確認しておこう。

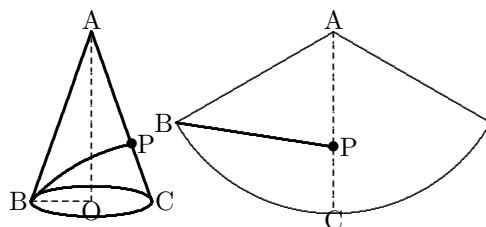
〔例題1〕 図は $AE=4\text{cm}$, $EF=10\text{cm}$, $EH=8\text{cm}$ の直方体で P は AC と BD の交点, S は EH の中点である。

- (1) P から AB 上の点 Q , EF 上の点 R を経て S に至る最短距離はどれほどになるか。
- (2) そのときの AQ , ER の長さはいくらか。



- (1) 右図のような展開図を描く。最短距離 PS は $PS = \sqrt{5^2 + 12^2} = 13(\text{cm})$
- (2) $AQ = \frac{10}{3}(\text{cm})$, $ER = \frac{5}{3}(\text{cm})$

〔例題 2〕 図のように底面の半径 OB が 2cm , 側面の辺の長さ AB が 6cm の円錐で, 底面で点 B と反対側の点を C とし, AC 上の 3 等分点の C に近い点を P とする。円錐上の曲線で B, P を結ぶ最短距離の長さはいくらか。



側面の展開図を描く。最短距離は線分 BP の長さである。 $\angle BAP = 60^\circ$, $AB = 6\text{cm}$, $AP = 4\text{cm}$ より, $BP = 2\sqrt{7}$, $2\sqrt{7}\text{cm}$ 。

よく知っているとおり, 球面の展開図は書けない。球面上の 2 点を結ぶ最短距離は, 各点を通る 2 つの半径にはさまれた扇形の弧の長さになっている。北半球の同じ緯度の 2 点ならば, その弧はより高緯度に傾く。

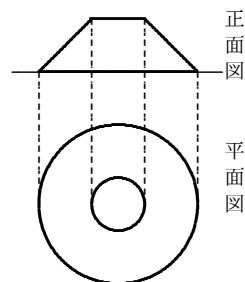
3

投影図

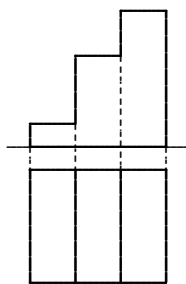
住宅や機械部品などの図には投影図がよく用いられる。

投影図は空間図形を真正面から見た正面図と真上から見た平面図を対応する点が横方向に同じところにくるように一つの面に上下に並べたものである。右の図は円錐台の投影図である。

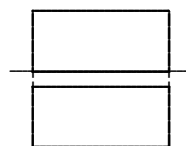
投影とは真正面や真上などから光を当ててできる影 (かげ) という意味である。正面図, 平面図とその位置関係だけから, 空間図形の全てを読みとれ, という考えである。しかし, それだけでは明確に区別できない場合があるので, 真横から見た図 (側面図) を追加することもある。



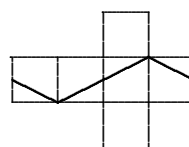
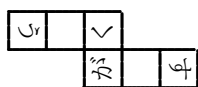
〔問題〕 次の投影図で表される立体の見取り図をかけ。



〔問題〕 次の投影図で予想される立体の見取り図をかきなさい。(2つ書こう)



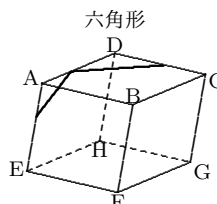
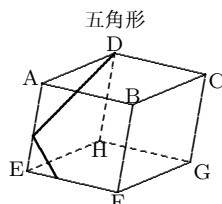
(展開図演習の解答)



5.6 空間図形の平面による切断 … 延長法

まず, 教科書 (中学校数学 1 数研出版) の問題に答えておきます。

「図は立方体を平面で切ったときの切り口の一部です。切り口が五角形, 六角形になるとき, その切り口を完成させなさい。」



単純な事実を用います。

「同一直線上にない 3 点は平面を決定する。」

「平面上の 2 点を通る直線上の全ての点は, その平面上にある。」

さらに, 重要な定理も用います。

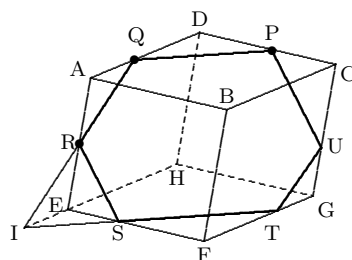
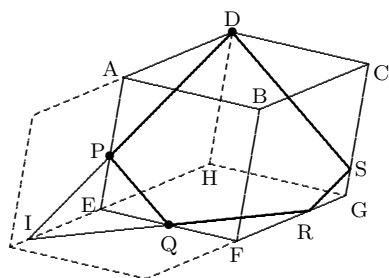
「平行な平面を第 3 の平面で切断すれば, 切断によってできた 2 つの直線 (交線) は平行である。」

2 つの平面が並行とは, 共有点がないことです。したがって, 第 3 の平面との 2 つの交線には共有点はありません。空間図形で 2

直線が平行とは、同一平面内であって、共有点がないことです。第3の平面との2つの交線は、第3という一つの平面内であって、共有点がないのですから、平行です。

五角形は、DPの延長とHEの延長の交点を点Iとする。点Iは平面AEHDと平面HEFG上の点(2つの平面の交線上にある)であり、かつ切断面上の点である。(以後拡張した平面は書かない)。こうしたやり方を「延長法」と呼んでいる。IQとFGの交点をRとする。平面AEFBと平面DHGCは並行であり、一つの平面で平行な2つの平面を切断すれば、2つの交線は平行であることを用いて、点Dを通り、PQに平行な直線とCGとの交点をSとする。五角形PQRSDが得られる。

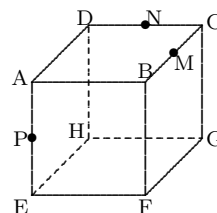
六角形は、始めに、五角形と同様に点Iを求め、続いて、点Iを通り、QPに平行な直線がEF, FGと交わる点をS, Tとする。Pを通り、RSに平行な直線とCGとの交点を点Uとする。六角形PQRSTUが得られる。



2012年度入試で、以下の問題が出題されました。

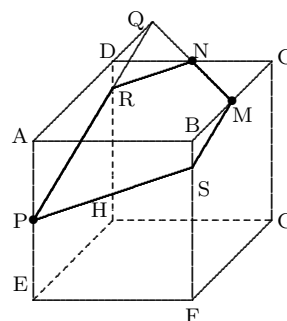
「1辺の長さが6cmの立方体で、点M, Nはそれぞれ辺BC, CDの中点です。いま点Pが辺上の点であるとして、次の間に答えなさい。(羽衣学園高)

- (1) 点PがAとEの間にあるとき、3点P, M, Nを通る平面でこの立方体を切れば、切り口の図形はどんな多角形になるか、その名前を言いなさい。
- (2) 点Pが辺AEの中点のとき、線分PMの長さを求めなさい。
- (3) 点Pが辺CG上にあつて、 $CP:PG=2:1$ のとき、三角錐P-CNMの体積を求めなさい。」



(1), (2)をまとめて考える。まず、延長法によって、作図する。

- ① MNの延長とADの延長の交点を点Qとする。点Qは平面ABCD上の点で切断面上の直線MNと平面AEHDとの交点である。
- ② Q, Pは切断面上の点より、QPは切断面内の直線である。QPとDHの交点を点Rとすると、点Rは切断面と辺DHの交点になる。
- ③ Pを通り、RNに平行な直線とBFとの交点を点Sとする。面DHGCと面AEFBは平行だから、2つの平行面を第3の平面で切断すると、2つの交線は平行になるからである。
- ④ 5角形PSMNRを描く。



$PB^2 = 6^2 + 3^2$, $PB \perp CB$ (証明を復習しておこう)より

$$PM^2 = PB^2 + MB^2 = 6^2 + 3^2 + 3^2 = 54,$$

$$PM = 3\sqrt{6} \text{ (cm)}$$

この問題は、中途半端で、本来、PRやRNの長さ、5角形PSMNRの面積などが問われる。そのとき、初めて、切断面を求めた値が出てくる。例として、RPを求めて見比べてみる。

NはDCの中点より、 $DQ=CM$, MはCBの中点より $CN=3\text{cm}$, よって、 $QD=3\text{cm}$ 。

$\triangle QDR$ と $\triangle QAP$ の相似比は1:3。

$$PR = PQ \times \frac{2}{3} = \sqrt{9^2 + 3^2} \times \frac{2}{3} = 3\sqrt{10} \times \frac{2}{3} = 2\sqrt{10} \text{ (cm)}.$$

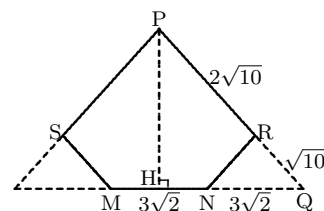
また、五角形PSMNRの面積も求めて見よう。

$$PH = \frac{3}{2}\sqrt{22},$$

五角形PSMNR

$$= 9\sqrt{2} \times \frac{3}{2}\sqrt{22} \times \frac{1}{2} \times \left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2\right\} = \frac{21\sqrt{11}}{2} \text{ (cm}^2\text{)}$$

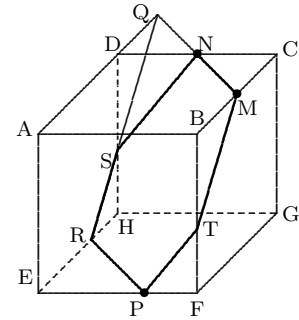
(3)の説明は必要ないと思われます。



$$\begin{aligned} \text{三角錐 P-CNM} &= \triangle \text{CNM} \times \text{PC} \times \frac{1}{3} \\ &= 3 \times 3 \times \frac{1}{2} \times 4 \times \frac{1}{3} = 6(\text{cm}^3) \end{aligned}$$

さて、もう少し延長法を練習しておきます。点PがEF上にある場合は以下のようにすれば良い。

Pを通り、MNに平行な直線とEHとの交点をRとする。QRとDHの交点を点Sとする。Mを通り、SRに平行な直線とBFの交点を点Tとする。六角形PTMNSRを描く。



もっと分りにくい場合もある。下図のように、点P, Q, Rを通る平面での切断を考える。点P, Q, Rがそれぞれ互いにねじれの位置になる3直線EF, CG, AD上にある。手続きは次のとおりである。

① Cを通りPGと平行な直線と、直線PQの交点Sを求める。

PG//CSより、直線CSは面ABCD内の直線であり、点Sは直線PQと面ABCDとの交点である。すなわち、Sは切断面上の点であり、面ABCD上にある。

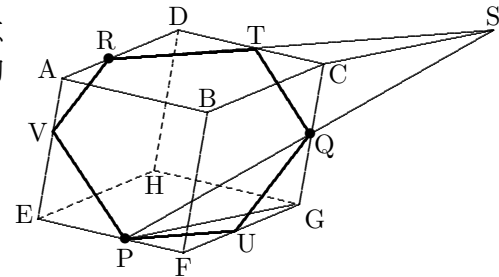
② RSとDCの交点を点Tとする。

③ Pを通りRTに平行な直線とFGとの交点を点Uとする。

④ Rを通りQUに平行な直線とAEとの交点を点Vとする。

⑤ 六角形PUQTRVPを描く。

これを用いた計量問題を多数作ることができますが、将来出題されるかどうかは分かりません。



立方体を平面で切断したとき、切断面の形が

正三角形, 二等辺三角形, 一般の三角形

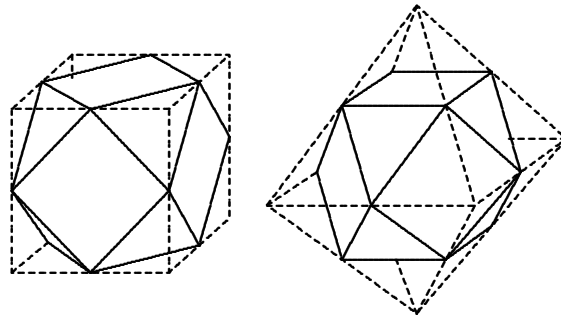
正方形, 長方形, 菱形, 平行四辺形, 等脚台形, 一般の台形

五角形

正六角形, (対辺が平行な) 六角形

などとなるのはどんな場合か、を調べておこう。

多面体を切断して別の多面体を作ることもある。右図は、立方体および正八面体の切断によって、同じ形の多面体を作る場合である。ただし、これは正多面体ではない。



サッカーボールは12個の正五角形と20個の正六角形を組み合わせて作られている。正二十面体は正三角形が20個で出来ており、頂点の数は12個だった。一つの頂点に集まる辺の数は5本だったから、その頂点から、各辺の辺の長さの $\frac{1}{3}$ の点を通る面で切断すると切断面はもとの正三角形の $\frac{1}{3}$ の辺の正五角形になる。これが12個できる。切り取られない面はもともと20個あったから、もとの面の正三角形の $\frac{1}{3}$ の辺を1辺とする20個の正六角形ができる。

こうしたサッカーボールの形を「切頂二十面体」という。外面は牛革、内面は牛の膀胱を用いたことから、パキスタンで主に生産されていた。現在では外部パネルは人工皮革が用いられ、プロペラ状のパネル6枚とローター状のパネル8枚から構成されたより球状に近いボールが用いられ、している。「日本サッカー協会」の規格では、球形、皮革または適切な材質、外周は68-70cm、重さは試合開始時に410-450g、空気圧0.6-1.1気圧、などとなっている。

『16年度版へ追加』次の問題(一部改題)が、2016年度立命館守山高で出題された。

サッカーボールは、正二十面体の全ての頂点を各辺の三分の一のところを通る面で切り落としてできる正五角形と残った正六角形からなる多面体である。正五角形の面の数を求めなさい。

円柱の軸に平行でない面による切断面は楕円である。楕円は中学では取り扱わないから、切断面の面積などは問わない。ただし、体積は対称性から、円柱の体積の半分であることが利用できる。

円錐をいろいろな面で切断すると、切断面が楕円の場合、双曲線の場合、放物線の場合のいずれかであることが分かっている。従って、これらの曲線を総称して「円錐曲線」という。円、放物線以外の場合の計量は中学では扱わない。

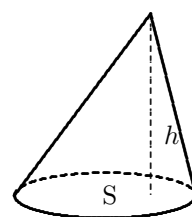
5.7 錐体の体積

はじめに結論を書く。

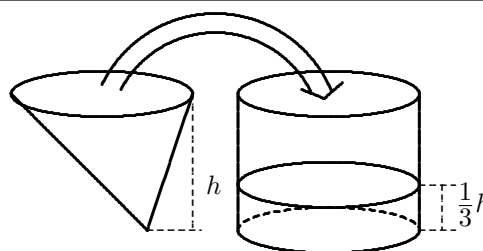
錐体の体積 V は、底面積を S 、高さを h とすると

$$V = \frac{1}{3}Sh$$

である。

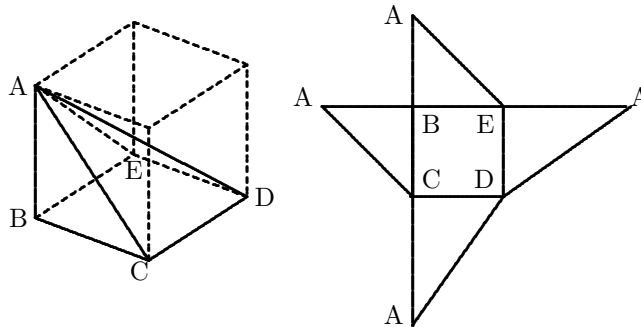


一般的には高校2年になるとこれを簡潔に証明できるから楽しみにしてほしい。通常は、円錐形の容器いっぱいの水を、同じ底面積の円筒形の容器に移すと、水面の高さが3分の1になる、という実験で納得することになる。塾生はこれをもう少し数学的に理解しておく。



立方体の1面を底面とし、その上にない頂点を頂点とする四角錐 A-BCDE を考える。

紙の上に四角錐の展開図を描き、これを切り取り、四角錐を折りあげる(塾では1年生の時に学習する、必ず一度は自分で実行して下さい、立方体の1辺の長さは5 cm程度として下さい)。これを3個よせると立方体ができる。即ち底面の正方形の1辺の長さが1 cm、高さが1 cmの四角錐の体積は $\frac{1}{3}\text{cm}^3$ となる。



ここから思考実験になる。この四角錐を底面に平行な多くのスライスに切る。もう一つこれを作り、面積の広いものから順に重ねると、底面は元の四角錐と同じで高さが2倍の四角錐状の立体ができる。スライスの厚さを十分薄くすればこれは高さが2倍の四角錐であり、体積は2倍になっていることがわかる。これを3個の四角錐に行えば、体積は3倍になる。こうして四角錐の体積は高さに比例することがわかる。

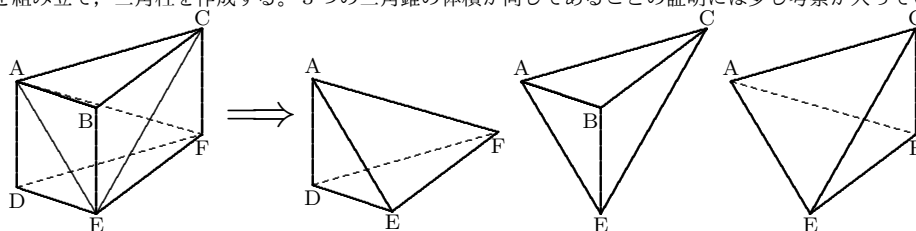
つぎに底面積 1 cm^2 で高さが任意の四角錐を粘土状の物質でつくり、四角錐を高さは変えないで底面の形状を正方形から任意の形状に変えた錐体に変形することができる。これは四角錐を前と同じく薄いスライスに切断したとしたら、断面積は頂点からの距離の2乗に比例し、形状によらないことによる(相似な図形の面積比は相似比の2乗に等しい)。こうして底面の形状が任意の 1 cm^2 で高さが $h\text{ cm}$ の錐体の体積は $\frac{1}{3}h\text{ cm}^3$ であることがわかる。

つぎに同じ錐体2個を、頂点と底面を共通にして1つの錐体を作るように変形すると、底面積が2倍になると体積が2倍になることが分かり、錐体の体積が底面積 S に比例することも理解できる。こうして、公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ が証明できた。

底面の正方形の1辺の長さを2cm, 3cm, 4cmと増加し、それぞれの底面の差を底面とする錐体の体積や、対称性からその半分の底面からなる錐体の体積を計算することにより、錐体の体積は底面の形状によらず底面積に比例することが確認できる。

多くの平面図形の面積の計算は三角形の面積の公式から出発している。それは、どんな平面の図形も小さな三角形を積み重ねて表すことができるからである。同様の理由で、空間図形の体積の計算は元をたどれば、公式 $V = \frac{1}{3}Sh$ から出発していることが多い。

もう少し話の筋を短くした説明も可能である。任意の三角柱は、図のように体積の等しい3つの三角錐に分解することができる。底面の三角形の形状は任意だが、側面は全て長方形になっている。3つの体積が等しい三角錐の展開図を書いて、切り抜き、三角錐を組み立て、三角柱を作成する。3つの三角錐の体積が同じであることの証明には少し考察が入っている。



三角柱の体積は底面積 S 、高さ h とすると、 Sh だから、三角錐の体積は $V = \frac{1}{3}Sh$ となる。このとき、三角柱の底面は任意の形状の三角形、高さは任意だから、一般に底面に垂直な辺を持つ三角錐の体積は $V = \frac{1}{3}Sh$ であることが分かったことになる。さらにもう少し巧妙に錐体の体積を求めることもできる。

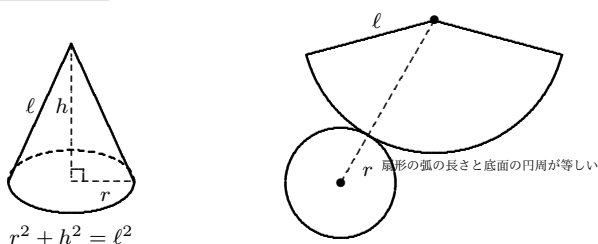
高さ h 、底面積 $S(h)$ の錐体の体積 $V(h)$ は、 Δh を任意の微小量 ($|\Delta h/h|$ が十分小さい) とすると、
 相似な図形の体積比は相似比の3乗より $V(h + \Delta h) = \left(\frac{h + \Delta h}{h}\right)^3 V(h) = (1 + 3 \cdot \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta h}{h})$ の高次の項 $V(h)$

また一方、
 $V(h + \Delta h) = V(h) + hS(h) \cdot \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta h}{h}$ の高次の項

よって、
 $\{3V(h) - hS(h)\} \frac{\Delta h}{h} + \frac{\Delta h}{h}$ の高次の項 = 0 従って、 $V(h) = \frac{1}{3}S(h)h$

『中学数学発展』には級数の考えに基づく錐体の体積の求め方も示している。いずれも中学数学の範囲で理解可能な求め方である。

補足 円錐



展開図の扇形の中心角: x°
 $2 \times \pi \times l \times \frac{x}{360} = 2 \times \pi r$
 $r = \frac{x}{360}l, x = 360 \times \frac{r}{l}$

円錐の表面積: $S(\text{cm}^2)$
 $S = \pi r^2 + \frac{1}{2} \times l \times 2 \times \pi \times r$
 $= \pi r(r + l)$
 円錐の体積: $V(\text{cm}^3)$
 $V = \frac{1}{3}\pi r^2 h$

5.8 球の計量

半径 r の球の表面積 S 、体積 V は

$$S = 4\pi r^2$$

$$V = \frac{4}{3}\pi r^3$$

である。

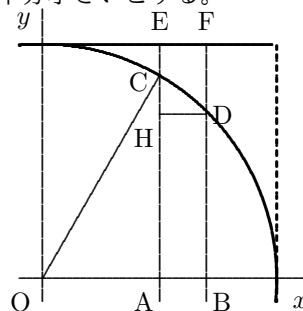
これを証明しておこう。

半径 r の球をすっぽり包む円筒を考える。図はそれを円筒の軸 (x 軸) に垂直な方向から見たものである。球を x 軸に垂直な面で切断して厚さの薄い円盤を作ったとする。切断の中は十分小さいとする。

球面は円盤の側面、弧 CD を軸の周りに回転してできる円形の帯を加え合わせたものと考えられる。この帯の円の半径は AC で、帯の長さは $2\pi \times AC$ となるから、帯の面積は $2\pi \times AC \times (\text{弧 } CD \text{ の長さ})$ となる。

CD が十分小さいとき、弧 CD は直線と見なせ、 $OC \perp CD$ と見なせる。このとき、 $\triangle OAC \sim \triangle CHD$ 、よって $AC:HD = OC:CD$ 、

$AC \times CD = HD \times OC$ となる。面の間隔 AB が十分に小さいとき、弧 CD は弦 CD と等しく、結局帯の面積は $2\pi \times OC \times HD = 2\pi r \times EF$ となる。



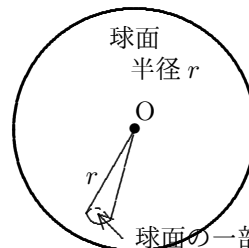
すなわち、線分 EF を x 軸の周りに回転した帯の面積と同じになる。これらの帯の面積を加え合わせると円筒の側面積になる。すなわち球の表面積は円筒の側面積に等しくなる。

よって、 $S = 2\pi r \times 2r = 4\pi r^2$ となる。

別の証明もいくつかある。また、筆者の大学の同級生（現在 79 歳）は、この証明を見て、これとほぼ同じであるが、もっと分かりやすい説明をしてくれた。「知的創造的能力」育成に備えて、より簡潔な証明が要請される。

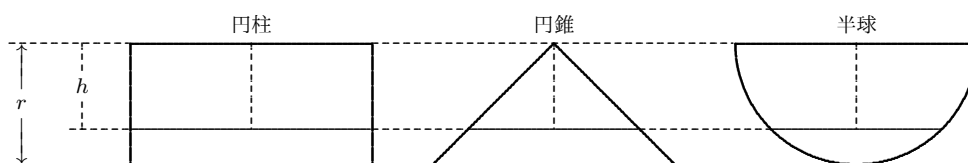
次に、半径 r の球の体積を求めよう。

これは簡単で、錐体の体積の公式から直ぐわかる。球を頂点を球の中心に持つ小さな「錐体」（ただし底面は球面の一部）に分けたとする。一つ一つの錐体の体積は $\frac{1}{3}r \times$ (小さな球面の一部の面積) となる。これを加え合わせれば $\frac{1}{3}r \times$ 球の表面積 $= \frac{1}{3}r \times 4\pi r^2 = \frac{4}{3}\pi r^3$ となる。



もっと論理的に明確でわかりやすい球の体積の求め方が知られている。中学生は、以下の方法を基礎に、球の計量を学習することを推奨する。

底面の半径 r 、高さ r の円柱、底面の半径 r 高さ r の円錐、半径 r の半球を図のように描く。



上から h のところでの断面積はそれぞれ、 πr^2 、 πh^2 、 $\pi(r^2 - h^2)$ となっている。すなわち (円柱の断面積) - (円錐の断面積) = (半球の断面積) になっている。各 h について常にこれが成り立つから、(円柱の体積) - (円錐の体積) = (半球の体積) となる。球の体積を $V(r)$ とすると $\pi r^2 \times r - \frac{1}{3}\pi r^2 \times r = \frac{1}{2}V(r)$ 、 $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ となる。

さらに、円の面積や錐体の体積を求めるときに用いた 巧妙な方法 で、求め求めることができる。

半径 r の球の体積を $V(r)$ 、表面積を $S(r)$ とし、 Δr を任意の微小量 ($|\Delta r/r|$ が十分小さい) とすると、

相似な図形の体積比は相似比の 3 乗に等しく、 $V(r + \Delta r) = \left(\frac{r + \Delta r}{r}\right)^3 V(r) = (1 + 3 \cdot \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r}$ の高次の項) $V(r)$

また、一方、 $V(r + \Delta r) = V(r) + S(r) \cdot \Delta r + \frac{\Delta r}{r}$ の高次の項

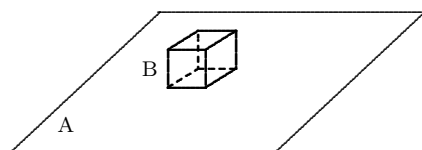
と表せる。したがって、 $\{3V(r) - S(r)r\} \frac{\Delta r}{r} + \frac{\Delta r}{r}$ の高次の項 $= 0$ よって、 $V(r) = \frac{1}{3}S(r)r$

ここで、 $S(r) = 4\pi r^2$ を代入すると $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ が、逆に、 $V(r) = \frac{4}{3}\pi r^3$ を代入すると $S(r) = 4\pi r^2$ が得られる。

中学生には、まず、上記の (円柱の断面積) - (円錐の断面積) = (半球の断面積) を基礎に球の体積 $V(r)$ を求め、それをういて上記の「巧妙な方法」で、表面積 $S(r)$ をもとめる手続きが、最も分かりやすい筋道となるだろう。

いずれにしても注目すべきことは、球の表面積や体積を求めるのには円周や面積の計算で導入した π のような新しい定数を導入することが必要でないだけでなく、図形の知識のみを用いて導くことができるということである。

〔例題 1〕 図のように、平面 A の上に 1 辺の長さが 1cm の立方体 B が置かれている。長さ 1cm の線分 PQ は、平面 A の上部かつ立方体 B の外部を立方体 B の表面と共有点を持ちながら動く。この線分 PQ が通過してできる立体の体積を求めなさい。(灘高 14) 線分 PQ が通過できる立体は



平面 A に含まれない立方体 B の 5 つの面と、それぞれ 1 つの面を共有する、1 辺 1cm の立方体が 5 つ

平面 A に含まれない立方体 B の 8 つの辺をそれぞれ高さとし、半径 1cm で中心角 90° の扇形を底面積とする円柱を 4 等分した立体が 8 個

平面 A に含まれない立方体 B の 4 つの頂点をそれぞれ中心とした、半径 1cm の球を 8 等分した立体が 4 個

合計 $5 + \frac{8}{3}\pi(\text{cm}^3)$

5.9 多面体の計量

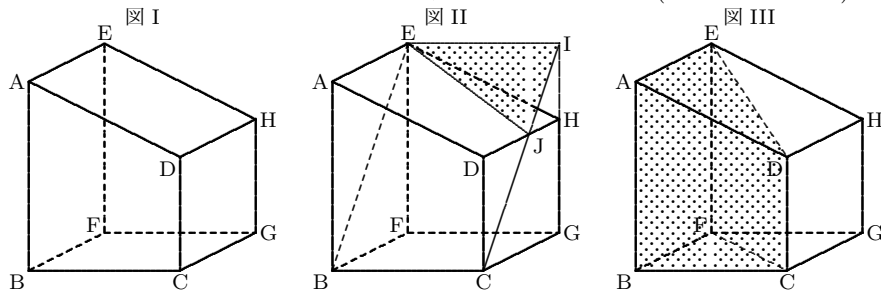
(以下はこの数年改定していない。すでに記した空間図形の計量の理論は正確に理解しておくべきであるが、必ずしも空間図形の計量の演習問題に深入りする必要はない、技能訓練の色合いが強くなるからである。しかし、旧態依然の入試が継続しており、已む無く対策的な記述も継続せざるをえない。以下が無駄だともまでは言っていない。)

一時、高校入試にはあまり出題されていなかったが、近年また出題が増加している。特別の新しいことを要するわけではなく、順次複雑な問題を練習すればよい。特に、大阪府の公立入試では多面体の計量問題がよく出題されてきた。総合力を問うのに適しているからである。塾ではプリントシリーズ「府立の空間図形」によって徹底して解法を練習してきた。それは、手法の習得をめざす、というより3次元空間の特性を感じる、という方が適切な目標と言える。この感覚(感性)を抜きにしては、いずれの問題もかなり難問となる。それは多くの問題に接し、時間を掛けてできるだけそれらしい見取り図を書き、一つ一つ何処に空間図形の原理が機能しているかを点検する事によって培われる。コメント付きで、いくつかの問題の解説を行う。

1 標準的な問題を一つ。説明すべきものは何もない。

図I~図IIIにおいて、立体ABCD-EFGHは四角柱である。四角形ABCDと四角形EFGHは合同な台形であり、 $AB \parallel DC$, $\angle ABC = \angle BCD = 90^\circ$, $AB=5\text{cm}$, $BC=4\text{cm}$, $CD=3\text{cm}$ である。四角形ADHE, DCGH, ABFE, BCGFは長方形であり、 $AE=2\text{cm}$ である。

次の問いに答えなさい。答えが根号を含む場合は、その形のままでよい。(09年大阪府後期A)



(1) 図Iにおいて、

① 次のア~オのうち、辺BCと平行な辺、辺BCとねじれの位置にある辺はそれぞれどれですか。一つずつえらび、記号で答えなさい。

ア 辺 AD イ 辺 BF ウ 辺 DC エ 辺 EH オ 辺 FG

② AとGとを結んでできる線分AGの長さを求めなさい。

(2) 図IIにおいて、Iは、Eを通り辺FGに平行な直線と直線HGとの交点である。このとき、4点E, B, C, Iは同じ平面上にあり、EとB, IとCとをそれぞれ結んでできる四角形EBCIは長方形である。Jは、辺ICと辺DHとの交点である。EとJとを結んでできる $\triangle EJI$ の面積を求めなさい。求め方も書くこと。

(3) 図IIIにおいて、四角柱ABCD-EFGHは平面EFCDによって二つの立体に分けられる。その二つの立体のうち、点Aを含む方の立体の体積を求めなさい。

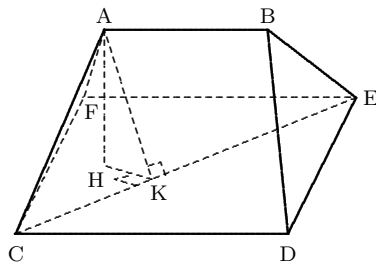
(1) ① (平行な辺) オ (ねじれの位置にある辺) エ ② $3\sqrt{5}$

(2) $IJ = \frac{2}{5}IC = \frac{2\sqrt{29}}{5}$, $\triangle EIJ = \frac{4\sqrt{29}}{5}\text{cm}^2$, (3) $\frac{52}{3}$

2 標準的な入試問題である。

図は、長方形CDEFを底面とする立体で、辺ABは底面に平行であり、 $\triangle ACF$ と $\triangle BDE$ とは、それぞれ、CF, DEを底辺とする合同な二等辺三角形である。 $AB=4\text{cm}$, $CD=8\text{cm}$, $DE=6\text{cm}$ で、頂点Aから底面CDEFに垂線AHをひくと、 $AH=4\text{cm}$ となり、Hから直線CEへ垂線HKをひくと、AKとCEとは直交している。

- (1) この立体の表面積は何 cm^2 か求めよ。
- (2) この立体の体積は何 cm^3 か求めよ。
- (3) この立体を3点A, C, Eを通る平面で切った時の切り口の面積は何 cm^2 か求めよ。
- (4) 点Fから、3点A, C, Eを通る平面へ引いた垂線の長さは何 cm か求めよ。



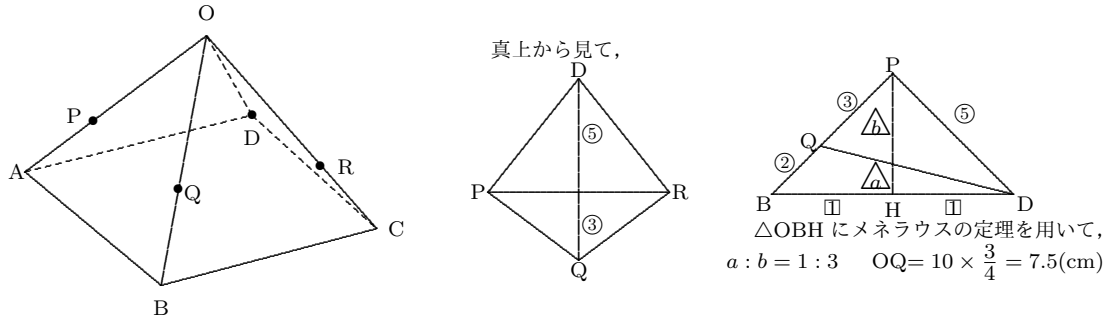
CFの中点をMとすると、 $\triangle AHM$ は直角三角形で $MH=2\text{cm}$, $AH=4\text{cm}$ を用いて $AM=2\sqrt{5}\text{cm}$ となる。また、 $CH=$

$\sqrt{13}$ cm, $AH=4$ cm から $AC=\sqrt{29}$ cm, 従って, 台形 ACDB の高さは 5cm である。MH と対角線 CE との交点を O とすると $\triangle HKO$ は $\triangle ECD$ と相似な直角三角形で, $HO=2$ cm, $HK=\frac{6}{5}$ cm となり, $AK=\frac{2}{5}\sqrt{109}$ cm となる。三角錐 A-CEF の体積は 32cm^3 である。

- (1) $12(9+\sqrt{5})\text{cm}^2$, (2) 80cm^3 , (3) $2\sqrt{109}\text{cm}^2$, (4) $\frac{48\sqrt{109}}{109}\text{cm}$

3 中学入試問題から一題取り上げる。確かにこの程度の問題ならば, 数学の基礎学習をやらなくても, 入試対策さえやれば, 誰でも解けるようになる。

図のような, 辺の長さがすべて 10cm の四角錐 O-ABCD があります。辺 OA, OB, OC 上に点 P, Q, R を (OP の長さ)=(OR の長さ)=cm, (OQ の長さ)=6cm となるようにとると, 3 点 P, Q, R を通る平面上に点 D があります。(灘中学校 2017 年度) (7.5cm)

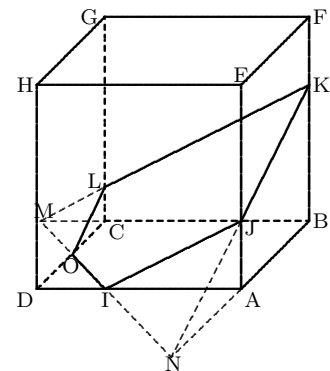


4 平面による切断の問題を考える。当テキストを一通り学習しておけば, 極めて平易な問題だ。

1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある。辺 AD 上に $AI=\frac{2}{3}$ となる点 I を, 辺 AJ= $\frac{1}{3}$ となる点 J を, 辺 BF 上に $BK=\frac{2}{3}$ となる点 K をとる。3 点 I, J, K を通る平面を P とし, 平面 P と辺 CG の交点を L とする。

次の問いに答えよ。

- (1) CL の長さを求めよ。
 (2) 頂点 B から平面 P に下ろした垂線の長さを求めよ。
 (3) 立方体 ABCD-EFGH を平面 P で切った 2 つの立体のうち, 辺 AB を含む方の立体の体積を求めよ。

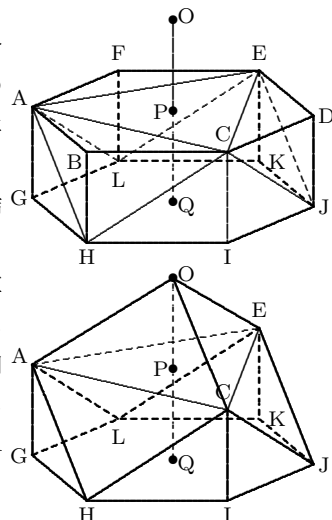


- (1) について, は $KL//JI$ を用いると $CL=\frac{1}{6}$
 (2) について, 延長法の考えを適用して, 三角錐 B-KMN の頂点 B から底面 KMN への垂線の長さと考え。三角錐 B-KMN の体積は $\frac{8}{27}$ 。 $\triangle KMN$ は $\frac{2\sqrt{5}}{3}$, $\frac{2\sqrt{13}}{3}$, $\frac{2\sqrt{10}}{3}$ の三角形だから, $\triangle KMN$ の面積は $\frac{14}{9}$ 。したがって垂線の長さは $\frac{4}{7}$ となる。
 (3) について, 求める立体を四角錐 L-JABK, 三角錐 J-LCO, 五角錐 J-COIAB に分割してそれぞれの体積を求め加え合わせればよい。あるいは, 三角錐 K-MNB から, 三角錐 L-MCO, 三角錐 J-IAN を引けばよい。 $\frac{55}{216}$

5 大阪府公立 (06 年度 府立理数科) の問題を考える。着実な訓練をすれば, 誰でも解ける。やるべきことは多数あり, どこまでやればよいかは, 意見が分かれる。

右の図において, 立体 ABCDEF-GHIJKL は底面が正六角形で, 側面が全て合同な長方形の六角柱であり, $GH=8$ cm である。P は正六角形 ABCDEF の対称の中心であり, Q は正六角形 GHIJKL の対称の中心である。このとき, 直線 PQ は二つの底面に垂直になる。O は, 直線 PQ 上にあって $OP=PQ$ となる点の内 Q と異なる点である。3 点 A, H, C, 3 点 C, J, E, 3 点 E, L, A をそれぞれ結ぶ。 $AG=acm$ とする。

上側の図の六角柱を使い, 三つの四面体 BAHC, DCJE, FELA をそれぞれ直線 AC, CE, EA を軸として回転させ, 3 点 B, D, F を点 P に重ねるとき 3 点 H, L, J は点 O の位置で重なる。下側の図は, そのときできる立体を示しており, 図中の H, J, L は三つの四面体を回転させる前の点の位置を表している。下の図において, O は平面 AHC, CJE, ELA 上にあり, 四角形 OAHC, OCJE, OELA は合同なひし形になる。



次の問いに答えなさい。答えが根号を含む形になる場合はそのままよい。

- (1) 下側の図で、GとQとを結んでできる四角形 OAGQ は、AG//OQ の台形になる。△AGH の内角 ∠GAH の大きさを b° とするとき、台形 OAGQ の内角 ∠OAG の大きさを b を用いて表しなさい。
- (2) 下側の図で、菱形 OAHC が正方形になるときの a の値をも求めなさい。求め方も書くこと。
- (3) 上側の図中の六角柱の体積と下側の図の立体の体積とは等しい。

そこで、次に、表面積について考える。上の図の六角柱の表面積を $S\text{cm}^3$ とし、下側の図の立体の表面積を $T\text{cm}^3$ とするとき、 $a = 3$ の場合の $S - T$ の値を求めよ。

(1) について、∠GAH = b° は $a\text{cm}$ 、 8cm の長方形の対角線と $a\text{cm}$ の辺のなす角だから、∠AOQ = b° 、AG//OQ より、∠OAG = $180^\circ - b^\circ$

(2) について、 $AC = 4\sqrt{3} \times 2 = 8\sqrt{3}(\text{cm})$ 、 $OH = \sqrt{(2a)^2 + 8^2}$ 、菱形 OAHC が正方形になるためには $AC = OH$ 。これより、 $a = 4\sqrt{2}$ 。

(3) について、習慣として、「変化=後の量-はじめの量」で考え、ここでは $T - S$ を求めることを考えよう。

表面積の変化は $T - S = \triangle AHC \times 3 \times 2 - \text{正六角形} - \text{長方形 AGHB} \times 3$

二等辺三角形 AHC の高さは $\sqrt{a^2 + 4^2}$ より、

$$T - S = 8\sqrt{3} \times \sqrt{a^2 + 4^2} \times \frac{1}{2} \times 3 \times 2 - \frac{\sqrt{3}}{4} \times 8^2 \times 6 - 8a \times 3 = 120\sqrt{3} - 96\sqrt{3} - 72 = 24\sqrt{3} - 72$$

よって $S - T = 72 - 24\sqrt{3}(\text{cm}^2)$

6 さらに、その難度にたいする警戒心を喚起するため、古い(87年度)問題を一つ取り上げる。

(空間図形の大阪公立入試数学問題は、永らく、公立・私立を含む全国の高校入試数学の超難問として、毎年ランクされていた。これは全体像を理解するのにかなりの時間を要するという意味で、史上最難問の一つである。出題当時ある民放テレビでは、当日の出題の概説があったが、この問題だけは、それが省かれた。今も、演習問題としては適切な問題であると判断している。類題が出題されれば、極めて平易な問題となる。)

「太陽光線があたっている高層ビルの様子を空間図形についての問題と考えたい。図において、ABCD-EFGH は高層ビルを表す直方体であり、 l, l' は広い道路の両側を示す直線である。 l, l' はともに辺 EF に平行であり、直方体の底面 EFGH を含む水平な平面上にある。M, N はそれぞれ平面 AEFB 上の 2 点 J, K で反射した太陽光線と l, l' との交点である。

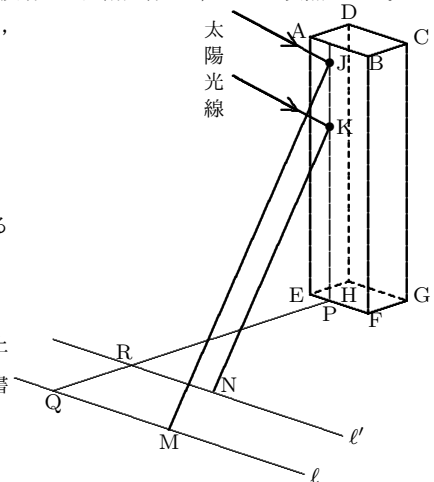
このとき、水平面に立てた長さ 2m の棒の影の長さは 2.5m であった。また、

図は次の (a) から (c) の条件を満たしているものとする。

- (a) P は J, K を通る直線と EF との交点であり、JP//AE である。
- (b) Q, R はそれぞれ P を通り EF に垂直な直線と l, l' との交点である。
- (c) $MQ = 100\text{m}$ 、 $NR = 75\text{m}$ 、 $QR = 60\text{m}$ である。

つぎの問い答えよ。ただし、太陽光線は平行光線、平面 AEFB は鏡の面であるとする。したがって、J, K で反射した光線も平行である。

- (1) PR, JP の長さを求めよ。
- (2) $EF = 50\text{m}$ 、 $FG = 40\text{m}$ 、 $AE = hm$ として底面 EFGH を含む水平な平面上にできる直方体 ABCD-EFGH の影の面積 $S\text{m}^2$ を h の式で表せ。求め方も書け。」



図は元の問題の図をかなり忠実に再現しており、入試でもこれ以上の解説的な図は期待できない。図形、とくに空間図形においてはその全体的な構成をどれだけ正確にイメージできるかがポイントである。計算はやれば誰でもすぐ身に付く。日頃の学習の真価が問われる。

次に、文章が長くなると意味がとりにくいから、データをできるだけ図にしっかり書き込む。問題によっては小問ごとにデータが変わるから、必ず書き込みは濃い目の鉛筆で書き、小問ごとに書き直しができるようにする。そのとき小問の間の連関を確認しておく。前小問は後の小問のヒントになるように構成されていることが多いからだ。また、単位はつけなくて書き込もう。問題ごとにではあるが、単位ははじめから統一しておこう。式で扱うとき、例えば、 $PH = x\text{cm}$ とする、としたとき、計算の段階では $PA : x = 4 : 5$ などの式も容認しよう。回答にはもちろん単位を付けなければならない。要するに、数学的な構造に注意が集中できるように柔軟に対応しよう。単位の取り扱いは、高校の理科を通して、すっきりさせることができるようになる。

(1) に答えよう。PR = $x\text{m}$ 、とおけば、 $PR : PQ = RN : QM$ より $3 : 4 = x : (x + 60)$ 、 $x = 180$ 、PR = 180m。これができない人は、以下を読んでも意味がない。このメモをはじめから読み直してほしい。

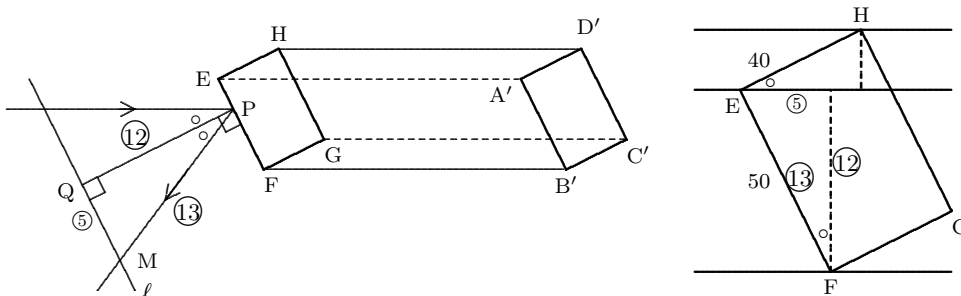
JP を求めよう。EF// l // l' 、EP⊥PQ より、∠PRN = ∠PQM = 90°である。図のイメージと一見違うが、これが事実である

と見えないならばそれは訓練不足だけである。

$$PM = \sqrt{PQ^2 + QM^2} = \sqrt{240^2 + 100^2} = 260. \quad JP = 260 \times \frac{2}{2.5} = 208. \quad JP = 208m.$$

(2) に答えよう。突如として、どうして影の問題が出てきたのか、(1) と何か関係があるのではないかと考えてほしい。それは光の反射の法則と深く関係していたからである。したがって、問題は、影はどのようにできるのか、反射の法則とどう関係しているのか、の理解である。

真上から見た図(平面図)を模式的に書いてみよう。



FB' は FB の影であり、 $FB' = h \times \frac{2.5}{2}$ であり、影の部分は平行四辺形 $FB'D'H$ の面積を求めることと同じになり、結局この平行四辺形の高さを求めたらよいことになる。相似の関係から、

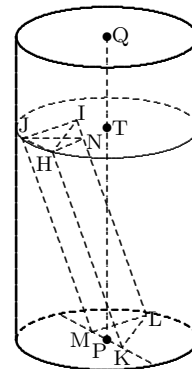
$$\text{平行四辺形 } FB'D'H \text{ の高さは } 40 \times \frac{5}{13} + 50 \times \frac{12}{13} = \frac{800}{13} \text{ となり、 } S = \frac{2.5}{2} h \times \frac{800}{13} = \frac{1000}{13} h \text{ となる。}$$

繰り返すが、計算は極めて簡単であり、全体的な構造を理解することがキーである。その意味で、日常的によく考え、自らの空間的な感性の育成を大切に学習を続けてほしい。

近年の府立の入試問題は随分レベルが落ちている。しかし、これとて君にはかなり難しいのではないだろうか。劣悪な学習環境が君を苦しめる原因になっている。ここまでこのメモを読んできた君にはそれを乗り越える知恵があると確信する。どれだけやれば十分、という基準はない。他の分野とのバランスを考えて少しずつ挑戦して欲しい。努力を続ければ道は必ず開けるだろう。その意味で、これは演習問題としては、優れた問題である。

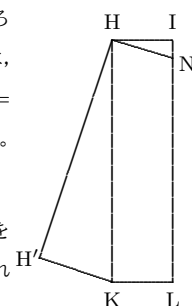
7 次は、2011年度府立後期入試問題の一部である。正答できれば良いが、正答に失敗しても、悩むほどの問題ではない。

「図の立体は、点 P を中心とする半径 3cm の円 P と点 Q を中心とする半径 3cm の円 Q を底面とし、高さが 9cm の円柱である。直線 PQ は底面に垂直である。 T は線分 PQ 上であって、 P, Q と異なる点である。点 T を中心とする円は半径が 3cm であり、円 T を含む平面は円柱の底面と平行である。立体は $HIJ\text{-}KLM$ は三角柱である。 $\triangle HIJ$ は、 $\angle JHI = 90^\circ$, $HJ = HI = 2\text{cm}$ の直角二等辺三角形である。 $\triangle HIJ \cong \triangle KLM$ である。四角形 $HKLI, JMLI, JMKH$ は全て長方形であって、長方形 $HKLI \cong$ 長方形 $JMKH$ である。 $HK = 8\text{cm}$ である。 K, M は円 P の直径上であって、 $KP = MP$ である。 H, J は、円 T の周上にある。このとき、平面 $HKLI$ は円柱の底面に垂直である。 N は、円 T を含む平面と辺 IL との交点である。 N と H, N と J とをそれぞれ結ぶ。このとき、 $\triangle JHN$ は、 $\angle JHN = 90^\circ$ の直角三角形である。三角錐 $I\text{-}JHN$ の体積を求めなさい。」



略解を示しておく。 $\triangle HPK$ は直角三角形だから、 $PH = \sqrt{1^2 + 8^2} = \sqrt{65}$ 。H から底面円 P へ垂線を下ろし、交点を H' とすると、 H' は円 P の周上、かつ HN を含む面 P に垂直な面 $HKLI$ 上にある(上の図では、そのように見えませんが、新聞に掲載された図は、もっと違ってきます)。 $TP = HH' = \sqrt{(\sqrt{65})^2 - 3^2} = \sqrt{56}$ 。また $\angle H'HN = \angle KHI = 90^\circ$ 、したがって $\angle H'HK = \angle IHN$ より $\triangle IHN \sim \triangle H'HK$, $H'K = 2\sqrt{2}$ 。 $IN = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{56}} \times HI$ 。よって、三角錐 $I\text{-}JHN$ の体積 $= \frac{1}{3} \times 2 \times \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{56}} \times 2 = \frac{4}{21}\sqrt{7}$

この問題の特徴は、冗長で、不要な記述が何度も現れる。何が基本的な条件か、分かりにくい。文章をしっかり読んで、空間的な配置を正確に読みとって欲しい。計算は極めて簡単だ。演習問題としては、優れた問題だ。



8 次は、2013年度府立後期入試問題の一部である。最後の問題だから、明確にしておくが、訓練すれば誰でもできる問題であり、入試は、やるべき多くのことを無視して、全ての人にこれを強要する。「競争と選抜」を原理とする入試は、馬鹿を育てるシステムだ。

図 I~図 III において、立体 $A\text{-}BCDE$ は正四角錐である。底面 $BCDE$ は 1 辺の長さが 4cm の正方形であり、 F は底面 $BCDE$ の対角線の交点である。このとき、直線 AF は底面 $BCDE$ と垂直である。

次の問いに答えなさい。答えが根号を含む形になる場合は、その形のままでよい。

図 I

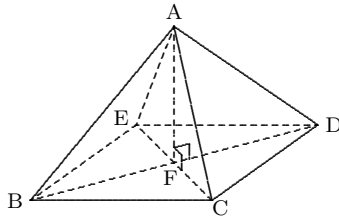


図 II

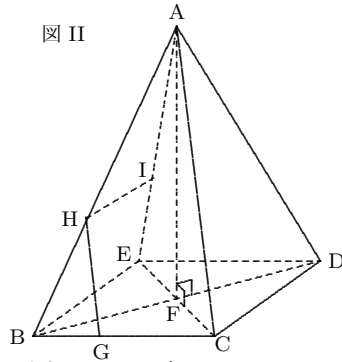
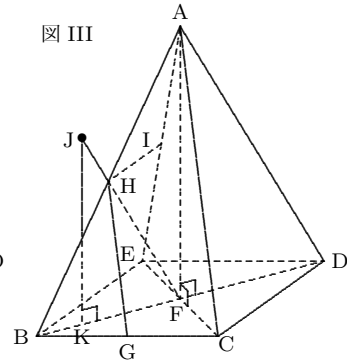


図 III



(1) 図 I において、 $\triangle ABC$ の内角 $\angle BAC$ の大きさを a° とする。

- ① $\triangle ACD$ の内角 $\angle ADC$ の大きさを a を用いて表しなさい。
- ② $a = 60$ のときの正四角錐 A-BCDE の体積を求めなさい。

(2) 図 II, 図 III において、 $AB=6\text{cm}$ である。G は、辺 BC 上において B, C と異なる点である。H は G を通り辺 AC に平行な直線と辺 AB との交点であり、I は H を通り辺 BE に平行な直線と辺 AE との交点である。

- ① 図 II において、 $CG=HI$ であることを証明しなさい。
- ② 図 III は、G が辺 BC の中点であるときの状態を示している。

図 III において、J は、直線 FH 上において H について F と反対側にある点であり、 $HJ=1\text{cm}$ である。K は、J から線分 BF にひいた垂線と線分 BF との交点である。このとき、4 点 J, K, F, A は同じ平面上にあって、直線 JK と辺 AB は交わり、 $JK \parallel AF$ である。線分 JK の長さを求めなさい。

(1) ① $90 - \frac{a}{2}$ (度) ② $\frac{32\sqrt{2}}{3}$ (cm^3)

(2) ① (証明) $HG \parallel AC$ より、 $BC:CG=BA:AH$ よって、 $4:CG=6:AH$ だから、 $CG=\frac{2}{3}AH$ … ⑦

また、 $HI \parallel BE$ より、 $AH:AB=HI:BE$ よって、 $AH:6=HI:4$ だから、 $HI=\frac{2}{3}AH$ … ⑧ ⑦, ⑧より、 $CG=HI$

② 4 点 J, K, F, A は同じ平面上にあることの認識が重要であって、計算は簡単。 $\frac{4\sqrt{7}}{3}$ (cm)

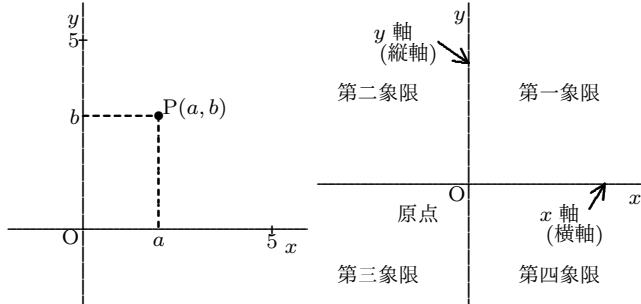
第6章 関数，一次関数

6.1 一次関数，直線の式

一次関数とそのグラフについて，主な事柄をまとめておきます。
 塾には，一次関数の基礎の練習用のプリントが用意されているから，九九のごとく取り扱えるようになっておいて欲しい。

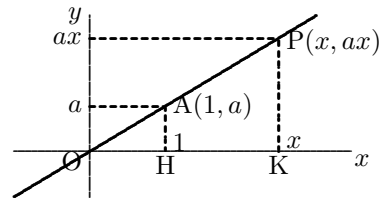
1 座標平面

2つの数直線をそれぞれの原点で縦，横に垂直に交わせ，その交点を座標軸の原点とする。横軸を x 軸，縦軸を y 軸といい，平面上の点 P を点 P から2つの軸に垂線を下ろし，その交点の x 軸の値 a を x 座標， y 軸の値 b を y 座標とし，点 P の座標を $P(a, b)$ と表す。座標と言うときには，必ず $(2, 3)$ のように括弧の中に，コンマで区切って， x 座標， y 座標を書く約束になっている。軸には，矢印をつける人もある。通常，座標平面を確定するためには， x 軸， y 軸，その交点の原点，それぞれの軸のきざみ幅を確定するための数値を示さねばならない。



2 正比例 $y = ax$

比例定数 a の比例のグラフ... 原点を通る直線
 比例のグラフが原点を通る直線であることが全ての出発点である。



座標平面で，点 $A(1, a)$ ， $a \neq 0$ と原点を結ぶ直線上に点 $P(x, y)$ をとる。点 A 及び点 P から x 軸への垂線の交点を H ， K とする。 $\triangle OAH \sim \triangle OPK$ より， $AH:PK=OH:OK$ 。これより， $PK=ax$ となる。すなわち点 P の座標は (x, ax) である。よって， $y = ax$ である。 $(a > 0, x > 0)$ を仮定しているように見えるが，他の場合もそれぞれ同様に証明できる。しかし，例えば， $a < 0$ のとき，線分に向きも考え， AH や PK を負の長さとする，上の証明はこの場合も含んだ証明を与えたことになっている。したがって，原点を通る直線上のすべて点は比例の式 $y = ax$ を満たす。

逆に $y = ax$ を満たす点 $P(x, y)$ は原点と点 $A(1, a)$ を通る直線上にある。
 以上によって，比例の関係 $y = ax$ のグラフは原点を通る直線となる。

小学校では， y が x に比例するとは， x が何倍かに増えると y もその同じ倍数だけ増える，と学習した。これを確かめておこう。

$$y = ax \quad (a: \text{比例定数}) \quad \text{とする。}$$

$x = x_1$ のときの y の値を y_1 ， x が k 倍になったときの x の値を x_2 ， $x = x_2$ のときの y の値を y_2 とする。

$$x_2 = kx_1 \quad \dots (1) \quad y_1 = ax_1 \quad \dots (2) \quad y_2 = ax_2 \quad \dots (3)$$

(3) に (1) を代入すると， $y_2 = akx_1 \quad \dots (4)$ となる。

$$(2) \text{ を用いると，} \quad y_2 = k \times y_1 \quad \dots (5)$$

が得られる。(1)，(5) を比べると， x が k 倍になったとき， y も k 倍になっていることがわかる。

3 中1では、反比例を学習した。(グラフの議論は省略、「グラフの移動」を参照)

$$y = \frac{a}{x} \quad (a \neq 0)$$

と書ける時、 y は x に反比例し、 a を反比例の比例定数という。

小学校では、 y が x に反比例するとは、 x が 2 倍、3 倍、4 倍、… と大きくなると、 y は $\frac{1}{2}$ 倍、 $\frac{1}{3}$ 倍、 $\frac{1}{4}$ 倍、… と小さくなると学んだ。これを確かめておこう。

$$y = \frac{a}{x} \quad (a: \text{比例定数}) \quad \text{とする。}$$

$x = x_1$ のときの y の値を y_1 、 x が k 倍になったときの x の値を x_2 、

$x = x_2$ のときの y の値を y_2 とする。

$$x_2 = kx_1 \quad \dots (1) \quad y_1 = \frac{a}{x_1} \quad \dots (2) \quad y_2 = \frac{a}{x_2} \quad \dots (3)$$

(3) に (1) を代入すると、 $y_2 = \frac{a}{kx_1} \quad \dots (4)$ となる。

$$(2) \text{ を用いると、} \quad y_2 = \frac{1}{k} \times y_1 \quad \dots (5)$$

が得られる。(1)、(5) を比べると、 x が k 倍になったとき、 y は $\frac{1}{k}$ 倍になっていることがわかる。

[問題] $y = \frac{24}{x}$ とする。

(1) $x = 4$ のとき、 y の値を求めよ。

(2) x が (1) から 25% 増加したとする。 x の値とその時の y の値を求めなさい。

(3) (2) の時の y の値は (1) のときの y の値に比べ、何% 増加したか。

$$(1) y = 6 \quad (2) x = 5, y = 4.8 \quad (3) \frac{4.8 - 6}{6} = -0.2, -20\%$$

4 一次関数 $y = mx + n$

mx … x に比例する部分、 n … 定数部分

一次関数は、グラフの言葉で言えば、

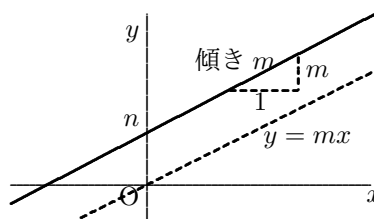
傾き m 、切片 (y 切片) n の直線である

と言える。比例のグラフ $y = mx$ を y 軸方向に n だけ平行移動したものだ。

x が $x = x_1$ から $x = x_2$ に変化するとき、

$$\text{変化の割合} = \frac{(mx_2 + n) - (mx_1 + n)}{x_2 - x_1} = m$$

で一定となる。変化の割合は、 x が 1 だけ増加したときの y の変化量であり、これを (直線の) 傾きという。「一次関数の変化の割合は一定である」、ことがそのグラフが直線である、ということをもたらしている。



5 点 (x_1, y_1) を通り、傾き m の直線

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

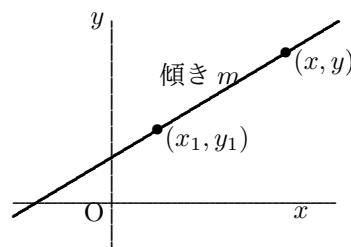
式は、 $x = x_1$ のとき、 $y = y_1$ 、すなわち点 (x_1, y_1) を通り、傾きが m であることを明示している。

傾き m の直線は一般に $y = mx + n$ となるから、これが点 (x_1, y_1) を通るためには、 $y_1 = mx_1 + n$ 、 $n = y_1 - mx_1$ したがって、 $y = mx + y_1 - mx_1$ 。整理して、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ となる。

グラフの平行移動の考えで解釈すると、 $y - y_1 = m(x - x_1)$ のグラフは、比例のグラフ $y = mx$ である直線を、 x 軸方向に x_1 、 y 軸方向に y_1 だけ平行移動したグラフとなっている。

別の見方もできる。この式は $m = \frac{y - y_1}{x - x_1}$ と変形すると、点 (x, y) は点 (x_1, y_1) から変化の割合 (傾き) が m の点の上にあることを示している。

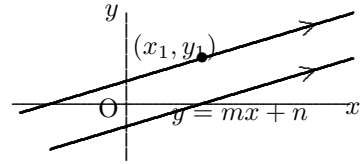
中学では、「関数を求めなさい」とか、「直線の式を求めなさい」とかの問いには全て、「 $y = \dots$ 」の形で書かねばならない。…の中には y を含んではいけない。こうした関数の表現を「関数を陽に表す」という。答えのところは「陽 (explicit)」に書いて下さい。もっとも的確な表現をする、ということ、「答える」、ということとは必ずしも一致しない場合がある。課題の意味を的確に表現する式はまた覚えやすく、間違いも少ない。式の中に豊富な意味を読みとる力をつけて欲しい。



- 6 $y = mx + n$ に平行で、点 (x_1, y_1) を通る直線

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

有限の傾きの場合の平行線では傾きが等しい、というだけである。



- 7 2点 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ を通る直線

直線の傾きは $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ だから

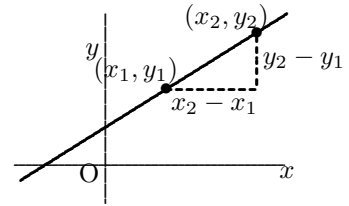
2点を通る直線は、先に傾きを求め、公式3で求める。したがって、

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

などの公式は覚える必要はない。しかし、これを変形した

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

は示唆に富んだ表現である。



たとえば、空間上の2点 $A(x_1, y_1, z_1), B(x_2, y_2, z_2)$ を通る直線の方程式は

$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$ と書けるし、あるいは、これを点 $A(x_1, y_1, z_1)$ を通る方向余弦 (l, m, n) の直線とすると、 $\frac{x - x_1}{l} = \frac{y - y_1}{m} = \frac{z - z_1}{n}$ となる。方向余弦 (l, m, n) は平面での傾きの役割をしている。

l, m, n のいずれかが0の時でも成り立つような形で表すと、

$$x = lt + x_1, y = mt + y_1, z = nt + z_1, t \text{ は媒介変数 (パラメーター)}$$

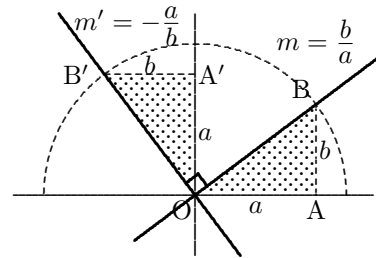
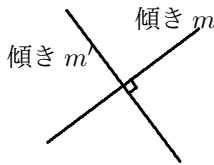
$t = 0$ のとき、 $(x, y, z) = (x_1, y_1, z_1)$ としている。各 t に対応して、 $x(t), y(t), z(t)$ が決まり、空間上の一点が決まる。曲線とはそういうものを想定している。直線や一般の曲線は、こうした一つの媒介変数を用いて、 $(x(t), y(t), z(t))$ と表すことができるものに属する。平面上の点 (x_1, y_1) を通る直線の方程式は

$$x = (x_2 - x_1)t + x_1, y = (y_2 - y_1)t + y_1 \text{ と表せる。}$$

- 8 $y = mx + n, y = m'x + n'$ が直交する

$$m \times m' = -1$$

証明は簡単で、例で示す。傾きが $m = \frac{b}{a}$ で原点を通る直線 OB を 90° 回転させる。原点を中心として、半径 $\sqrt{a^2 + b^2}$ の円を描くと図のように $\triangle OBA$ と $\triangle OB'A'$ は合同となり、 OB' の傾きは $m' = -\frac{a}{b}$ となる。したがって、 $m \times m' = -1$



三平方の定理を用いて、2つの直線の直交条件を求めておこう。点 $B(a, b)$, 点 $B'(a', b')$ とすると、

$$\triangle BOB' \text{ が直角三角形である条件は } (a^2 + b^2) + (a'^2 + b'^2) = (a' - a)^2 + (b' - b)^2 \text{ よって } aa' = -bb'$$

これより、 OB, OB' の傾きは、 $m = \frac{b}{a}, m' = \frac{b'}{a'}$ だから、 $m \times m' = -1$ となる。

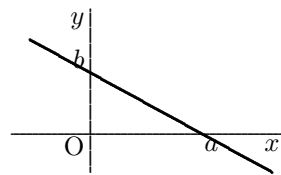
- 9 x 切片 a, y 切片 b の直線

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

$x = 0$ のとき、 $y = b, y = 0$ のとき、 $x = a$ をよく表す式だ。

三次元の平面の方程式が

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1 \text{ と表せることは容易に想像できる。}$$



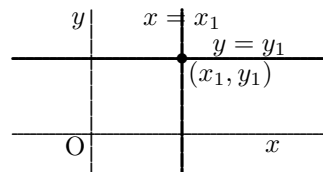
- 10 点 (x_1, y_1) を通り、

$$x \text{ 軸に平行な直線 } \dots y = y_1$$

$$y \text{ 軸に平行な直線 } \dots x = x_1$$

どちらも一次関数ではない。

「直線 \rightarrow 一次関数」ではない。



- 11 数直線上の2点 $A(x = x_1), B(x = x_2)$ の中点 $M(x)$

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

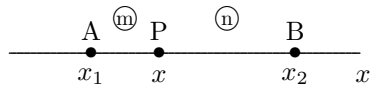
- 12 2点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$ の中点 $M(x)$

$$\left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2} \right)$$

- 13 数直線上の2点A ($x = x_1$), B ($x = x_2$) を

$$m:n \text{ に内分する点 } P(x)$$

$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$



図より, $(x - x_1) : (x_2 - x) = m : n$ だから,

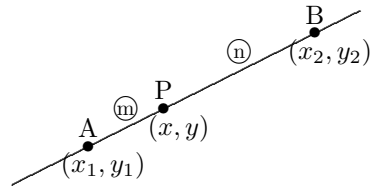
$$x = \frac{nx_1 + mx_2}{m+n}$$

となる。また, $m < 0, n > |m|$ のときは点PがAより左にある外分点, $n < 0, m > |n|$ のときは点PがBより右にある外分点と見なすと, 同じ式が成り立つ。 $x_1 < x_2$ と考えてこれらの式を導いたが, この制限は解除できる。したがって, m, n は内分のときは同符号, 外分のときは異符号で絶対値の小さい方に点Pがある, としておけばよい。

- 14 2点A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) を $m:n$ に内分する点P

$$P\left(\frac{nx_1 + mx_2}{m+n}, \frac{ny_1 + my_2}{m+n}\right)$$

三角形の平行線と相似の関係と前項目の公式から得られる。



〔例題1〕 3頂点A(-2,1), B(3,4), C(6,5) からなる三角形ABCの面積を点Aを通る直線で3等分する。

この2本の直線を求めなさい。

$$\text{BCを}1:2\text{に内分する点} \dots \left(\frac{2 \times 3 + 1 \times 6}{1+2}, \frac{2 \times 4 + 1 \times (-5)}{1+2}\right) = (4, 1)$$

$$\text{BCを}2:1\text{に内分する点} \dots \left(\frac{1 \times 3 + 2 \times 6}{2+1}, \frac{1 \times 4 + 2 \times (-5)}{2+1}\right) = (5, -2)$$

$$\text{したがって, } y = 1 \text{ と } y - 1 = \frac{-5 - 1}{6 + 2}(x + 2). \quad y = 1, y = -\frac{3}{4}x - \frac{1}{2}$$

- 15 $y = mx + n$ の

$$x \text{ 軸に関して対称} \dots y = -mx - n$$

$$y \text{ 軸に関して対称} \dots y = -mx + n$$

$y = mx + n$ の直線 $y = ax + b$ に線対称な直線 $y = m'x + n'$ の一般形は複雑になり, 個別に扱う方がよい。

- 16 点A (x_1, y_1) の点C (a, b) に関して対称な点

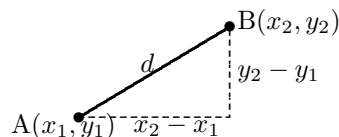
$$P(2a - x_1, 2b - y_1)$$

- 17 直線 $ax + by + c = 0$ に関して, 点A(x_1, y_1)

に対称な点の座標P(x, y) は簡単に求まるが, 一般形は複雑になり, 個別に扱おう。

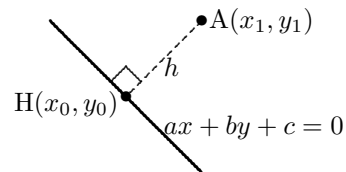
- 18 2点A (x_1, y_1), B (x_2, y_2) 間の距離 d

$$d = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$



- 19 点A (x_1, y_1) と直線 $ax + by + c = 0$ の距離 h

$$h = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$



$a \neq 0, b \neq 0$ とし, 点A (x_1, y_1) から直線 $ax + by + c = 0$ へ引いた垂線の足を $H(x_0, y_0)$ とする。

点 $H(x_0, y_0)$ は直線 $ax + by + c = 0$ 上の点だから,

$$ax_0 + by_0 + c = 0 \text{ したがって, } a(x_1 - x_0) + b(y_1 - y_0) = ax_1 + by_1 + c$$

AHは直線 $ax + by + c = 0$ に垂直だから

$$-\frac{a}{b} \times \frac{y_1 - y_0}{x_1 - x_0} = -1 \text{ したがって, } -b(x_1 - x_0) + a(y_1 - y_0) = 0$$

$$(x_1 - x_0), (y_1 - y_0) \text{ について解いて, } x_1 - x_0 = \frac{a(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}, y_1 - y_0 = \frac{b(ax_1 + by_1 + c)}{a^2 + b^2}$$

$$\text{よって } h = \sqrt{(x_1 - x_0)^2 + (y_1 - y_0)^2} = \frac{|ax_1 + by_1 + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

$a = 0$ のとき, $b \neq 0$ であり, $x_0 = x_1, y_0 = -\frac{c}{b}, h = |y_1 - y_0| = |y_1 + \frac{c}{b}|$ であり, 公式と一致。

$b = 0$ のとき, $a \neq 0$ であり, $x_0 = -\frac{c}{a}, y_0 = y_1, h = |x_1 - x_0| = |x_1 + \frac{c}{a}|$ であり, 公式と一致。

20 三角形 $O(0,0)$, $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$ の面積

$$\Delta OAB = \frac{1}{2}|x_1y_2 - x_2y_1|$$

原点 O から AB への垂線の長さ h は

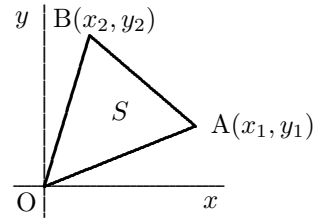
$$h = \frac{|x_1y_2 - x_2y_1|}{\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}} \text{ より, 直ちに得られる。}$$

三角形 $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$ の面積

$$\Delta ABC = \frac{1}{2}|(x_2 - x_1)(y_3 - y_1) - (x_3 - x_1)(y_2 - y_1)|$$

は原点を点 A に平行移動して直ちに得られる。

三角形の面積を求めるだけなら, 図のような場合, 点 A を通る x 軸に平行な直線, あるいは点 B を通る y 軸に平行な直線で三角形を分割すれば 2 つの三角形となり, それぞれの三角形は底辺を元の三角形によって切断された線分の長さとし, 高さも軸に平行で, 簡単に面積は計算できる。



21 角度の相等

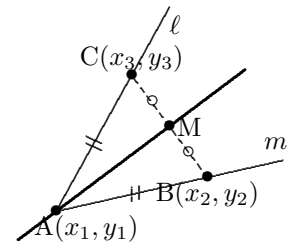
平行線, 平行四辺形, 2 等辺三角形, などの図形の定理の他に, 三角形の合同 (3 辺相等), あるいは三角形の相似 (3 組の辺の比が等しい) を証明する以外に, 中学では, 一般的な角度の相等を主張する有効な原理はない。

22 角の二等分

「二等辺三角形の頂角の二等分線は底辺を垂直に二等分する。」を利用する。

図の 2 直線のなす角の 2 等分線は, $AB=AC$ となる点 B , C の中点 M と点 A を通る直線

角の二等分の方法は, 直線を任意の別の直線に関して対称に移動した直線の方程式を求めるのにも使える。



〔例題 2〕 直線 $l: y = \frac{3}{4}x - 3$ と x 軸のなす角を二等分する直線の方程式を求めよ。

l と x 軸との交点は $A(4, 0)$ である。 x 軸上に, $AB=5$ となる点 $B(9, 0)$ をとる。 $AB=AC$ となる直線上の点は $C(8, 3)$ となる。このとき, ΔABC は二等辺三角形で, BC の中点 P は $P(8.5, 1.5)$ である。したがって, 角の 2 等分線は $y = \frac{1}{3}(x - 4)$ となる。もう一つの角の二等分線はこれに垂直だから, $y = -3(x - 4)$ 。

一般に, 角の二等分線は, 「多角形の面積」 で書いた, 定理,

三角形の頂角の二等分線

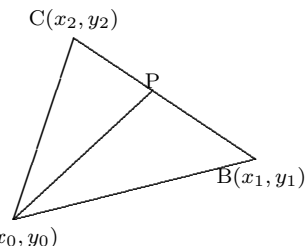
$\angle A$ の 2 等分線と辺 BC の交点を D とすると

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC}$$

逆も成り立つ。

を用いればよい。

図で, $\angle BAC$ の 2 等分線 AP を求めるには, BC を $AB:AC$ に内分する点 P の座標を計算し, AP の方程式を求めればよい。



〔例題 3〕 右図を使って, 「三角形の内心の定理」 を証明しなさい。

(こうした証明を行うことを, 「座標幾何」という。『中学数学発展』でいくつかの例を示す)

$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ の角の二等分線 AP , BQ , CR の方程式を求め, それらが一点で交わることを証明すればよい。図では, $a > 0, b < 0, c > 0$ と想定しているが, かならずしも, 必要ではない。

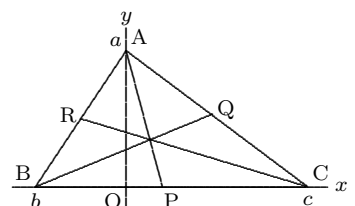
$$P\left(\frac{b\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2}}, 0\right), \quad Q\left(\frac{c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2}+c-b}, \frac{a(c-b)}{\sqrt{a^2+b^2}+c-b}\right),$$

$$R\left(\frac{b\sqrt{a^2+c^2}}{\sqrt{a^2+c^2}+c-b}, \frac{a(c-b)}{\sqrt{a^2+c^2}+c-b}\right)$$

$$AP: y = \frac{-a(\sqrt{a^2+b^2}+\sqrt{a^2+c^2})}{\sqrt{a^2+c^2}+c\sqrt{a^2+b^2}} + a, \quad BQ: y = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}-b}(x-b),$$

$$CR: y = \frac{-a}{\sqrt{a^2+c^2}+c}(x-c)$$

AP , BQ , CR のいずれの 2 直線の交点の x 座標も,



$$x = \frac{b\sqrt{a^2+c^2} + c\sqrt{a^2+b^2}}{\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{a^2+c^2} + c - b}$$

となる。したがって y 座標も一致する。よって、三角形の3つの角の二等分線は一点で交わる。

- 23 点 $P(x_1, x_2)$ の点 $A(a, b)$ の回りの 90° の回転
反時計回りに 90° 回転した点を $Q(x_2, y_2)$ とする。図より

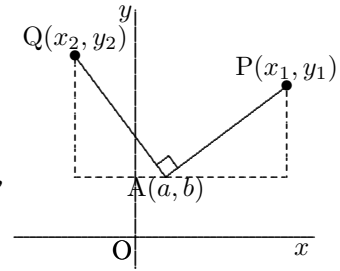
$Q(a - (y_1 - b), b + (x_1 - a))$ となる。

また時計回りは

$Q(a + (y_1 - b), b - (x_1 - a))$ である。

利用するときは、原点を (a, b) に移動してから回転し、元に戻す、ようにすれば、上の公式は覚えておく必要はない。

一般の角の回転移動は特別な条件があるとき以外は問題としない。



6.2 連立方程式

塾生諸君には連立方程式およびその解法の説明は不要であろう。通常の練習で十分である。塾には、連立方程式の計算、応用問題のプリントが多数用意されているからこれを十分活用していただきたい。

ここでは後の議論の一次関数との関連で、数個の典型的な連立方程式の応用問題のみを考えておこう。

- 1 「輸入業者が取り扱う商品がある。この品は輸入に際して輸入原価の40%の通関税がかかり、輸入原価と通関税を合わせた価格に150%の物品税が付加される。業者は更に販売のための雑費を加え、販売価格と考える。一昨年はこの品の1箱の販売原価は8万円であったが、一昨年にくらべ本年は輸入原価が20%下がり、雑費が20%増したため6.8万円となった。

(1) 一昨年の輸入原価と雑費を求めよ。

(2) 一昨年は1箱 p 万円で n 箱を販売した。昨年は販売原価は変わらなかったが、売価を1000円値下げしたところ、販売個数が12箱増え、利益は9.2万円少なくなった。本年は販売原価の値下がりのため売価を一昨年の15%引きにしたところ、販売個数が40個増え、利益は204万円となった。 p, n を求めよ。(慶應義塾高)

古色蒼然としているが、過去このタイプの問題が大阪の公立で頻出した。オリジナルの問題は未知数を指定してあったが、改題した。連立方程式の応用問題では、はじめの大事なステップは何を未知数にするかである。直接問われている量を選ぶのではなく、基準になっている量、基本的な要素に対する量などそれに基づいた式が作りやすい量を未知数に選ぶ。この場合は一昨年の輸入原価を x 万円、雑費を y 万円とすればよい。一般には未知数の選択はかなり自由度があるが、未知数の適切な選択は問題の明確な理解に貢献する。

$$\begin{cases} 2.5 \times 1.4 \times x + y = 8 \\ 2.5 \times 1.4 \times 0.8 \times x + 1.2 \times y = 6.8 \end{cases}$$

方程式は何かが左辺と右辺で等しい、ということを表している。左辺と右辺はその等しい量の違った表現になっているはずだ。連立方程式というのは、そうした式が2つ以上あるということだ。たとえば、食塩水の式、食塩の式などである。上の例では一昨年度と本年の販売原価の式である。

方程式は、たとえ醜くなくても、意味が分かりやすいように、元の形のままで表現しておく。見直すとき間違いが発見しやすい。整理しておく必要はない。全ての式の計算は必要になってから行えばよい。

これより、 $x = 2, y = 1$ 。したがって、輸入原価2万円、雑費1万円。

(2) では

$$\begin{cases} (p - 8 - 0.1)(n + 12) = (p - 8)n - 9.2 \cdots (a) \\ (0.85p - 6.8)(n + 40) = 204 \cdots (b) \end{cases}$$

(a) より、 $n = 120p - 880$ これを (b) に代入し、 $p^2 - 15p + 54 = 0$ 、 $(p - 6)(p - 9) = 0$ 、 $p = 6, 9$ 。 $p = 6$ のとき、 $n = -160$ で不適格。よって、 $p = 9, n = 200$ となる。

連立一次方程式の問題と思っていたら、二次方程式となってしまった。時々こうした出題があるが、あわてず解こう。

〔例題1〕 くだもの屋さんが、果物 10 箱を仕入れ、その運送料として 6000 円支払った。1 割は腐って売れなくても 2 割の利益があるように 1 個 64 円の定価をつけた。ところが実際に腐って売れなかったのは 125 個だったので、結局 2 割 5 分の利益があった。くだもの 1 箱の仕入れ値段を x 円、1 箱に詰められている果物の個数を y 個として連立方程式をつくり、 x, y の値を求めよ。(慶應義塾志木校)

$$64 \times 10y \times 0.9 = 1.2(10x + 6000), 64(10y - 125) = 1.25(10x + 6000), \quad x = 9000, y = 200$$

2 連立方程式にはならないが、つぎの応用問題も考えておこう。

「排出量が調節できる 2 つの蛇口 A, 蛇口 B がある。A からは常に 5% の食塩水が、B からは常に 10% の食塩水がそれぞれ排出できる。ある容器に食塩水を満たすのに、A を全開にし、B を使わなければ 30 分かかる。また、A の排出量が全開のときの半分になるように絞り込み、B を全開にして排出すると 40 分かかる。

- (1) 全開での A, B の排出量をそれぞれ毎分 x kg, y kg とするとき、 y を x の式で表せ。
- (2) A と B 両方を全開にして容器を満たしたとき、何% の食塩水ができるか。
- (3) 容器内の食塩水の濃度が常に 7% になるようにしながら、できるだけ早く食塩水で容器を満たしたい。A と B のどちらの蛇口を、排出量が全開時の何% になるように絞れば良いか。また、容器を満たすには何分かかかるか。(白陵高校)

出題は新しいが、これも過去何度も出題された古典的なタイプの問題である。唯一ここで身につけておくべきテクニックは割合の問題は「適切な変数」を導入する、ということである。

(1) について、満水の量は同じだから $30x = 40(0.5x + y)$, よって $y = \frac{1}{4}x$

(2) について、満水になったときの濃度は単位時間のときの濃度と同じだから、求める濃度 p % とすると

$$x \times \frac{5}{100} + y \times \frac{10}{100} = (x + y) \times \frac{p}{100}$$

となる。これに、 $y = \frac{1}{4}x$ を代入して、 $p = 6$, 6%

(3) について、A, B それぞれ全開にすると 6% ということは、7% はそれより濃いものだから、A の割合を減らし、B の割合を多くしておけばよい。したがって、B を全開にし、A の全開に対する割合を q としておく。濃さは 7% だから

$$x \times q \times \frac{5}{100} + y \times \frac{10}{100} = (x \times q + y) \times \frac{7}{100}, \text{ よって } 2xq = 3y, y = \frac{x}{4} \text{ を考慮すると,}$$

$$q = \frac{3}{8} = 0.375, \text{ また容器を満水にするには } \frac{30x}{x \times q + y} = 48, \quad 48 \text{ 分}$$

ここでは、満水の量とか、問題によって全道のりなどを表す変数を導入しなかったが、もう少し複雑な問題になるとそれらが問題を整理するのに重要なはたらきをする。割合の問題は「全量」を表す変数を導入しよう。結果には「打ち消しあって」影響はない。

3 「食塩水の問題」を考えておこう。塾には食塩水や割合を連立方程式で解く問題のプリントが準備してある。一通り全て解いておこう。ここには一つだけ示しておく。

「2 つの容器 A, B に異なる濃度の食塩水 1800g, 1200g が入っている。まず、A から B へ 300g だけ移してかき混ぜ、次に B から A へ 500g 移してかき混ぜると、A には 4% の食塩水ができる。また、はじめの A, B の食塩水を全部いっしょにして混ぜると 5% の食塩水ができるという。はじめ A, B に入っていた食塩水の濃度を求めよ。」(古い灘高の問題)

食塩水の問題は充分練習済みだろう。各段階の図を描き、それぞれの食塩水と食塩を表す式を求める。条件から食塩水および食塩の方程式を作る。この問題では各操作ごとに図を描き、これを進め、条件の段階で方程式にする。複雑だが極めて易しい問題である。

A, B の食塩水の濃度をそれぞれ x %, y % とすると

$$\frac{16x + 4y}{2000} = \frac{4}{100}, \frac{18x + 12y}{1800 + 1200} = \frac{5}{100}, \quad x = 3, y = 8. \quad \text{A は 3%, B は 8\%}$$

4 未知数の設定が不適当な場合次のような連立方程式ができてしまうこともある。

慌てずに、このまま解いて解答しよう。

$$[1] \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{6}{x} - \frac{7}{y} = 3\left(\frac{1}{x} - \frac{2}{y}\right) + 8 \end{cases} \quad (\text{同志社国際高})$$

$$(x = \frac{1}{3}, y = 1)$$

$$[2] \begin{cases} \frac{2}{x+y} + \frac{3}{2x-y} = 8 \\ \frac{3}{x+y} - \frac{2}{2x-y} = -1 \end{cases} \quad (\text{西大和学園高})$$

$$(x = \frac{1}{2}, y = \frac{1}{2})$$

$X = \frac{1}{x}, Y = \frac{1}{y}$, あるいは $X = \frac{1}{x+y}, Y = \frac{1}{2x-y}$ などにおいて, 未知数 X, Y の連立方程式を解き, その値を用いて, 改めて, x, y を求めればよい。

5 未知数が3つの連立方程式が出来てしまうこともある。

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 12 \quad \dots \quad \textcircled{1} \\ 2x + 3y - z = 1 \quad \dots \quad \textcircled{2} \\ -2x + y + 4z = 16 \quad \dots \quad \textcircled{3} \end{cases}$$

3つの式から一つの文字を消去し, 連立2元一次方程式を導き, それを解く。

$$\textcircled{1} \times 2 - \textcircled{2} \text{より, } y + 7z = 23 \dots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{2} + \textcircled{3} \text{より, } 4y + 3z = 17 \dots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}, \textcircled{5} \text{より, } y = 2, z = 3 \dots \textcircled{6}$$

$\textcircled{6}$ を $\textcircled{1}$ に代入して, $x = -1$

$$\text{従って, } x = -1, y = 2, z = 3$$

練習しておこう。

$$(1) \begin{cases} 2x - 2y + z = 22 \\ 3x + y - 3z = 12 \\ x - 3y - z = 14 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x - 2y = -3 \\ 3y - z = 2 \\ -z + x = -3 \end{cases}$$

$$(1)x = 7, y = -3, z = 2, \quad (2)x = 1, y = 2, z = 4$$

〔演習〕 ある商店では商品 A, 商品 B の2種類の商品売っている。ある日, 開店の時に A, B それぞれの個数を調べたところ, 個数の比は 6 : 5 だった。午前中に A は開店時の A の個数の 10% が売れ, B は 7 個だけ売れたので, 正午に A を何個か追加し, B もそれと同じ個数を追加したところ, A と B の個数の比は 9 : 8 になった。また, このとき A と B の個数の合計は開店時に比べて 35 個増えていた。開店時にあった A, B のそれぞれの個数を求めよ。

開店時の商品 A, B それぞれの個数を x 個, y 個, 正午に追加した個数をそれぞれ a 個とする。

$$\begin{cases} x : y = 6 : 5 \\ (0.9x + a) : (y - 7 + a) = 9 : 8 \\ (0.9x + a) + (7 - 7 + a) = x + y + 35 \end{cases}$$

商品 A は 120 個, 商品 B は 100 個

6.3 関数とグラフ

6.3.1 関数とは

グラフとは式などで表現されている全ての内容を, 図で表現したものだ。図は点の集まりと考えると, 式などで書かれた全ての (x, y) の組に対応する点がグラフで再現されているだけでなく, 式などで含まれていない点はグラフでも含まれていないことがわかるように描かれていなければならない。

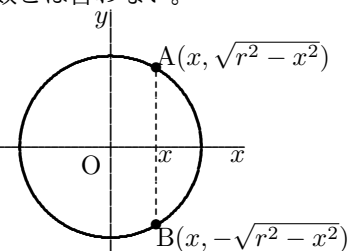
「関数」について考えてみよう。 y が x の関数とは, x が与えられたとき, y がひとつだけ対応していることをいう。したがって, 例えば, 円のグラフを描いたとき, y は x の関数とは言わない。

半径 r の円の方程式が

$$x^2 + y^2 = r^2$$

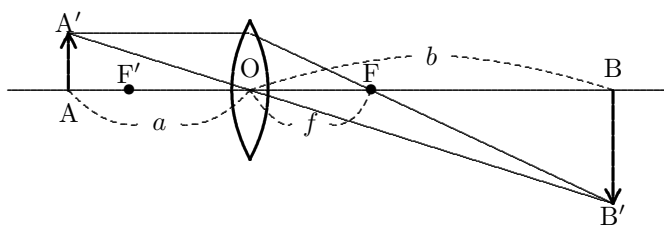
であることは, 容易に理解できる。これを y について解くと, $y = \pm\sqrt{r^2 - x^2}$ となって, 同じ x について, 2つの y が対応する。したがって, このとき, y は x の関数ではない。一次関数の場合は, $ax + by + c = 0$ の形で与えられていても, $b \neq 0$ の場合は常に y について解けて, 一つの x について, y が一つ対応していた。

座標平面で複数の曲線を描くことと, y が x の関数でないことを混乱してはいけない。複数の曲線は複



数の関数を表現しただけかもしれないからだ。一般に応用では同一座標平面に複数の関数のグラフを書き込むことが多い。

よく知っている「レンズの公式」を考えよう。焦点距離 f の凸レンズの前方 a のところに物体 AA' があり、凸レンズの後方 b に倒立の実像 BB' ができたとする。



相似の考えから、

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad \text{拡大率} = \frac{BB'}{AA'} = \frac{b}{a}$$

が得られる。まず、 b について解いてみよう。

$$b = \frac{af}{a-f}$$

したがって、 b は a の関数と言える。焦点距離 f は変わらないとして、物体のレンズからの距離 a が変わったら像はどうなるだろうか。無限の遠方から徐々に前方の焦点距離 F' （これは焦点距離と同じ大きさ）に近づくにしたがって、分母は正で 0 に近づく。しかしこれだけでは b がどう変化するかわかりにくい。そこで、もう一度元の式にもどって、

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{f} - \frac{1}{a}$$

を考えると、 a が無限大からだんだんと f に近づくにしたがって、 $\frac{1}{a}$ は大きくなり、 $-\frac{1}{a}$ は小さくなり、したがって、 $\frac{1}{b}$ は小さくなり、結局 b は大きくなる。 a が限りなく f に近づいたとき、 b は限りなく大きくなる。像と物体の大きさの比は $b:a$ になるから、像もどんどん大きくなる。したがって、実像を考える限り、 a と b の関係は

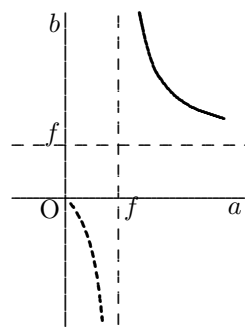
$$\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{f}, \quad (a > f, b > f)$$

となる。 b について解いておかなくても、 a が決まれば、 b も決まるから、 b は a の関数といえる。一般に関数には変域がある。したがって、関数を表すときには変域と組で表さなければならない。今の場合、 $a \leq f$ では関数は与えられていない。

$0 < a < f$ のときは虚像になることはよく知っている。 b の式を書き直し、

$$b = \frac{f(a-f) + f^2}{a-f} = f + \frac{f^2}{a-f}, \quad (a > 0, a \neq f)$$

としておくと、 $0 < a < f$ の場合、 $b < 0$ となり、中心からの距離を負と考えると虚像の位置を表していることになる。右図で実線は実像、破線は虚像に対応する。自分で証明しておこう。



反比例の関数 $y = \frac{a}{x}$ (a : 定数) は $x = 0$ 以外では定義される。式から定義域が自明のときは変域をあらかじめ記述しないことが多い。

関数は常にグラフでの確に表現できるかというそうではない。 x の変域がたとえば $0 \leq x \leq 1$ の関数であっても、その中に無数の不連続点がある関数もある。しかし、 (x, y) 平面で表したとすると、それも一般にはグラフという。的確な表現ではないだけだ。

さて、 y が x の関数である場合、関数の具体的な形を表現する必要がないとき、あるいは一般的な関数を表すとき、 $y = f(x)$ などと表現する。

例えば、 y が x に反比例し、 $y = \frac{6}{x}$ のとき、 $f(x) = \frac{6}{x}$ である。 $f(x)$ は通常 x を含む式で表されるから、関数は式 $f(x)$ とその定義域が与えられると確定する。一次関数とは $f(x) = ax + b, a \neq 0$ で表される x から $f(x)$ を求める式のことであり、二次関数とは $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ の形をした式のことであり、2つの関数を同時に議論する必要がでてくれば、一方を $f(x)$ 、他方を $g(x)$ としておけばよい。したがって、 f

や g は関数の内容を与えることになる。 x は変数で、その変域が定義域である。また、 $f(x) = x^2 + 2x - 3$ のとき、 x に 4 を代入した量、 $f(4) = 4^2 + 2 \times 4 - 3 = 21$ を $x = 4$ の時の「関数の値」という。これは、式の値そのものである。

6.3.2 グラフと連立方程式の解

以上を踏まえ、連立方程式で問題を解く、とはどういうことだったのか、一寸だけ復習しておこう。

未知数が x, y の連立一次方程式は

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \cdots (1) \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \cdots (2) \end{cases} \text{の形をしている。}$$

(1),(2) は $b_1 \neq 0, b_2 \neq 0$ のとき、どちらも y について解くと、($a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$ のとき) x の一次関数となる。連立方程式の解とは、(1),(2) ともに満たす (x, y) の組のことであった。このことから、(1), (2) の表わすグラフが

- * 1 点で交わる …… 交点の x, y 座標が解
- * 平行で交わらない … 解なし (不能)
- * 重なる …… 無数に解がある (不定)

(注. $0x = a \cdots a = 0$ のとき不定, $a \neq 0$ のとき不能)

といえる。したがって、2つの方程式のグラフ (直線) を一つの座標平面に表すことによって、問題を明確に分析できることがわかる。ただし、中学校での試験で不能や、不定などの語は使わないで下さい。× をもらった人もいます。

こうした考えを用いなくても簡単に解ける問題も多いが、少し複雑になるほとんどの問題では、グラフを利用すれば見通しよく解くことができる。

〔例題 1〕 次の方程式を解こう。

(1) $0 \cdot x = 2$

左辺は x が何であっても 0 となるが、それが右辺の 2 になることはない。したがって、不能、解なしである。

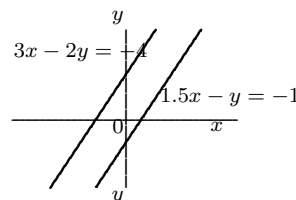
(2) $0 \cdot x = 0$

左辺は x が何であっても 0 となり、それは右辺に等しくなる。したがって、 x は不定、この場合は無数にある。

(1) の場合も、(2) の場合も x を求めようとする、 x の係数 0 で割らなければならない。「0 で割る」という操作の際に右辺の違いによって異なった対応が必要になる。連立方程式の 2 つの一次方程式が表すグラフが平行の場合の議論となる。

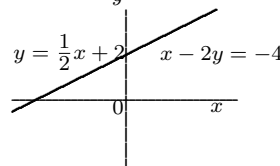
〔例題 2〕 連立方程式 $\begin{cases} 3x - 2y = -4 \cdots \textcircled{1} \\ 1.5x - y = -1 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ を解け。

加減法で y を消去するため、 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times 2$ を計算すると $0 \times x = -2$ となる。この式を満たす x は存在しない。したがって、解なし。



〔例題 3〕 連立方程式 $\begin{cases} y = \frac{1}{2}x + 2 \cdots \textcircled{1} \\ x - 2y = -4 \cdots \textcircled{2} \end{cases}$ を解け。

$\textcircled{1}$ を整理すると、 $\textcircled{2}$ と同じ $x - 2y = -4$ となる。したがって、加減法を行うと、 $0 \times x = 0$ となる。この式を満たす x, y は無数に存在する。不定。



〔問題〕 次の連立方程式をそれぞれ① 計算による方法、② グラフによる方法で解きなさい。

(1) $\begin{cases} 2x - y = 3 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ (2) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - \frac{1}{2}y = 2 \end{cases}$ (3) $\begin{cases} 2x - y = -3 \\ x - \frac{1}{2}y = -1.5 \end{cases}$

(1) $x = 2, y = 1$ (2) 解なし (3) 解は無数にある。

未知数が 3 個の連立方程式を考える。

1 つ 1 つの方程式は一般に

$ax + by + cz = d$ という形をしているだろう。議論を簡単にするため、 $c \neq 0$ として、変形すると $z = a'x + b'y + d'$ となる。これは、 (x, y) が与えられると z が決まる、すなわち z は x, y の関数といえることができる。したがって、この関数のグラフは一つの面 (平面) を表している。未知数が 3 個の連立方程式は 3 つの面の交点の座標を表すこととなる。

6.4 不等式

不等式は、あらゆる数学的な考察に不可欠である。一次不等式の計算、応用問題については塾のプリントで十分練習して欲しい。ここでは、主な話題を簡単に記す。

- 1 不等式の計算は「不等式の基本性質」を用いればよい。

はじめに、簡単に不等式の基本性質を復習しておこう。

〔問題〕 $a > b$ のとき、次の \square にあてはまる不等号を入れなさい。

(1) $a - 7 \square b - 7$ (2) $6a \square 6b$

(3) $-\frac{3}{4}a \square -\frac{3}{4}b$ (4) $5 - a \square 5 - b$

(1) $>$ (2) $>$ (3) $<$ (4) $<$

注意すべきは、不等式の両辺に負の数を掛けたり割ったりすると不等号の向きが変わることである。また、基本性質から、 $a < b, c < d$ のとき、 $a + c < b + c < b + d$ すなわち $a + c < b + d$ は成立する。一方、 $c < d$ の両辺に -1 をかけて、右辺左辺を入れ替えると $-d < -c$ だから、 $a - d < b - c$ となる。

$a < b, c < d$ ならば、 $a + c < b + d$ である、の意味を考えておこう。例として、

$x < 2, y < 3$ ならば、 $x + y < 5$

を考える。仮定 $x < 2, y < 3$ は、 x が $x < 2$ を満たす如何なる数であってもよく、 $x \geq 2$ でなければよい、 $y < 3$ が $y < 3$ を満たす如何なる数であってもよく、 $y \geq 3$ でなければよい、ということの意味しており、たとえば、 $x = 1.999, y = 2.999$ であっても、 $x + y = 4.998 < 5$ である。 x, y によっては、 $x < 2, y < 3$ でさえあれば、 $x + y$ が限りなく 5 に近い場合もある。「 $a < b, c < d$ ならば、 $a + c < b + d$ 」は、 $a + c$ と $b + d$ の大小関係の全てを主張している。

$a < b$ の両辺に -1 をかけて、 $-a > -b$ とするのも同様の考え方である。一般に不等式の演算はその演算によって新たな条件を加えない。ただし、 $x < 2$ ならば、 $x < 5$ であるが、これは、 $x < 2$ と $2 < 5$ から、 $x < 5$ としている、と考える。

- 2 一次不等式 $-\frac{2}{3}x - 1 < 0$ を考える。

不等号の向きに注意すれば、方程式とほとんど同様に計算できる。

$$-\frac{2}{3}x - 1 < 0$$

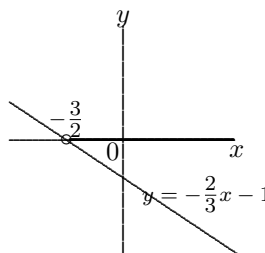
$$-\frac{2}{3}x < 1 \quad (\text{この行から次の行への計算に注意})$$

$$\text{よって } x > -\frac{3}{2}$$

などである。

不等式の解は、 $y = -\frac{2}{3}x - 1$ とおいたとき、 $y < 0$ となる x の範囲である。

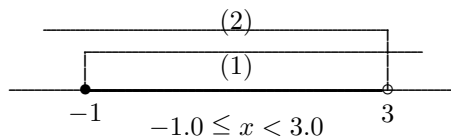
関数 $y = -\frac{2}{3}x - 1$ の値が負である x の範囲は、関数の値が 0 になるところ $x = -\frac{3}{2}$ より大きいところ、すなわち $x > -\frac{3}{2}$ である。



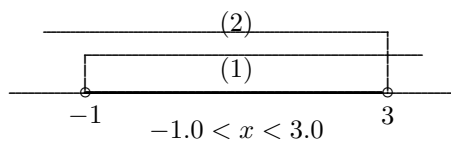
- 3 連立不等式を解く。

連立不等式とは、それぞれの不等式を同時に満たす x を求めること、すなわち共通部分を求めることである。「連立」の意味は「連立方程式」の場合と全く同じ意味である。境界に気を付け共通部分を解とする。

(a)
$$\begin{cases} x \geq -1.0 \cdots (1) \\ x < 3.0 \cdots (2) \end{cases}$$



(b)
$$\begin{cases} 3(1-x) < 5-x \cdots (1) \\ x-9 < 6(2-x) \cdots (2) \end{cases}$$



$$(c) \begin{cases} \frac{x+1}{2} - \frac{2x-7}{3} \geq 2 & \dots (1) \\ \frac{4-x}{3} - 2 < \frac{x}{4} & \dots (2) \end{cases}$$

$-\frac{8}{7} < x \leq 5$

一方の不等式の解が、他方を満たす場合もある。

$$(d) \begin{cases} 2(5-3x) - 3(2x+19) \geq 0 & \dots (1) \\ \frac{1}{8}(3x-5) > \frac{1}{7}(5x+6) & \dots (2) \end{cases}$$

$x < -\frac{83}{19}$

解がただ一つの数の場合もある。

$$(e) \begin{cases} 4-3x \geq -2 & \dots (1) \\ x - \frac{1}{2} \geq \frac{1}{2}x + \frac{1}{2} & \dots (2) \end{cases}$$

$x = 2$

解がない場合もある。

$$(f) \begin{cases} x \leq 1 & \dots (1) \\ x > 2 & \dots (2) \end{cases}$$

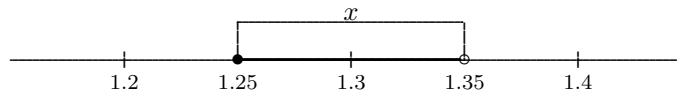
解なし

次の例を考えよう。

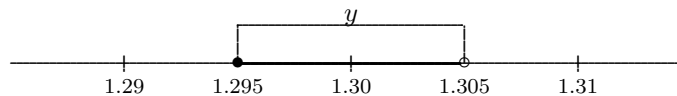
4 「丸め」方の一つ「四捨五入」について考える。

12.3456 を小数点以下 1 桁までの近似値で表すとす。小数点以下 2 桁目の数「4」の如何によらず、これを 12.3 で近似するのが「切り捨て」、12.4 とするのが切り上げである。一方小数点以下 2 桁の数「4」が 4 以下の時は切り捨て、「5」以上の時は切り上げる方法が四捨五入であり、12.3456 を小数点以下 1 桁までの近似値は切り捨ての 12.3 となる。

四捨五入の意味を明確に理解しておこう。真の値 x を四捨五入して 1.3 となったとする。四捨五入によって近似値が 1.3 になったと言うことは、四捨五入によって 1.2 でも 1.4 でもなく、その間の 1.3 となった、ということである。



である。したがって、 $1.25 \leq x < 1.35$ となる。また、真の値 y が四捨五入して 1.30 であるとは、1.30 より最小の位の単位だけ小さい数 1.29 や大きい数 1.31 ではない、ということである。数直線で表すと



である。したがって、 $1.295 \leq y < 1.305$ となる。

〔例題 1〕 「ある数 x, y を四捨五入して 2.34, 1.30 となった。 $x+y$ および、 $x-y$ の範囲を求めよ。」

四捨五入の意味より $2.335 \leq x < 2.345, 1.295 \leq y < 1.305$

したがって $2.335 + 1.295 \leq x+y < 2.345 + 1.305$ よって $3.63 \leq x+y < 3.65$

一方、 $2.335 - 1.305 < x-y < 2.345 - 1.295$ よって $1.03 < x-y < 1.05$

〔問題 1〕 「ある数 x, y を四捨五入して 1.4, 2.0 となった。 $3x-2y$ の範囲を求めよ。」

$$-0.05 < 3x - 2y < 0.45$$

〔問題 2〕 「分母と分子の和が 50 の既約分数がある。この分数を小数になおして、小数第 2 位を四捨五入す

ると 0.7 となる。この既約分数を求めよ。」 (10 年度洛南高)

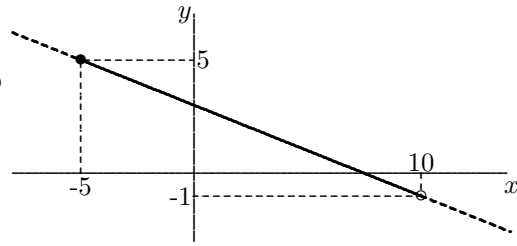
$$\frac{21}{29}$$

5 一次関数 $y = -\frac{2}{5}x + 3$ の y の変域 (値域) が $-1 < y \leq 5$ のとき、 x の変域 (定義域) を求めてみよう。

y の変域にたいする x の変域の条件は、 $-1 < -\frac{2}{5}x + 3 \leq 5$ となる。

これは、連立不等式で、
$$\begin{cases} -1 < -\frac{2}{5}x + 3 \\ -\frac{2}{5}x + 3 \leq 5 \end{cases}$$
これを解いて、 $-5 \leq x < 10$ 。

グラフで考えた方が分かりやすい。 $y = -1$ のとき $x = 10$ 、 $y = 5$ のとき $x = -5$ だからグラフは図のようになる。



- 6 古い応用問題を一つだけとりあげる。こんなレベルの問題ならば、特別の学習をしなくても解けるが、大切な考え方が入っている。

「仕入れ値が一個 70 円のなしと一個 100 円のリンゴを合わせて 16 個箱に詰め 1850 円で売るので、400 円以上の利益を得るためには、なしを何個以上にすればよいか。ただし、箱代を 100 円とする。」なしの個数を x 個とする。

$$1850 - \{70x + 100(16 - x) + 100\} \geq 400, \quad x \geq 8\frac{1}{3} \quad \text{答え 9 個以上}$$

不等式を作るときまず大切なことは、何を未知数 x にするかであるが、これを なしを x 個以上 とする、とすると、不等式が作りにくい。なしの個数を x 個 とする、と単純におく。そして大小関係は不等式の中に表現する。つぎに、不等式を解いたら、題意に合わせて解を求める。不等式の中には一般には x が自然数だとか、16 より小さい数だとか、いくつかの条件があるだろうが、それが明示していないことが多い。したがって、不等式の解から、それらの条件を満たすようなものを選択する。

〔問題 1〕 A 君の家から学校までの道のりは 1800m である。ある朝、A 君は家を出てはじめは歩き、途中から走って学校へ行った。家から学校までの所要時間は 20 分以下であった。A 君の歩く速さが毎分 70m、走る速さが毎分 210m であったとして、A 君の走った道りは何 m 以上かを求めなさい。

$$\text{走った道りを } xm \text{ とする。} \quad \frac{1800-x}{70} + \frac{x}{210} \leq 20, \quad 600m \text{ 以上}$$

〔問題 2〕 鉛筆が偶数本とノート 65 冊がある。これを何人かの子どもに配るとき、鉛筆を 1 人に 5 本ずつ配ると 24 本余り、1 人に 7 本ずつ配ると 5 本以上不足する。また、ノートを 1 人 3 冊ずつ配ると 12 冊以上余る。子どもの人数を x 人とおいて、子どもの人数と鉛筆の本数を求めよ。

$$\begin{cases} 7x - (5x + 24) \geq 5 \\ 65 - 3x \geq 12 \end{cases} \quad x = 15, 16, 17. \quad x \text{ は偶数より, } x = 16. \quad \text{子ども 16 人, 鉛筆 104 本}$$

〔問題 3〕 ある美術館の入場料金は大人 200 円、子ども 120 円である。団体は 20 名以上で 2 割引である。ただし、20 名未満でも団体料金で入場できるが、その場合は 20 名と見なされる。また、団体で入場するときは、子どもも大人の料金とする。

- (1) 20 名未満の大人が団体料金で入場するならば、何名以上の時が有利ですか。
 - (2) 大人、子ども合わせて 26 名が団体料金で入場するならば、大人が何名以上のとき有利ですか。
- (1) について、大人を x 人とすると、 $200x > 200 \times 20 \times 0.8$, $x > 16$. 17 名以上
(2) について、 $200x + 120(26 - x) > 200 \times 26 \times 0.8$, $x > 13$. 14 名以上

- 7 以下のような問題にも対応できなければならない。練習は塾プリントで行う。

[1] x についての不等式 $\frac{5x-3}{3} < m < \frac{5x-3}{2}$ を満たす整数の解がただ一つになるように整数 m の最大値を求めよ。

$$(m = 9)$$

[2] $a : b = 3 : 5$ のとき、不等式 $3 < 2a - b < 9$ を満たす整数 a と b の組 (a, b) を作る。この組の個数を求めよ。

$$(5 \text{ 組})$$

[3] x の不等式 $\frac{1}{3}(x+4) \geq 4 - \frac{3}{7}x$, $8x > 5(2x-a)$ を同時に満たす x の整数値がただ 1 つであるとき、定数 a はどんな範囲の数か。

$$\left(\frac{8}{5} < a \leq 2\right)$$

[4] x と a が $\frac{5(x-2a)}{3} + \frac{a+4}{2} = \frac{2x-a}{6}$, $\frac{1}{4} \leq a < 1$ を同時に満たすとき x はどのような範囲の数か。

$$(-1 \leq x < \frac{1}{2})$$

[5] 正の数 x の小数部分を y とするとき, $x^2 + y = 10$ が成り立っている。 x, y をもとめよ。

$$(x = \frac{-1 + \sqrt{53}}{2}, y = \frac{-7 + \sqrt{53}}{2})$$

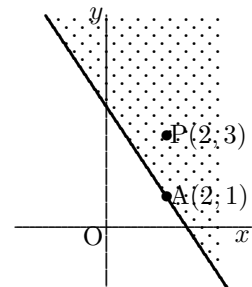
[6] 等式 $xy - 2x^2 = 12$ を満たす正の整数の組は何組あるか。

(6組)

8 不等式 $3x + 2y - 8 \geq 0$ を解こう。

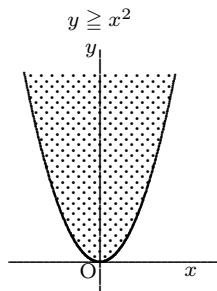
不等式は $y \geq -\frac{3}{2}x + 4$ と $y = -\frac{3}{2}x + 4$ の部分からなっている。

$y = -\frac{3}{2}x + 4$ のグラフを描いてみる。例として, $x = 2$ のグラフ上の点 $A(2, 1)$ より, y 座標が大きい点 $P(2, 3)$ では, $y > -\frac{3}{2}x + 4$ となっている。可能な全ての x に対して, こうした点 P の集まりは全て $y > -\frac{3}{2}x + 4$ を満たしている。したがって, $y \geq -\frac{3}{2}x + 4$ のグラフは $y = -\frac{3}{2}x + 4$ のグラフとそれより上の領域となる。

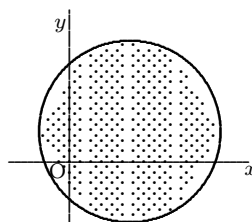


領域が全てつながっていることは次のようにして確認できる。関数 $3x + 2y - 8$ は (x, y) の変化に対して連続的に変化し, $3x + 2y - 8 > 0$ の点から $3x + 2y - 8 < 0$ の点に移るためには一度は $3x + 2y - 8 = 0$ の点を通過しなければならない。ところが, $3x + 2y - 8 = 0$ は直線で平面を2分するからである。

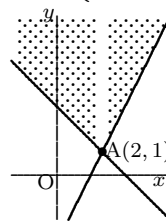
他の領域の例を示しておく。



$$(x-2)^2 + (y-1)^2 \leq 3^2$$



連立不等式 $\begin{cases} y \geq 2x - 3 \\ y \leq -x + 3 \end{cases}$ の場合。



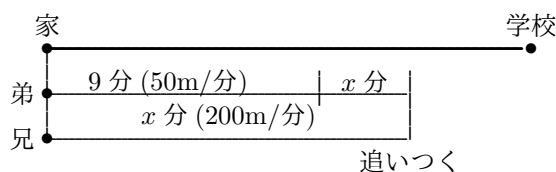
6.5 一次関数の応用

ここでは一次関数を積極的に利用する事を考える。

もっとも易しい, 一元方程式で解ける問題から考えてみよう。

1 「弟は丁度8時に家を出発して, 毎分50mの速さで800mの距離にある学校に向かった。兄は弟の忘れ物に気が付き, 8時9分に駆け足で毎分200mの速さで弟を追いかけた。何時(いつ)追いつくか。」

これは小学生レベルの問題であり, 直ぐ解けるだろう。題意をより鮮明に描くため, 兄が出発してから x 分後に弟に追いつくとして次のような図を描くこともあるだろう。

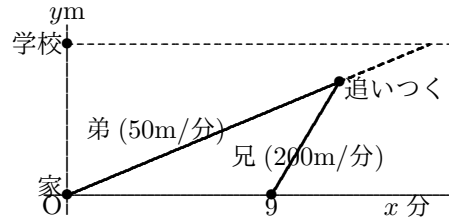


そして, $200x = 50(x + 9)$, $x = 3$, したがって, 8時12分となる。

図は人によってかなり異なるだろう。数学の図は設計図などの図と全く違い, 今関係する事柄のみをそれから読みとれさえすればよい。したがって, 上の図も極めて有用な図である。数学的なしくみ, 「構造」が表現されてさえいればよい。したがって, 2cmのところを10cmに, 3cmのところを

2cmの線分で描いても何らいけないことではない。ただし、長さを変換しようとした図の場合、こうした逆転があれば、現実を反映した図にはなっておらず、役に立たない。今の場合、横の軸は、時間であると同時に道のりを表現しているから分かりにくい。したがって、問題が複雑になるとこうした一次元的な図では対応できなくなる。鉄道のように道が一つで、時間、道のり、速さが複雑に絡み合う場合、「ダイヤグラム」と呼ばれる図が用いられる。南海電車の泉佐野の朝のラッシュアワーのある駅員さんはズボンの後ろポケットにこれをしのばせていた。とっさのときに、これを利用されたのだろう。(05年11月末のダイヤ改正時には、全ての駅員がこれを手に持っておられた。)

それでは上の問題の「ダイヤグラム」を書いてみよう。右のグラフは、時間の原点を8時丁度にとったものである。上の図より何が起きているかよくわかるだろう。グラフとは数学的な関係(構造)を図に表したものだといえる。



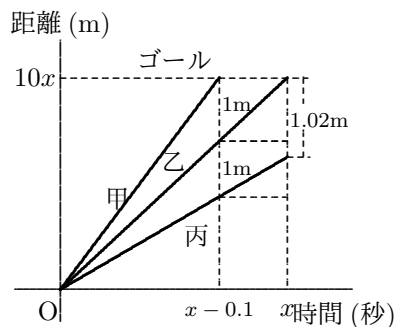
もう少し複雑な問題も考えておこう。

- 2 「甲、乙、丙の3人が、ある直線コースで競争した。甲がゴールインしたとき、乙はゴールまであと1m、丙はゴールまであと2mであった。また、乙がゴールインしたとき、丙との差は1.02mであった。甲、乙、丙の速さはそれぞれ一定で、乙の速さ毎秒10mとするとき、このコースの長さは何mであるか。」

乙がゴールに到達するまでの時間を x 秒とする。

ゴールまでの距離は $10xm$ であり、丙はゴール手前 $1.02m$ だから $(10x - 1.02)m$ のところにいたことになる。甲がゴールに到達する時間は、乙が $1m$ 走る時間だけ手前であるから $(x - 0.1)$ 秒で、そのとき、丙はゴール手前 $2m$ にいたから丙の位置は $(10x - 2)m$ である。

丙の速さを2つの方法で表して $\frac{10x - 2}{x - 0.1} = \frac{10x - 1.02}{x}$
 分母を払い、 $(10x - 2)x = (10x - 1.02)(x - 0.1)$
 展開して解くと、 $x = 5.1$ 。したがって、距離は $51m$



ダイヤグラムを書けば、後は簡単である。塾生は甲がゴールに到着した時間を x 秒とした。この方がわかりやすい。乙の速さは毎秒 $10m$ だからゴールまでの距離は $(10x + 1)m$ である。一方丙は乙が $1m$ 進む間に $(2 - 1.02)m$ 進むのだから、速さは $(2 - 1.02)/0.1 = 9.8m/秒$ であるから、丙の速さを用いたゴールまでの距離は $(9.8x + 2)m$ となる。したがって

$$10x + 1 = 9.8x + 2, \quad x = 5, \quad \text{距離は } 51m$$

さらに、もう少し複雑な連立方程式の応用問題を考えてみよう。

- 3 「A地点から太郎が、B地点から次郎が互いに相手の出発点を折り返し点にしてAB間往復のジョギングを同時に始めた。太郎は時速 $11.2km$ で走り、Bで15分休んで折り返した。次郎は時速 $8.4km$ で走り、Aで休まず折り返した。復路、2人はC地点で出会ったが、そこは2人が最初に会った地点から $1.8km$ 離れていた。AB間、AC間の距離をそれぞれ xkm , ykm とおいて連立方程式を作り、 x, y を求めよ。」

レベルとしては中の上クラスである。決して難問には属さないが、これさえも、直ちに方程式をたてるには苦勞する。ダイヤグラムを書いてみよう。

最初に出会うまでに要する時間の式は

$$\frac{y + 1.8}{11.2} = \frac{x - y - 1.8}{8.4} \quad \text{簡単にして } 4x - 7y = 12.6$$

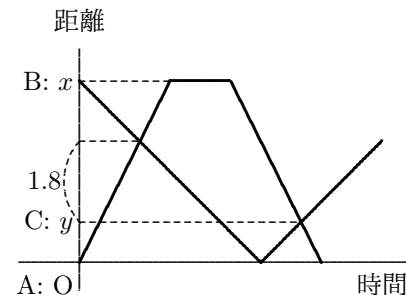
2度目に出会う時間の式は

$$\frac{x}{11.2} + \frac{1}{4} + \frac{x - y}{11.2} = \frac{x + y}{8.4} \quad \text{簡単にして } 2x - 7y = -8.4$$

これらの連立方程式を解いて

$$\begin{cases} x = 10.5 \\ y = 4.2 \end{cases} \quad \text{となる。}$$

結局、ダイヤグラムを描くことはいくつかの一次関数のグラフを重ねて描いたことになっている。数学的な内容は基本的には全て文字(式を含む)で表現される。グラフのような図はその一部を視覚的



に表現したものであり、思考の重要な道具となっている。課題に応じた図を適切に描くことは学習の強力な武器になる。

〔例題 1〕 A町からB町を通ってC町に行くのに、甲は午前8時にA町を出発して、毎時4.5kmの速さでB町まで歩いた。B町に1時間とどまって、今度は毎時4kmの速さでC町まで歩いた。乙は同じ日の午前10時にA町を出発して、毎時5.5kmの速さで甲と同じ道をC町まで歩き通したところ、甲と乙は同じ時刻にC町に着いた。A町からB町まで、B町からC町までの距離を求めよ。ただし、A町からB町までの距離は、B町からC町までの距離の1.8倍である。答えは小数第一位まで答えよ。(古い、お茶の水女子大付属、の問題)

それぞれの距離を x km, y km とする。

$$\frac{x}{4.5} + \frac{y}{4} + 1 = \frac{x+y}{5.5} + 2, \quad x = 1.8y \quad 12.8\text{km}, 7.1\text{km}$$

〔例題 2〕 サイクリング部の2人の部員A, Bが、35km離れた甲地点と乙地点を自転車でそれぞれ1往復することにした。Aは甲地点から、Bは乙地点から同時に出発する予定であったが、Bは自転車が故障していたので修理に時間がかかり、Aより遅れて出発した。このため、AとBが最初に出会った地点は、同時に出発したときに最初に出会う予定の地点から3.25km離れていた。

また、最初に出会ってから1時間40分後に、最初に出会った地点から11.5km離れた地点で再び出会った。AとBは、それぞれ一定の速さで走っており、Aの方がBより速いものとする。次の各問に答えよ。(園田学園高)

- (1) AとBの速さの合計は毎時何kmですか。
- (2) AとBが予定通り同時に出発したとすると、最初に出会うのは出発してから何分後になりますか。
- (3) AとBの速さは、それぞれ毎時何kmですか。

これは標準レベルに分類されるそうだが、はじめ塾生に質問を受けたとき、瞬時には適切な解答が思い浮かばなかった。これは、連立方程式の応用の問題に分類されているが、多くの未定量があり、それらの関係を整理するのに時間がかかったのが原因である。この種の問題は一般に、如何に手早くそれらの関係を見つけたかであり、そのための未知数をどれにするかに尽きる。ダイヤグラムを書いて、じっくり眺めるしか手がない。幸い、設問(1),(2)が設定されているから、それをヒントにすれば以下のような解答ならば5分とかからないだろう。

(1) $1\frac{40}{60}$ 時間でAとBは合わせて 35×2 km 進んだから、42km/時

(2) 35kmを42km/時で進んだから、 $\frac{5}{6}$ 時間 = 50分

(3) Aの速さを x km/時とする。Aは最初に出会った時間から2度目に出会うまでの時間($1\frac{2}{3}$ 時間)に $1\frac{2}{3}x$ km すすむ。Bが乙を出て最初にAに出会うまでの距離は $\{35 - (\frac{5}{6}x + 3.25)\}$ km だから、

$$1\frac{2}{3}x - \{35 - (\frac{5}{6}x + 3.25)\} \times 2 = 11.5$$

$$x = 22.5 \quad \text{Aは } 22.5\text{km/時}, \quad \text{Bは } 19.5\text{km/時}$$

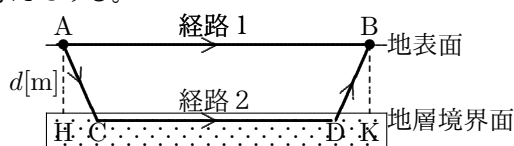
しかし、学習としては、いくつかの未知数を導入して、連立方程式を立てて解くことを勧める。2次の項が現れるだろうが、消去に手間はかからない。落ち着いて計算しよう。

以下の問題は、最近の理科の入試問題である。昔からよく出題された問題だが、少し分かりにくくしてある。ここでは問題の難易にかかわらず、如何に課題を数学的に定式化すれば、現実がよく見通せるかを見てほしい。

- 4 「地震が起こった場所は、(①)と呼ばれる。地震がおこると、速さの異なる2つの波が同時に発生して、周りに伝わっていく。はじめの小さな揺れを(②)、後からくる大きな揺れを(③)という。この2つの波の到着時間の差は、(①)からの距離が遠くなるほど(④)。日本列島付近の(①)の深さは、太平洋側と日本海側では一般に(⑤)側の方が深い。一方、日本列島の下では、浅い(①)の地震も多く起きている。このような浅い場所で地震が起こると大地のずれを生じる。このずれを(⑥)という。

現在では、地震時に起こるはじめの小さな揺れと同じ種類の波を人工的に起こして、地球内部の様子が調べられている。ここでは、その原理について考えてみる。

図のように、厚さ d [m] の柔らかい地層が堅い地層の上であり、地表面と地層境界面が平行である場所で、波の発生源Aから観測点B間での距離を変えて、波が到達するまでの時間を測定した。



下表はその結果である。

AB間の距離 [m]	0	30	60	90	120	150
時間 [秒]	0	0.01	0.02	0.028	0.033	0.038

この結果を説明するために、次のように考えた。観測点Bに最初に到達する波には、発生源からまっすぐ伝わるもの（経路1：A→B）の他に、いったん硬い地層の中に入り、その表面に近いところを通過して再び柔らかい地層を通過して観測点に到達するもの（経路2：A→C→D→B）の2種類がある。

問1 文中の（ ）内に適当な語を入れよ。

問2 地震を表すときに、「(1) マグニチュード」や「(2) 震度」という語を用いる。それぞれ何を表しているかを答えよ。

問3 柔らかい地層を伝わる波の速さを V_1 [m/秒]、堅い地層を伝わる時の速さを V_2 [m/秒] を表よりそれぞれ求めよ。

問4 発生源Aから観測点B間での距離が x [m] であるとき、経路2を通過して波が到達するまでの時間を、 V_1, V_2, d, x を用いて表せ。ただし、 $\angle HAC = \angle KBD = 30^\circ$ である。根号はそのままよい。

問5 経路1及び経路2で伝わった波が同時に到達するAB間の距離を L [m] とする。 d を V_1, V_2 、および L を用いて表せ。根号はそのままよい。

問6 表より L の値を求めよ。つぎに、問3と問5の結果を用いて d の値を小数点以下第1位まで答えよ。必要があれば、 $\sqrt{3} = 1.7$ を用いよ。』（甲陽学院高）

順次考えていこう。

問1 ①震源②初期微動③主要動④大きい⑤日本海⑥断層 問2 (1) 地震の規模 (2) 揺れの大きさ
 ここまでは、全く記憶だけの問題である。さて、以後の小問に答えるために、グラフを書いてみよう。通常は、時間を横軸にとったグラフを書くが、データの性質から、この問題では距離を横軸にしたグラフの方が書きやすい。

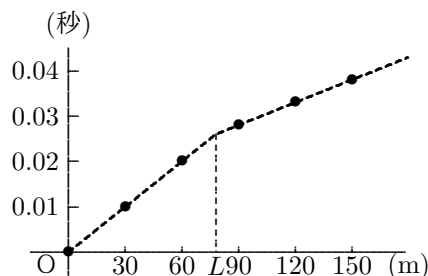
問3は、2つの直線の傾きだから、 $V_1 = 3000$ m/秒、

$$V_2 = 6000\text{m/秒}$$

問4は $\frac{4\sqrt{3}d}{3V_1} + \frac{1}{V_2} \left(x - \frac{2\sqrt{3}d}{3} \right)$ (秒) となる。

問5は、問4で $x = L$ とした式が $\frac{L}{V_1}$ に等しいとおいて、

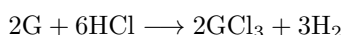
d について解いた式 $d = \frac{\sqrt{3}L}{2} \times \frac{V_2 - V_1}{2V_2 - V_1}$ となる。



問6は、2つの直線の式 $y = \frac{0.01}{30}x$, $y = \frac{0.005}{30}(x - 90) + 0.028$ の交点の x が解である。したがって、 $L = x = 78$ となり、問5の結果に代入して、 $d = 22.1$ となる。

化学変化は数学に多くの問題を提供してきた。一次関数の応用、という立場で、中学レベルの問題を一つだけ取り上げる。

- 5 「 マグネシウム 0.2g を入れた気体発生装置に、ある濃度の塩酸を過剰に加え、発生した水素の体積を測定した。また、金属G 0.3g、マグネシウムと金属Gの混合物 0.4g にも同様の実験を行った。金属は次の反応式にしたがって反応する。



マグネシウム 0.2g	20.0cm ³
金属G 0.3g	15.0cm ³
混合物 0.4g	35.0cm ³

結果を右の表に示す。

- (1) マグネシウムと塩酸との反応式を書け。
- (2) マグネシウム 100 原子、および金属G 100 原子から発生する水素はそれぞれ何分子か。
- (3) マグネシウム 1 原子と金属G 1 原子の質量の比をもっとも簡単な整数比で答えよ。ただし、発生する水素分子の数は体積に比例するものとする。
- (4) 混合物中のマグネシウムは何 g か。

次に、上記と同じ濃度の塩酸 36.0cm³ を5つ用意した。それぞれに、ある濃度の水酸化ナトリウム水溶液を体積を変えて加え、混合液をつくった。その混合液に 0.2g のマグネシウムを加え、それぞれ発生する水素の体積を測定した。更に、質量のわからないマグネシウムを用いて、同様の実験を行った。その結果を下の表に示す。

発生した水素の体積 (cm³)

水酸化ナトリウム水溶液の体積	10.0cm ³	20.0cm ³	30.0cm ³	40.0cm ³	50.0cm ³
マグネシウム 0.2g	20.0	20.0	15.0	5.0	0.0
質量不明のマグネシウム	30.0	25.0	15.0	5.0	0.0

- (5) この塩酸を中和させるのに必要な水酸化ナトリウム水溶液は何 cm³ か。
 (6) この塩酸をマグネシウム 0.2g と過不足なく反応させるには何 cm³ 必要か。
 (7) 質量不明のマグネシウムは何 g か。] (西大和学園高)

これは、理科の入試問題であったが、敢えて数学で取り上げる。

- (1) $Mg+2HCl \rightarrow MgCl_2+H_2$ (2) Mg … 100(分子), 金属G … 150(分子)

(3) 水素 1 分子あたりに相当する水素 1 cm³ 当たり, マグネシウムは $\frac{0.2}{20}$ g, 金属Gは $\frac{0.3}{15}$ g, この中にそれぞれ 1 個のマグネシウム, 2/3 個の金属Gの原子が含まれているから, 1 個の原子あたりの質量比は $\frac{0.2}{20} : \frac{0.3}{15} / \frac{2}{3} = 1 : 3$, Mg : 金属G = 1 : 3

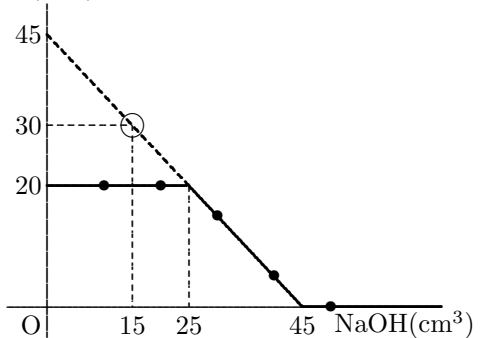
- (4) 混合物 0.4g に xg のマグネシウムが含まれているとして, 水素の発生量の式を作ると

$$x \times \frac{20}{0.2} + (0.4 - x) \times \frac{15}{0.3} = 35, \quad x = 0.3, \quad 0.3g$$

いよいよ本題だが, 問題の意味も分かりにくい。それは 2 つだけの関係ではなく, 塩酸, 水酸化ナトリウム, マグネシウムと発生した水素の量と変数が多いからだ。しかし, 表が与えられているということはそれに対応したグラフが描けると言うことである。

マグネシウム 0.2g の場合をグラフに表すと右図のように H₂(cm³)

なる。NaOH が 0 から 25cm³ までは, 投入した NaOH は全て中和に使われ, 塩酸が過剰にあった範囲である。丁度 NaOH が 25cm³ で残った塩酸と 0.2g の Mg が全て反応する。NaOH が 25 から 45cm³ では中和で残った HCl と 0.2g の Mg が反応するが, ここでは HCl が不足している。



- (5) 塩酸を水酸化ナトリウムで中和する, 水素は発生しないのだから, グラフが横軸をきるところである。これより, 45cm³。

(6) マグネシウムが十分にあると, グラフを点線のように NaOH を 0 の方に延長した縦軸との交点 45cm³ の水素が発生するはずである。すなわち, HCl 36cm³ では 45cm³ の水素に対応する。Mg 0.2g では 20cm³ の水素を発生するから, $36 \times \frac{20}{45} = 16$ cm³ の塩酸

(7) 同様に, 質量不明のマグネシウムの場合グラフは NaOH が 15cm³, 水素 30cm³ で折れ曲がるだろう。したがって, $0.2 \times \frac{30}{20} = 0.3$ (g) のマグネシウムとなる。

第7章 二次関数と二次方程式

7.1 2乗に比例する関数

7.1.1 2乗に比例する関数のグラフ

ここでは関数

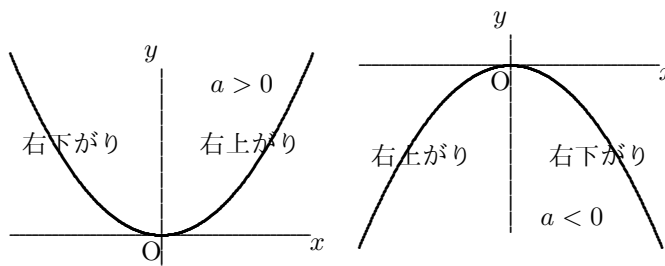
$$y = ax^2, \quad a \text{ は } a \neq 0 \text{ の定数}$$

を学習する。 $x = x_1$ から $x = x_2 (x_2 \neq x_1)$ に変化したとき、変化の割合は

$$\frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_2 + x_1)$$

となり、 x_1, x_2 によって値が変わる。グラフを描けば、各点で傾きが変わることになる。一次関数 $y = ax + b$ では変化の割合は常に一定 a であり、これはグラフを描くと傾きが a の直線である根拠となっていた。 $y = ax^2$ のグラフは曲がっていることがわかる。さらに、常に、任意の x に対して、 y の値が1つだけきまり、 x の値が少し変化すると、 y の値も少し変わることから、グラフは一続きの曲線で描かれることが理解できる。

いくつかの代表点をプロットし、フリーハンドで滑らかにつなげばよい。 $a > 0$ のとき、グラフは上に開いている、 $a < 0$ のとき、グラフは下に開いている、という。できるだけいろいろな場合について多くのグラフをグラフ用紙に書いて欲しい。またその後、フリーソフト“GNUPLOT”などを使ってモニターに表示してみるのも良い。



〔例題〕 関数 $y = ax^2 (a \neq 0)$ において、 x が 20% 増加すれば、 y は 44% 増加することを 証明せよ。

$x = x_1$ のとき $y = y_1$ とする。すなわち

$$y_1 = ax_1^2 \quad \cdots \text{①}$$

同様に $x = x_2$ のとき $y = y_2$ とする。すなわち

$$y_2 = ax_2^2 \quad \cdots \text{②}$$

x_1 が 20% 増加して、 x_2 になったとすると、

$$x_2 = 1.2x_1 \quad \cdots \text{③}$$

したがって、

$$\begin{aligned} y_2 &= ax_2^2 \\ &= a(1.2x_1)^2 = 1.44ax_1^2 \\ &= 1.44y_1 \end{aligned}$$

となり、 y_2 の値は y_1 の値より 44% 増加したことになる。

7.1.2 2乗に比例する関数のいくつかの性質

1 放物線 $y = ax^2$ を描く

グラフ用紙で各 x に対する y をプロットしておよそのグラフが描ける。連続的にはどうしたら描けるだろうか。ボールの表面に墨を塗り、斜めに傾けた平板に斜め上方に初速度を与えて転がすと、平板に放物線状の軌跡が描ける。コンピュータでは簡単に描けるが、それは (x, y) の点をプロットしているのと同じである。連続的な曲線を正確に描こうとすれば、放物線の基本的な性質をもう少し学習しておかねばならない。

図のように、一つの直線 $y = -p$ (これを準線という) と定点 $F(0, p)$ (これを焦点という) からの距離が等しい点を $P(x, y)$ とする。

すなわち $PF=PH$ である。

$$y + p = \sqrt{x^2 + (y - p)^2} \quad (7.1)$$

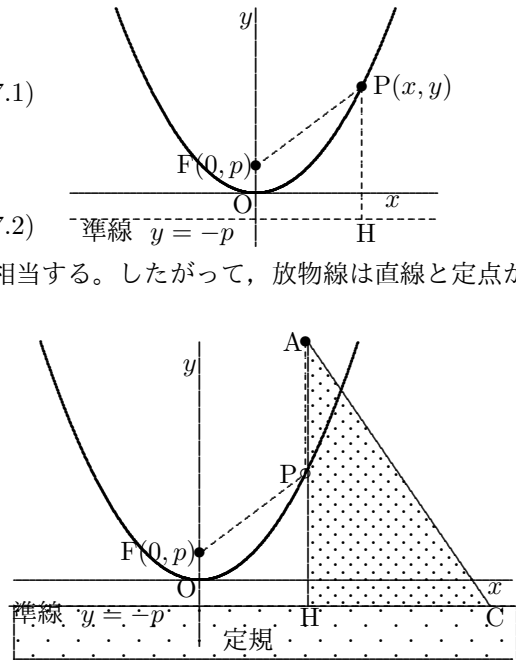
両辺を平方して整理すると

$$4py = x^2, \quad (y = \frac{1}{4p}x^2) \quad (7.2)$$

が得られる。これは $y = ax^2$ とすると、 $a = 1/4p$ に相当する。したがって、放物線は直線と定点からの距離が等しい点の集まり (軌跡) と言える。

この性質を用いると放物線は簡単に描ける。

はじめに、準線に定規を当て、三角定規 AHC の直角をはさむ2辺を y 軸と定規に合わせる。点 A と点 F を両端とし、 $AP+PF=AH$ に合わせて糸の長さを調節する。点 F にはまち針をたて糸を結ばばよいし、点 A ではセロテープなどで三角定規に糸を固定すればよい。図のように三角定規を定規にそって滑らし、糸に鉛筆を掛け、三角定規の辺 AH から離れないようにして鉛筆を滑らせば放物線が描ける。



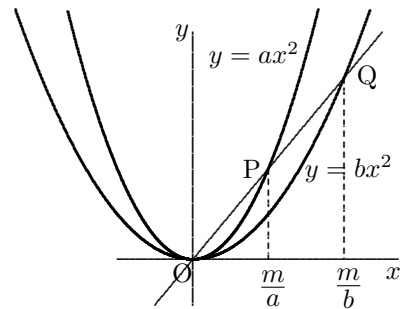
一人では困難だから2人で協力してやってみよう。中学数学としては、しかしこれは「作図」とは言わない。作図とはあくまで定規とコンパスで有限回の操作によって描くことを言う。したがって数学的には放物線を作図できたことにはならない。一般の角の3等分線が作図できない、ということと同じ論理である。

2 全ての放物線は相似であることを確認する。

2つの放物線を $y = ax^2, y = bx^2, (a, b > 0)$ とする。原点を通り、傾き m の直線と2つの放物線の交点を P, Q とする。

$$OP:OQ = \frac{m}{a} : \frac{m}{b} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$$

となり、2つの放物線は原点 O を相似の中心とする相似の位置にある。 $y = bx^2$ は $y = ax^2$ を a/b 倍した図形になっている ($a, \text{あるいは } b$ が負の場合も同様に議論できる)。



また、点 P と点 Q は相似の位置における対応する点だから、それぞれの放物線の接線の傾きは等しく ($= 2m$)、平行となる (2の議論の後、各自確かめておいてください)。

$y = x^2$ のグラフは、 $y = 2x^2$ のグラフに比べ、原点で「尖っている」ように見える。現に、 $y = x^2$ を y 軸周りに回転したような矢の先は鋭い。しかし、どちらも原点では、接線があり、 x 軸となっている。このことは、先端が「尖っている」という感覚は、先端での角度 (鋭角) が小さい、ということとは別のことであることがわかる。全ての球は相似であり、どちらの球が鋭い、と言っても意味はない。

3 $y = ax^2$ 上の $x = x_1, x = x_2$ の2点を結ぶ直線の傾き (変化の割合) は

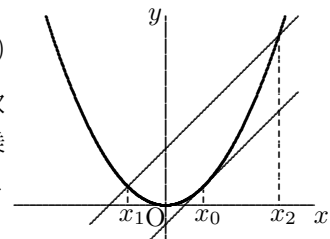
$$m = \frac{ax_2^2 - ax_1^2}{x_2 - x_1} = a(x_1 + x_2) \quad (7.3)$$

である。この式は2乗に比例する関数についての公式であり、二次関数にそのまま適用できるのではないから注意が必要である。2乗に比例する関数の2点を通る直線の傾きは常時必要になるから、これは公式として覚えておいたらよい。時間の節約になる。

しかし、もっと大事な応用がある。

x_2 が x_1 にどんどん近づくと直線は $x = x_1$ における接線に近づく。したがって、 $x = x_0$ における接線の傾きは

$$m = 2ax_0 \quad (7.4)$$



となる。

また x_0 を $x_0 = (x_1 + x_2)/2$, すなわち x_1, x_2 の中点にとると, 接線の傾きは $x = x_1, x = x_2$ を通る直線の傾きに等しくなる。また, $x_0 = \frac{x_1 + x_2}{2}$ とすると, $x = x_1, x = x_2$ における変化の割合 $a(x_1 + x_0)$ と $x = x_0, x = x_2$ における変化の割合 $a(x_0 + x_2)$ との平均は $2ax_0$ となり, $x = x_0$ における接線の傾きになる。等加速度直線運動 (たとえば自由落下) の場合, 式 (7.3) は平均の速度を表し, 式 (7.4) は瞬間の速さを表す。したがって瞬間の速さは前後する同じ時間幅の平均の速さの平均になっていることになる。

上記の接線の傾きを求める方法は, 一般の二次関数やより高次の関数にも適用できる。

有理整関数 $(f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0)$ の“微積”を中学で学ぶことに, 何の困難もない。

たとえば, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ の場合,

$$\begin{aligned} x = x_1 \text{ と } x = x_2 \text{ における変化の割合 } m \text{ は,} \\ m &= \frac{(ax_2^3 + bx_2^2 + cx_2 + d) - (ax_1^3 + bx_1^2 + cx_1 + d)}{x_2 - x_1} = \frac{a(x_2^3 - x_1^3) + b(x_2^2 - x_1^2) + c(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{a(x_2 - x_1)(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + b(x_2 - x_1)(x_2 + x_1) + c(x_2 - x_1)}{x_2 - x_1} = a(x_2^2 + x_2x_1 + x_1^2) + b(x_2 + x_1) + c \end{aligned}$$

ここで x_2 を限りなく x_1 に近づければ, $m = 3ax_1^2 + 2bx_1 + c$ となる。

まとめると,

$$\begin{array}{l} y = ax^2 + bx + c \quad \text{の} \quad x = x_0 \text{ における接線の傾き} \quad m = 2ax_0 + b \\ y = ax^3 + bx^2 + cx + d \quad \text{の} \quad x = x_0 \text{ における接線の傾き} \quad m = 3ax_0^2 + 2bx_0 + c \end{array}$$

この式は, 三次関数の極値を求めるところで用いる。

[例題 1] $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフを描き, $x = 3$ における接線の式を求めよ。

接線の傾きは $m = 2 \times 1 \times 3 + (-2) = 4$ 。したがって, 接線の方程式は $y - 6 = 4(x - 3)$ となる。

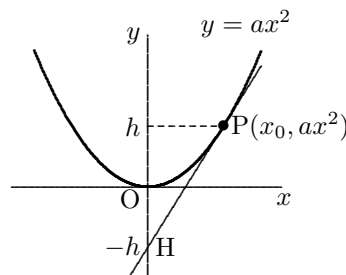
別の考え方をしてみる。 $y = x^2 - 2x + 3$ 上の点 $(3, 6)$ をとおる直線の方程式を $y - 6 = m(x - 3)$ とする。放物線と直線のもう一つの交点を求めるため, 連立方程式を解いてみる。

$y = x^2 - 2x + 3, y - 6 = m(x - 3)$ より, $x^2 - (m+2)x + 3m - 3 = 0$ 。 x に関する二次方程式の一つの解は $x = 3$ である。もう一つの解が求める交点に対応する。二次方程式のところで議論するが, この解も $x = 3$ の場合 (重解) は, 2つの交点が重なった, あるいは, もう一つの解が $x = 3$ に近づいて一つになった, と考える事が出来る。したがって, このときの直線の傾き m は $x = 3$ における接線の傾きと考えられる。重解の条件は判別式 $D = 0$ だから,

$$D = (m+2)^2 - 4 \times 1 \times (3m - 3) = 0, m^2 - 8m + 16 = 0, m = 4$$

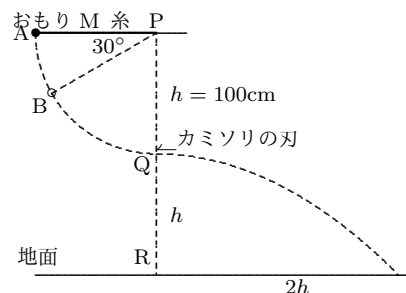
こうした解答は, 高校 1 年で学ぶ接線の求め方である。

$y = ax^2$ 上の点 $P(x_0, ax_0^2)$ の接線の y 軸との交点の y 座標 (切片) は, $h = ax_0^2$ とすると $y = -h$ である。次の例題はこの性質を用いて解く理科の特殊な問題である。

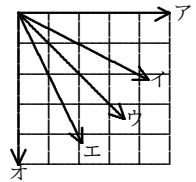


[例題 2] 重り M を長さ 100cm の糸で P 点からつり下げる。右の図のように, おもり M を, A 点 (P と同じ高さの点まで) 糸を張ったまま持ち上げままたち上げて, 静かに (初速 0 で) はなすものとする。おもり M が Q 点 (P の真下の点) を通過する瞬間に, 重りの直ぐ上で糸が切れるように, カミソリの刃が設置してある。Q 点から 100cm 下に水平な地面がある。糸の質量や空気の抵抗を無視するものとして問にこたえよ。

なお, おもりの速度の大きさは運動エネルギーできまり, 「運動エネルギーは速度の大きさの 2 乗に比例する」ことが分かっている。また, おもりを A で放した場合, Q で運動エネルギーは, A と Q におけるおもりの位置エネルギーの差に等しい。(灘高改)



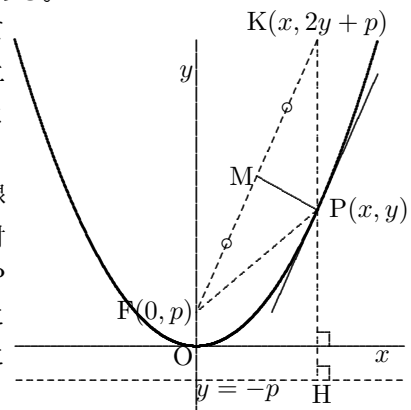
- (1) 糸が切れた直後の、Mの運動の向きを右の矢印ア～オから選べ。
 (2) 地面に衝突する直前の、Mの運動の向きを右の矢印ア～オから選べ。
 (3) Mが地面に衝突する位置は、Qの真下の点Rから何cm離れた位置か。
 (4) 今度はMを図のB点(∠APB=30°)までもちあげて静かに放したとすると、Mが地面に衝突する位置は、Qの真下の点Rから何cm離れた位置か。



(1) 速度の方向は軌道の接線方向である。ア (2) Q点を基準にしたA点での位置エネルギーは mgh 、Q点での速さを v とすると、Q点での運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ 、したがって、力学的エネルギー保存の法則から、A点での位置エネルギーがQ点での運動エネルギーに変わったとして、 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ 。 $v^2 = 2gh$ 、Q点から地面に落ちるまでの時間を t とすると、 $\frac{1}{2}gt^2 = h$ 、 $t^2 = \frac{2h}{g}$ 、Rから落下点までの距離は $vt = \sqrt{v^2 t^2} = 2h$ 、落下点での運動の方向は、落下点での軌道の接線の方だから、落下点と点Pを結ぶ方向である。ウ (3) $2h = 200\text{cm}$ (4) Q点での速度は $v^2 = gh$ 、したがって、Rから落下点までの距離は $vt = \sqrt{v^2 t^2} = \sqrt{gh \times \frac{2h}{g}} = \sqrt{2h} = 100\sqrt{2}\text{cm}$ 。

- 4 パラボラ (parabola) アンテナの原理を確かめよう。反射の法則は「反射光は入射光と反射面の法線 (垂線) のなす面に含まれ、入射角と反射角は等しい。」である。

$y = \frac{1}{4p}x^2$ の図を描くとき、放物線上の点 $P(x, y)$ に関して点 H と対称な点を K とすると、 $K(x, 2y + p)$ 、 $\triangle PKF$ は二等辺三角形となる。したがって、 FK の中点を M とすると $FK \perp MP$ で PM は $\angle KPF$ を 2 等分する。
 FK の傾きは $\frac{2y}{x} = \frac{x}{2p}$ であり、これは点 (x, y) における接線の傾きに等しい。したがって、 PM は点 P における接線に対して垂直になっている。よって軸に平行に入ってきた光 KP は点 P における接線の面に反射されて焦点 F に進むことになる。 P は放物線上のどこでもよいから、全ての軸に平行に入射した光は焦点に集まる。



通常パラボラアンテナは放物面の軸に近い部分を用いる。一見それは、球面の一部と同じように見える。放物面では軸に平行に入射した全ての光 (電波) は焦点に集まり (凸レンズと同じ)、中心に向かって入射した光は軸に対称な方向に反射し (凸レンズでは直進)、これは凸レンズの像のでき方と同じである (反射鏡では、鏡の手前に像ができる)。球面の一部を用いるときは厳密な焦点は存在しないが、球面のごくせまい一部を用いているときは、焦点は近似的に球の半径の半分のところにある。

- 5 関数 $y = ax^2$ の各点での変化の割合が $2ax$ である、ということは変化の割合の変化の割合は $2a$ であり、一定であることを意味している。これは、上に述べたことと同じことを繰り返しているに過ぎないが、別の表現をしてみよう。

$y = ax^2$ で考えてみる。

x	...	$x - h$		x		$x + h$...
y	...	$a(x - h)^2$		ax^2		$a(x + h)^2$...
y の階差	...		$a(2hx - h^2)$		$a(2hx + h^2)$...
第 2 階差	...	$2ah^2$		$2ah^2$		$2ah^2$...

表からわかるとおり、どの x に対しても、幅 h の前後の y の値の差 (階差という) の差は $2ah^2$ で一定になる。これは 2 乗に比例する関数 (一般には二次関数) のみの特徴である。等加速度運動における重力加速度 g の場合は、 $a = \frac{1}{2}g$ であったから、 $2ah^2 = gh^2$ となり、加速度に時間幅 h の二乗を掛けた量になっている。逆に第 2 階差を求め、 h^2 で割っておけば、等加速度の直線運動の加速度が得られる。この話の続きは理科でやろう。

- 6 $y = ax^2$ と x 軸、 $x = x$ で囲まれた面積を求めよう。

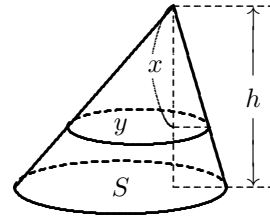
錐体を底面に平行な面で切断したときの断面積は頂点からの距離の 2 乗に比例する。なぜなら切り取られた小さな錐体は元の錐体に相似であり、各面の面積は相似比の 2 乗に比例するからだ。したがって元の錐体の底面積を $S\text{cm}^2$ 、高さを $h\text{cm}$ にとり、切り取られた錐体の頂点から断面 (底面)

までの距離（高さ）を $x\text{cm}$ とすると、
断面積 $y\text{cm}^2$ は

$$y = ax^2, \quad a = S/h^2 \quad (7.5)$$

になる。このときの切り取られた錐体の体積 $V\text{cm}^3$ は

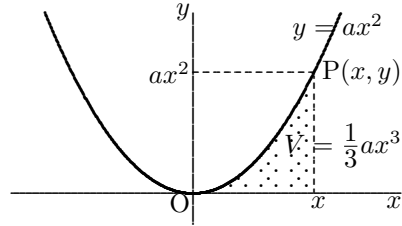
$$V = \frac{1}{3}ax^3 \quad (7.6)$$



となる。さてこの意味を考えてみよう。

まず $y = a$ と x 軸, y 軸, $x = x$ で囲まれた図形（長方形）の面積は ax である。
つぎに $y = ax$ と x 軸, $x = x$ で囲まれた図形（三角形）の面積は $\frac{1}{2}ax^2$ である。

それでは $y = ax^2$ と x 軸, $x = x$ でかこまれた図形の面積は幾らだろうか。これが式 (7.6) の意味で、その面積は $\frac{1}{3}ax^3$ になる。 $y = ax^2$ は 2 辺が x, ax^2 の長方形の 3 等分線の 1 つになっている。



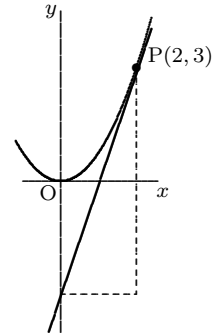
〔例題 3〕 放物線 $y = ax^2$ と直線が点 $P(2,3)$ で接している。

- (1) a の値と直線の式をもとめよ。
- (2) 放物線と直線と y 軸に囲まれた面積を求めよ。

(1) $a = \frac{3}{4}$,

直線は点 $(2,3)$ を通る傾き $2ax = 2 \times \frac{3}{4} \times 2 = 3$ の直線 $y = 3x - 3$

(2) 面積 $\frac{1}{3} \times \frac{3}{4} \times 2^3 + 2 \times 3 - 2 \times (3 - (-3)) \times \frac{1}{2} = 2$



〔演習〕 放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 $P(\alpha, \alpha^2)$, $Q(\beta, \beta^2)$ ($\alpha < \beta$) における接線をそれぞれ l, m とおくと、次の問いに答えよ。(同志社大学)

- (1) 2 つの接線 l, m の交点 R の座標を, α, β を用いて表せ。
- (2) 直線 PQ と放物線によって囲まれる図形の面積 S を, α, β を用いて表せ。
- (3) 線分 PR, QR および放物線で囲まれる図形の面積を T とするとき, $\frac{S}{T}$ の値を求めよ。

グラフを自分で描いてみよう。これまでやってきたいくつかの公式を組み合わせれば、単純な計算問題であることが分かる。

(1) 2 つの接線は $y - \alpha^2 = 2\alpha(x - \alpha)$, $y - \beta^2 = 2\beta(x - \beta)$, 交点は $R(\frac{\alpha + \beta}{2}, \alpha\beta)$ となる。

(2) $S = \frac{\alpha^2 + \beta^2}{2} \times (\beta - \alpha) - \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} = \frac{(\beta - \alpha)^3}{6}$

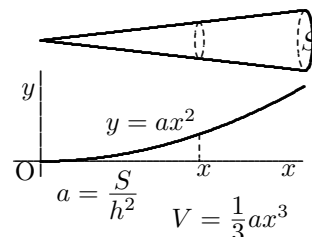
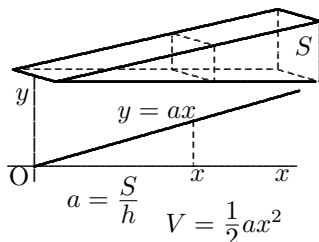
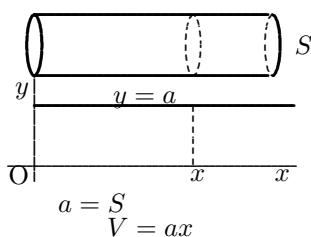
(2 章で学習した因数分解の公式 $x^3 - a^3 = (x - a)(x^2 + ax + a^2)$ を用いた。)

(3) $T = \frac{\beta^3 - \alpha^3}{3} - \frac{\alpha^2 + \alpha\beta}{2} \times (\frac{\alpha + \beta}{2} - \alpha) - \frac{\alpha\beta + \beta^2}{2} \times (\beta - \frac{\alpha + \beta}{2}) = \frac{(\beta - \alpha)^3}{12}$

したがって, $\frac{S}{T} = 2$

同じことを繰り返して見ておく。

各空間図形の高さを h , 底面積を S として頂点あるいは底面からの距離 x での面積を y , x が 0 から x までの体積を V とする。



この結果は、各 x での断面積 y が体積 V の変化の割合である、ということに基づいている。

直線のみからできた図形（多角形）の面積は三角形の面積を組み合わせで計算できる。円周や弧と直線からなる図形は円の面積（ πr^2 ）と三角形の面積を用いて計算できる。同じように上の結果を用いると、2乗に比例する関数（放物線）や直線からできた図形の面積は適当な工夫によって計算できることになった。

もっと一般に、 $y = ax^n$ ($n \neq -1$) と x 軸、 $x = x$ でかこまれた図形の面積は $\frac{ax^{n+1}}{n+1}$ であることが知られている。これは、高校数学の楽しみである。

また、放物線の一部の長さ、たとえば $x = 0$ と $x = x$ のところまで、すなわち曲線 OP の長さはどうなるだろうか。曲線 OP を細かい区間に分割すると、各 x での傾きは $2ax$ だから、 x 軸上の微小な幅に対して、曲線上の長さは $\sqrt{1 + (2ax)^2}$ 倍になっている。これらを加え合わせれば曲線 OP の長さが求められる。しかし、この計算は大学1年まで待つてほしい（高校3年で勉強する人もいる）。

7.2 二次関数

7.2.1 いろいろな移動

平行移動

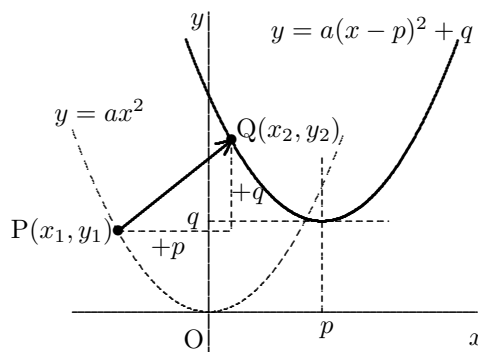
変化の割合が一定でない関数（曲線）を考えると、重要な役割を果たす定理がある。

$y = a(x - p)^2 + q$ のグラフは
 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したグラフである。

したがって、頂点の座標は (p, q) である。

これは、次のようにして理解できる。

$y = ax^2$ 上の点を $P(x_1, y_1)$ とする。点 P を x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動した点を点 $Q(x_2, y_2)$ とすると $x_2 = x_1 + p$ 、 $y_2 = y_1 + q$ となる。 x_1, y_1 は $y_1 = ax_1^2$ を満たすから、 $x_1 = x_2 - p$ 、 $y_1 = y_2 - q$ を代入して、 $y_2 = a(x_2 - p)^2 + q$ となる。すなわち、点 Q は $y = a(x - p)^2 + q$ のグラフ上の点である。これはほとんど自明であるが是非理解しておいてほしい。



繰り返し要約すると、 $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q だけ平行移動したグラフは $x \rightarrow x - p$ 、 $y \rightarrow y - q$ の置き換えを行ったグラフである。

グラフの平行移動の考えは、中学では明確には導入されない。

二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ は常に

$$y = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} \quad (7.7)$$

と変形できるから、1変数の二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは $y = ax^2$ のグラフを x 軸方向に $-\frac{b}{2a}$ 、 y 軸方向に $\frac{4ac - b^2}{4a}$ だけ平行移動したグラフである。すなわち、放物線の頂点の座標は $\left(-\frac{b}{2a}, \frac{4ac - b^2}{4a}\right)$ である。

〔問題〕 次の二次関数が表す放物線の軸の方程式と頂点の座標を言え。

(1) $y = 2x^2 - 3x + 4$

(2) $y = -2x^2 - 4x - 5$

(1) $x = \frac{3}{4}, \left(\frac{3}{4}, \frac{23}{8}\right)$

(2) $x = 2, (2, 3)$

変化の割合が一定でない他の例は反比例を表す関数 $y = \frac{a}{x}$ であった。反比例のグラフが双曲線であることはよく知っている。次の問題を解いて、グラフに表してみよう。

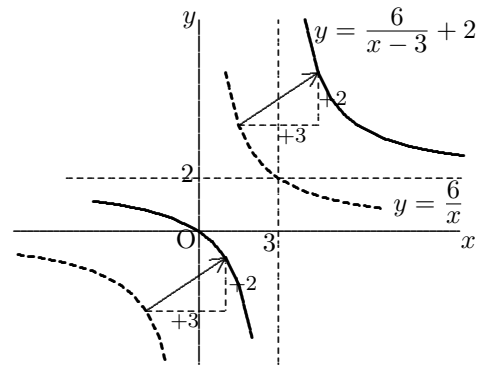
「 $y - 2$ が $x - 3$ に反比例し、 $x = 4$ のとき、 $y = 8$ とする。 y を x の式で表せ。また、そのグラフを書

きなさい。」

$y - 2$ が $x - 3$ に反比例するから、求める関数を
 $y - 2 = \frac{a}{x - 3}$ とおく。 $x = 4$ のとき、 $y = 8$ より、
 $8 - 2 = \frac{a}{4 - 3}$ 、したがって、 $a = 6$ である。よって

$$y - 2 = \frac{6}{x - 3}, \quad y = \frac{6}{x - 3} + 2$$

である。グラフは $y = \frac{6}{x}$ を x 軸方向に $+3$ 、 y 軸方向に $+2$ 平行移動したのになっている。レンズの公式を思い出そう。



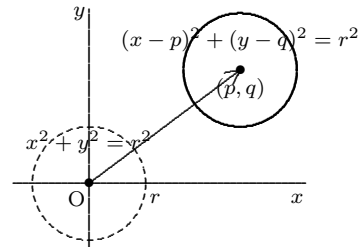
原点を中心とし、半径が r の円の方程式は

$$x^2 + y^2 = r^2$$

また半径 r 、中心が (p, q) の円は

$$(x - p)^2 + (y - q)^2 = r^2$$

である。これは、元の方程式で、 $x \rightarrow x - p$ 、 $y \rightarrow y - q$ と置き換えた式になっている。上の2つの例、2乗に比例する関数の場合も、反比例の場合も同じようになっている。



【問題】 x 軸に接し、中心が $x = 3$ の直線上にある半径2の円の方程式を求めよ。

答え $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

再度、以上のことをまとめると、

関数 $f(x, y) = 0$ のグラフを x 軸方向に p 、 y 軸方向に q 平行移動したグラフの方程式は $f(x - p, y - q) = 0$ である。

となる。ここで、関数 $f(x, y) = 0$ の表現は、たとえば、 $y = 3x^2 + 2x + 4$ などの2次関数の場合、 $y - (3x^2 + 2x + 4) = 0$ と表せる。したがって、 $f(x, y) = y - (3x^2 + 2x + 4)$ と置いたものに対応する。 y が x の関数であるとは、定義域の x を与えたとき、 y がただ一つ決まることを言う。したがって、 $f(x, y) = 0$ を y について解いた式があるはずであり、今の場合それが $y = 3x^2 + 2x + 4$ ということである。

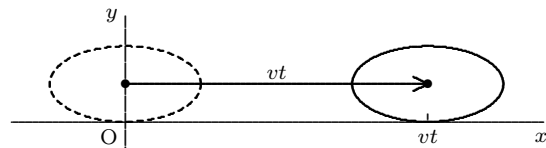
一例をしめす。

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} - 1 = 0$$

は、長軸 a 、短軸 b ($a > b > 0$) の楕円が原点の上に乗っているグラフとなる。この時、

$$\frac{(x - vt)^2}{a^2} + \frac{(y - b)^2}{b^2} - 1 = 0$$

は、上の楕円が x 軸に接しながら、速度 v で進んだ時の時刻 t の楕円を表す。



対称移動

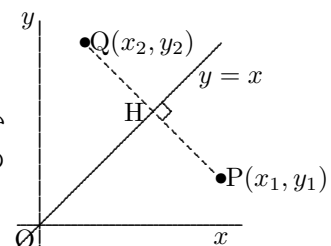
次に、1つのグラフの y 軸に対称なグラフは $x \rightarrow -x$ と置き換えればよいことはすぐわかる。すなわち、

グラフ $f(x, y) = 0$ の y 軸に対称なグラフは $f(-x, y) = 0$ である。
 グラフ $f(x, y) = 0$ の x 軸に対称なグラフは $f(x, -y) = 0$ である。

$y = x$ に関して、点 $P(x_1, y_1)$ に対称な点を $Q(x_2, y_2)$ とすると、

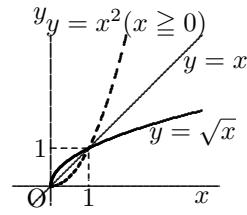
$$x_2 = y_1, \quad y_2 = x_1$$

となる。点 (x_1, y_1) が関数 $f(x, y) = 0$ 上の点とすると、 $f(x_1, y_1) = 0$ だから、 $f(y_2, x_2) = 0$ となる。すなわち、 $f(y, x) = 0$ のグラフは $f(x, y) = 0$ のグラフの $y = x$ に対称なグラフとなる。

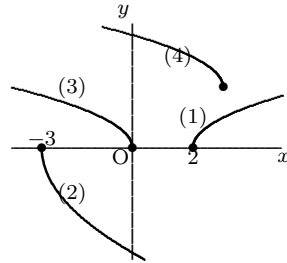


$y = x$ に関して、 $f(x, y) = 0$ のグラフに対称なグラフの式は $f(y, x) = 0$ である。

$y = x^2, x \geq 0$ の $y = x$ に関して対称なグラフの方程式は、
 $y = \sqrt{x}$
 である。



- 〔例題 1〕 次のグラフの概形を描け。
 (1) $y = \sqrt{x-2}$ (2) $y = -2\sqrt{x+3}$
 (3) $y = \sqrt{-x}$ (4) $y = \sqrt{-x+3} + 2$



〔例題 2〕 次の不等式を解け。

$$\sqrt{x+3} \geq x+1$$

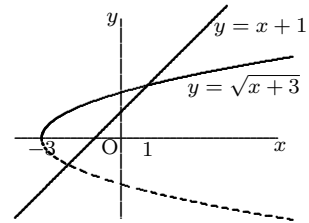
$y = \sqrt{x+3}, y = x+1$ のグラフを描いてみる。共通な定義域は $x \geq -3$ 、値域は $y \geq 0$ である。

2つの関数のグラフの交点は

$$\sqrt{x+3} = x+1 \quad \text{両辺を平方して, } x^2 + x - 2 = 0$$

(両辺を平方すると、 $\sqrt{x+3} = -(x+1)$ も方程式に含まれることになる。
 これは、解の選択時に排除しなければならない)

$$(x+2)(x-1) = 0 \quad x = 1 \quad \text{従って, } -3 \leq x \leq 1$$



平面図形において、一般の直線に対する対称移動が簡単に記述できることは極めて重要である。なぜなら、図形の移動について既に証明した通り、全ての移動は対称移動の組み合わせで表現することができるからである。

一般の直線 $l: ax + by + c = 0$ に関して、点 $P(x_1, y_1)$ に対称な点を $Q(x_2, y_2)$ とする。

直交条件より、
$$\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \times \left(-\frac{a}{b}\right) = -1$$

PQ の中点が直線 l 上にある条件より、
$$a \times \frac{x_1 + x_2}{2} + b \times \frac{y_1 + y_2}{2} + c = 0$$

これを x_1, y_1 について解くと

$$x_1 = \frac{b^2 - a^2}{a^2 + b^2} x_2 - \frac{2ab}{a^2 + b^2} y_2 + \frac{2ac}{a^2 + b^2} \quad y_1 = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} y_2 - \frac{2ab}{a^2 + b^2} x_2 + \frac{2bc}{a^2 + b^2}$$

これを元の関数 $f(x, y) = 0$ に代入すれば、対称移動した点 $Q(x_2, y_2)$ が満たす方程式が得られる。ちなみに、以下の対応がある。

y 軸対称移動: $a = 1, b = 0, c = 0$ x 軸対称移動: $a = 0, b = 1, c = 0$ $y = x$ 対称移動: $a = 1, b = -1, c = 0$

回転移動

原点の周りに、点 (x_0, y_0) を 45° 反時計回りに回転した点を $Q(x, y)$ とする。

$OP = OQ = r$ とすると、

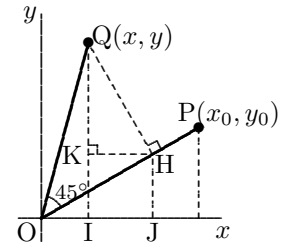
$$x = OJ - KH = r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x_0}{r} - r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{y_0}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 - y_0) \quad \cdots (1)$$

$$y = HJ + QK = r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{y_0}{r} + r \times \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x_0}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}}(x_0 + y_0) \quad \cdots (2)$$

(1), (2) を x_0, y_0 について解くと

$$x_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \quad y_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)$$

となる。したがって、



$f(x, y) = 0$ のグラフを原点のまわりに反時計回りに 45° 回転したグラフの方程式は

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}(x + y), \frac{1}{\sqrt{2}}(-x + y)\right) = 0 \quad \text{である。}$$

〔問題〕 $f(x, y) = 0$ のグラフを原点のまわりに反時計回りに 30° 回転したグラフの方程式は

$$f\left(\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y), \frac{1}{2}(-x + \sqrt{3}y)\right) = 0 \quad \text{であることを導け。}$$

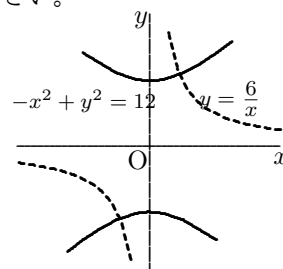
中学ではグラフの一般の回転を式で表すうまい「手だて」を持っていないが、一般の回転も式で表すことができることは容易に想像できる(三角関数の加法定理は『中学数学発展』にある)。

以下双曲線について議論する。双曲線は二次曲線の項を参照してください。

反比例 $y = \frac{6}{x}$
 のグラフを原点を中心に 45° だけ反時計回りに回転すると

$$-x^2 + y^2 = 12$$

となることは理解できる(各 x にたいして、 y をプロットすればよい。ただし、1つの x にたいして、2つの y が対応することもあるから注意)。これは $x \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(x+y)$, $y \rightarrow \frac{1}{\sqrt{2}}(y-x)$ の置き換えによって実現できる。



直角双曲線 $x^2 - y^2 = a^2$ を 45° 回転したグラフの式は

$$xy = \frac{a^2}{2} \quad \text{すなわち} \quad y = \frac{a^2}{2x}$$

となる。 y は x に反比例し、比例定数が $\frac{a^2}{2}$ の場合に対応する。反比例のグラフは双曲線の一種であることがわかった。

平行移動、対称移動に比べ、回転移動は特別の角度に対してだけ議論した。それは、任意の回転角に対する取り扱いのための数学的準備ができていなかったからである。

ここでは、結論だけを示しておくが、近い将来、中学でも取り扱うべきであると確信している。

$f(x, y) = 0$ のグラフを原点の周りに θ だけ回転したグラフの方程式は、

$$f(x \cos \theta + y \sin \theta, -x \sin \theta + y \cos \theta) = 0$$

である。

相似変換, その他

相似の位置にある2つの図形は相似であった。元の図形を式で表し、相似の中心を原点にとれば、 $x \rightarrow x/m$, $y \rightarrow y/m$ の置き換えによって、相似比 m のグラフが得られることは容易にわかる。

このように、図形の性質を議論する時の基本的な手法はグラフの変換に対応する。もっと一般に図形の性質を調べることは、

図形 \leftrightarrow グラフ \leftrightarrow 式(方程式)

によって、式を通して図形を調べることと同じことである。図形の性質を調べる数学を「幾何学」という。我々が学習してきたユークリッドの幾何学は幾何学の出発点である。図形の性質や原理をそれぞれ式で定義し、式を用いてそれらの関係を明らかにする。幾何学の対象が広がると、平面の紙の上で表現できないことまで取り扱うようになり、紙の上で描かれる図はその幾何学の極めて限定された一部の特徴を表現する事になる。高校では、ユークリッド幾何学の範囲で、図形の性質を式を用いてかなり調べることができるようになる。これを「座標幾何」と呼んでいる。

7.2.2 放物線

鉄球が空気の抵抗を受けないで自由落下すると、その速さは一定の割合で速くなる。この速さの変化の割合を加速度と言う。自由落下の場合は重力加速度といい、 $g = \text{約 } 9.8\text{m/s}^2$ となる。すなわち毎秒毎秒 9.8m の割合で速さが速くなる。これは物体の自由落下の過程で物体に働く力(重力)が一定であり、加速度が力に比例していることによる。重力は物体の運動状態によらず同じ大きさなのである。

速さが一定の運動では時間 t の間に動いた距離 y は時間に比例し、速さを v とすると $y = vt$ であることはよく知っている。静止していた物体が直線上を等加速度 g で運動した時、速さ v , 動いた距離 y は $v = gt$, $y = \frac{1}{2}gt^2$ となる。どうして、速さから道のりが得られるのか、後でも何度も触れるが、理科も含めて、中学数学の基本になるから、ここで明確に理解しておこう。

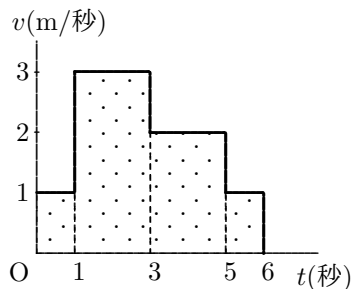
はじめに、速さ $v = 1\text{m/秒}$ で1秒間、続いて速さ $v = 3\text{m/秒}$ で2秒間、続いて速さ $v = 2\text{m/秒}$ で2秒間、続いて速さ $v = 1\text{m/秒}$ で1秒間、歩いた場合を考える。一体、はじめから何メートル進んだのだろうか。

道のりは「速さ \times 時間」である。速さが一定の時はこれが全てである。この問題では速さは全体の区間では変化するが、それぞれの区間では一定である。

したがって、全体として、進んだ道のり y_m は各区間に進んだ道のりを加えあわせればよい。

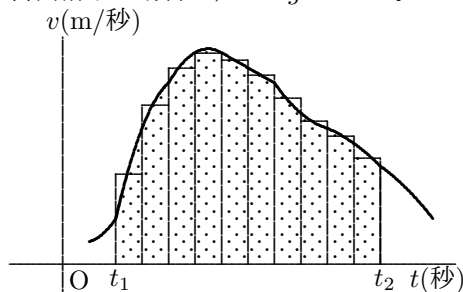
$$y = 1 \times 1 + 3 \times 2 + 2 \times 2 + 1 \times 1 = 12 \text{ (m)}$$

となる。これは、進んだ道のりは、進んだ時間の間の速さのグラフと、横軸で挟まれた面積になっていることを示している。

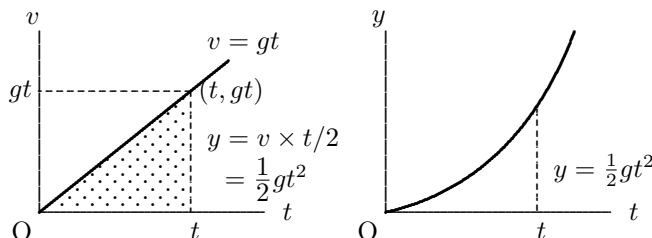


次に、時々刻々速さが連続的に変わる場合を考えてみよう。自由落下の場合は、 $v = gt$ である。

$t = t_1$ と t_2 の区間を細かく分割し、各区間ではその区間の適当な速さを用いて進んだ道のりを求め、これらを加え合わせれば、 t_1 秒と t_2 秒の間に進んだ道のりが得られる。厳密にはこれをいくらでも細かく分割すれば、いくらでも正確に求まる。こうして、横軸に時間、縦軸に速さをとれば、進んだ道のりはその時間間隔のグラフと時間軸で囲まれた面積となる ($v < 0$ の部分は、負の面積とする)。



今の場合、縦軸に速さ、横軸に時間を取り、静止している物体が加速度 g で動いたときの t 秒後の速さは $v = gt$ (m) となり、 t 軸と時刻 t で囲まれた面積は $gt \times t/2$ であり、 $y = \frac{1}{2}gt^2$ であることが理解できる。



速さは時々刻々の道のりの変化の割合であり、縦軸に変化の割合、横軸に時間のグラフをえがけば、グラフと横軸ではさまれた t_1 と t_2 の間の面積はその間に進んだ道のりである。この考えを一般化すると、

変数 x の関数 y を考えると、関数 y の変化の割合を縦軸に、 x を横軸に選ぶと、 x_1 と x_2 の間の y の変化は横軸とではさまれた面積となる。

となる。速さ、時間、道のりでは時間 $t \rightarrow x$ 、速さ $v \rightarrow y$ の変化の割合、道のり $y \rightarrow y$ の対応である。

もし地上で斜め上向きに鉄球を投げたら、どうなるかを考えよう。

斜め上向きだから、はじめの早さは横向きには u_0 、上向きの早さを v_0 とする。横向きには早さは変わらないから t 秒後には $x = u_0t$ だけ進む。

上向きの早さは時間とともに減少し $v = v_0 - gt$ となる。したがって t 秒後の高さは

$$y = v_0t - \frac{1}{2}gt^2 = -\frac{1}{2}g\left(t - \frac{v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

となる。

$t = x/u_0$ を y の式に代入すると

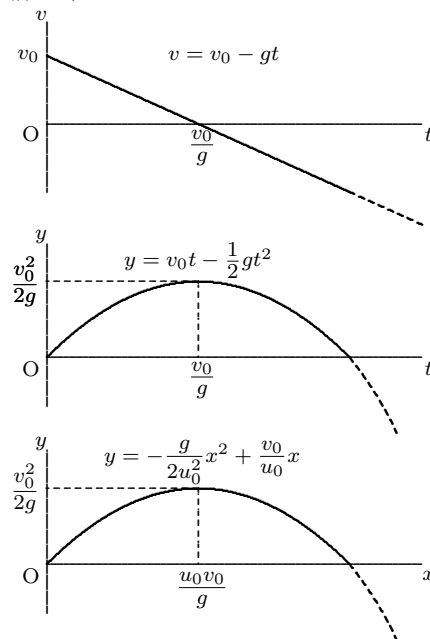
$$y = -\frac{g}{2u_0^2}x^2 + \frac{v_0}{u_0}x = -\frac{g}{2u_0^2}\left(x - \frac{u_0v_0}{g}\right)^2 + \frac{v_0^2}{2g}$$

が得られる。これが鉄球の軌跡である。 x 軸を正の方向に u_0v_0/g 、 y 軸を正の方向に $v_0^2/2g$ だけずらすと次のようになる。

$$y = -\frac{g}{2u_0^2}x^2$$

一般に、 $y = ax^2$ と同じ形をした曲線を「放物線」と言う。

時間に対する速度と位置のグラフを並べて描くと、



〔例題 1〕 $y = x^2 - 2x + 3$ のグラフを描き、 $x = 3$ における接線の式を求めよ。

$y = x^2 - 2x + 3 = (x-1)^2 + 2$ だから、 $y = x^2$ のグラフを x 軸方向に 1、 y 軸方向に 2 だけ平行移動したグラフである。また、 $x = 3$ のとき、 $y = 6$ でこれは $y = x^2$ のグラフ上の点 $(2, 4)$ を同じ量だけ平行移動した点である。したがって、 $y = x^2 - 2x + 3$ の $x = 3$ における接線の傾きは、 $y = x^2$ の $x = 2$ における接線の傾きと同じであり、 $2ax_0 = 2 \times 1 \times 2 = 4$ となる。よって、接線の方程式は $y - 6 = 4(x - 3)$ となる。

別の考え方をしてみる。 $y = x^2 - 2x + 3$ 上の点 $(3, 6)$ をとおる直線の方程式を $y - 6 = m(x - 3)$ とする。放物線と直線のもう一つの交点を求めるため、連立方程式を解いてみる。

$y = x^2 - 2x + 3$ 、 $y - 6 = m(x - 3)$ より、 $x^2 - (m+2)x + 3m - 3 = 0$ 。 x に関する二次方程式の一つの解は $x = 3$ である。もう一つの解が求める交点に対応する。二次方程式のところで議論するが、この解も $x = 3$ の場合 (重解) は、2つの交点が重なった、あるいは、もう一つの解が $x = 3$ に近づいて一つになった、と考える事が出来る。したがって、このときの直線の傾き m は $x = 3$ における接線の傾きと考えられる。重解の条件は判別式 $D = 0$ だから、

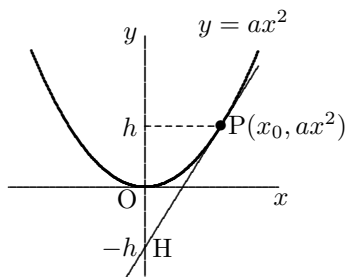
$$D = (m+2)^2 - 4 \times 1 \times (3m-3) = 0, m^2 - 8m + 16 = 0, m = 4$$

こうした解答は、高校1年で学ぶ接線の求め方である。

さらに、もっと一般的に関数を分析するためには、「微分法」を学ばねばならない。

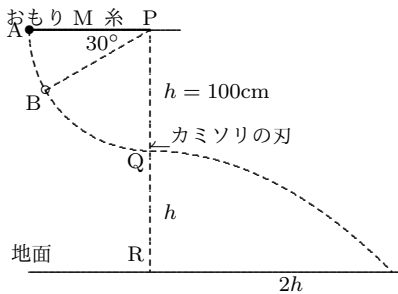
$y = ax^2$ 上の点 $P(x_0, ax_0^2)$ の接線の y 軸との交点の y 座標 (切片) は、 $h = ax_0^2$ とすると $y = -h$ である。

次の例題はこの性質を用いて解く理科の特殊な問題である。

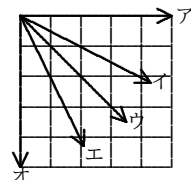


【例題2】 重り M を長さ 100cm の糸で P 点からつり下げる。右の図のように、おもり M を、A 点 (P と同じ高さの点まで) 糸を張ったまま持ち上げま持ち上げて、静かに (初速 0 で) はなすものとする。おもり M が Q 点 (P の真下の点) を通過する瞬間に、重りの直ぐ上で糸が切れるように、カミソリの刃が設置してある。Q 点から 100cm 下に水平な地面がある。糸の質量や空気の抵抗を無視するものとして問にこたえよ。

なお、おもりの速度の大きさは運動エネルギーできまり、「運動エネルギーは速度の大きさの 2 乗に比例する」ことが分かっている。また、おもりを A で放した場合、Q で運動エネルギーは、A と Q におけるおもりの位置エネルギーの差に等しい。(灘高改)



- (1) 糸が切れた直後の、M の運動の向きを右の矢印ア～オから選べ。
- (2) 地面に衝突する直前の、M の運動の向きを右の矢印ア～オから選べ。
- (3) M が地面に衝突する位置は、Q の真下の点 R から何 cm 離れた位置か。
- (4) 今度は M を図の B 点 ($\angle APB = 30^\circ$) までもちあげて静かに放したとすると、M が地面に衝突する位置は、Q の真下の点 R から何 cm 離れた位置か。



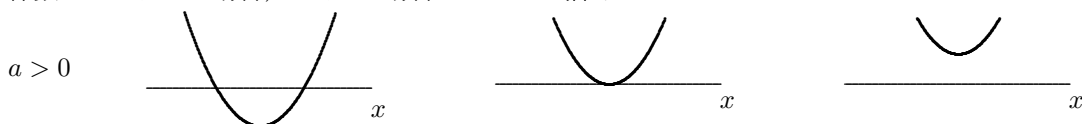
- (1) 速度の方向は軌道の接線方向である。ア (2) Q 点を基準にした A 点での位置エネルギーは mgh 、Q 点での速さを v とすると、Q 点での運動エネルギーは $\frac{1}{2}mv^2$ 、したがって、力学的エネルギー保存の法則から、A 点での位置エネルギーが Q 点での運動エネルギーに変わったとして、 $mgh = \frac{1}{2}mv^2$ 。 $v^2 = 2gh$ 、Q 点から地面に落ちるまでの時間を t とすると、 $\frac{1}{2}gt^2 = h$ 、 $t^2 = \frac{2h}{g}$ 、R から落下点までの距離は $vt = \sqrt{v^2 t^2} = 2h$ 、落下点での運動の方向は、落下点での軌道の接線の方向だから、落下点と点 P を結ぶ方向である。ウ (3) $2h = 200\text{cm}$ (4) Q 点での速度は $v^2 = gh$ 、したがって、R から落下点までの距離は $vt = \sqrt{v^2 t^2} = \sqrt{gh \times \frac{2h}{g}} = \sqrt{2}h = 100\sqrt{2}\text{cm}$ 。

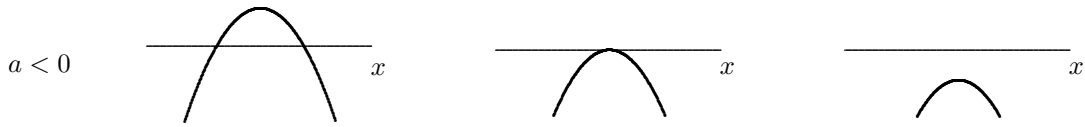
7.3 二次方程式

はじめに、二次方程式の解法について考える。

二次方程式を $ax^2 + bx + c = 0 (a \neq 0)$ とする。そのため

$y = ax^2 + bx + c$ とおいて、式 (7.7) のように二次関数は常に放物線で描けることを思い出す。 x の 2 乗の係数 a が $a > 0$ の場合、 $a < 0$ の場合をグラフに描くと





$b^2 - 4ac > 0$ のとき解は 2 つ $b^2 - 4ac = 0$ のとき解が 1 つ $b^2 - 4ac < 0$ のとき解なしの 6 つの場合があることがわかる。二次方程式は二次関数 $y = ax^2 + bx + c$ で $y = 0$ とすることだから、その解はグラフが x 軸と交わる点の x 座標になる。左のグラフの場合は 2 つの解が得られ、真ん中の場合は一つだけ解が得られ、右の場合は解はない。式 (7.7) を思い出すと、

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

したがって

$$a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{4ac - b^2}{4a} = 0$$

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

したがって

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

よって

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

となる。この過程で、 $b^2 - 4ac \geq 0$ を用いている。すなわち、 $b^2 - 4ac$ が正か、0 か、負かによって解の数が異なってくる。 $D = b^2 - 4ac$ とおいて、これを判別式という。

したがって、二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の解の公式

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad D = b^2 - 4ac \geq 0 \quad (7.8)$$

が得られる。まとめると、

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) について、

判別式を $D = b^2 - 4ac$ とおくと、

$$D > 0 \text{ のとき、異なる 2 つの解} \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$D = 0 \text{ のとき、一つの解 (重解)} \quad x = -\frac{b}{2a}$$

$D < 0$ のとき、解なし

となる。

一次の係数が偶数のとき、 $b = 2b'$ (b' は整数) として、 $ax^2 + 2b'x + c = 0$ ($a \neq 0$) の解の公式

$$x = \frac{-b' \pm \sqrt{b'^2 - ac}}{a} \quad (7.9)$$

となる。公式 (7.8) などは、バランスが悪いと感じる人がいると思うが、その解決は高校で「複素数」の考えで解決される。

二次方程式の解法が得られたということは、次のようにして二次不等式の解法が得られたことでもある。

二次不等式 $2x^2 - 3x - 2 > 0$ を考える。

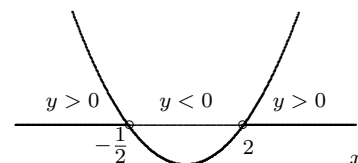
$$y = 2x^2 - 3x - 2 \text{ とおく。変形すると、} y = 2\left(x - \frac{3}{4}\right)^2 - \frac{25}{8} \text{ となり、}$$

$$y = 2x^2 - 3x - 2 \text{ のグラフは } y = 2x^2 \text{ のグラフを } x \text{ 軸方向に } \frac{3}{4}, y \text{ 軸}$$

方向に $-\frac{25}{8}$ だけ平行移動したグラフである。2 つの x 軸との交点の x 座

標は二次方程式 $2x^2 - 3x - 2 = 0$ の解で、 $x = -\frac{1}{2}, 2$ である。不等式は

$y > 0$ だから、解は $x < -\frac{1}{2}, x > 2$ となる。



また、もとの不等式が $2x^2 - 3x - 2 \leq 0$ ならば、解は $-\frac{1}{2} \leq x \leq 2$ となる。

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の 2 つの解が A, B ということは恒等式 (x の値に関わらず成り立つ等式)

$$ax^2 + bx + c = a(x - A)(x - B) \quad (7.10)$$

が成り立つことを意味する。したがって、2次式の因数分解の因数がうまく見つけられないときは、二次方程式を解の公式を用いて解いて2つの解 A, B をもとめ、(7.10) を適用すれば因数分解したことになる。

たとえば、 $12x^2 - 11x - 15$ の因数分解がうまくできなかったとする。

二次方程式 $12x^2 - 11x - 15 = 0$ は解の公式によって $x = -\frac{3}{4}, \frac{5}{3}$ と得られるから

$$12x^2 - 11x - 15 = 12(x + \frac{3}{4})(x - \frac{5}{3}) = (4x + 3)(3x - 5)$$

となる。

この考えから、 $ax^2 + bx + c = 0$ の解 A, B が無理数となることもある。この場合でも (7.10) は成り立ち、因数分解できたことになる。

$$x^2 - 2 = (x + \sqrt{2})(x - \sqrt{2})$$

$$x^2 - 2x - 1 = 0 \text{ の解は } x = 1 \pm \sqrt{2} \text{ だから } x^2 - 2x - 1 = \{x - (1 + \sqrt{2})\}\{x - (1 - \sqrt{2})\}$$

また式 (7.10) は $ax^2 + bx + c = ax^2 - a(A + B)x + aAB$ となり、

二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ ($a \neq 0$) の2つの解を A, B とすると、

$$A + B = -\frac{b}{a}, \quad AB = \frac{c}{a} \quad (7.11)$$

となる。これは、高校では「解と係数の関係」として重要視される。

「 $x^2 - 3x - 5 = 0$ の2つの解を A, B とするとき、 $A^2 - AB + B^2$ の値を求めよ。」とあれば、 $A + B = 3, AB = -5$ だから、 $A^2 - AB + B^2 = (A + B)^2 - 3AB = 3^2 - 3 \times (-5) = 24$ と求まる。よく、 A, B の対称式 (A, B を入れ替えたとき元の式になるもの) の値が問われる。対称式は基本対称式 (今の場合、 $A + B$ と AB) で表される。

たとえば、「二次方程式 $2x^2 - x + 3 = 0$ の2つの解を A, B とするとき、2数 A^2, B^2 を解に持つ二次方程式を1つ作れ。」とあれば、求める方程式は $x^2 - (A^2 + B^2)x + A^2B^2 = 0$ と表せる。 $A + B = \frac{1}{2}, AB = \frac{3}{2}$ より、 $A^2 + B^2 = -\frac{11}{4}, A^2B^2 = \frac{9}{4}$ 。従って求める方程式は $x^2 + \frac{11}{4}x + \frac{9}{4} = 0$ 、すなわち、 $4x^2 + 11x + 9 = 0$

二次方程式の因数分解による解き方について一言述べておこう。

$x^2 - x - 6 = 0$ を解くとする。ただちに因数分解ができ、 $(x + 2)(x - 3) = 0$ となる。 $ab = 0$ となるのは $a = 0$ または $b = 0$ のときだけである。したがって $x + 2 = 0, x - 3 = 0$ となる。

したがって $x = -2$ 、または $x = 3$ となる。よって $x = -2, 3$ である。

この論理に疑問を持つ人がいると思うが、これでよいのである。「二次方程式を解く」とは二次方程式を満たすすべての解を求めることである。したがって、 $x = -2$ も $x = 3$ も解である。二次方程式の解を $x = -2, 3$ と書くのは、 $x = -2$ と $x = 3$ という意味である。 $x = -2$ または $x = 3$ という意味ではない。 $x = -2$ も $x = 3$ も解であるから、どちらも解であるように表現したのである。

我々が学んだ図形の理論は、ユークリッド幾何学と呼ばれている。ユークリッド幾何学は、「公法通り」の「作図」を基礎にしていた。そこには、直線や円があり、それらの交点がある。直線は、一般に $ax + by + c = 0$ で現わされ、円の方程式は $x^2 + y^2 + dx + ey + g = 0$ と表される。

例で考えよう。2つの円 $x^2 + y^2 + dx + ey + f = 0 \cdots \textcircled{1}$ と $x^2 + y^2 + gx + hy + j = 0 \cdots \textcircled{2}$ の交点を求めるとする。

① - ② より、 $(d - g)x + (e - h)y + (f - j) = 0 \cdots \textcircled{3}$ が得られる。これは2つ円①②の2つの交点を通る直線である。したがって、2つの円の交点を求めるには、例えば、円の①と直線の③の連立方程式を解けばよい。その解は、もともとの方程式の係数に平方根を含んだ数から成り立っていたとしても、有理数と有限個の平方根 (二重根号を含んでもよい) から成り立つ。即ち、作図して得られるすべての点の座標は、有理数といくつかの平方根から表現できる。「一般の角の三等分の作図できない」はこのことの逆を用いて証明される。これは、中学数学の範囲を超える。

ここで、二次方程式に関する問題を練習しておこう。

1 計算を中心とした問題

- [1] 二次方程式 $x^2 - 6x - a = 0$ の1つの解が7のとき、 a の値と、他の解を求めよ。
 ヒント： 方程式の解とは何か、を確認しておこう。 ($a = 7, x = -1$)
- [2] x に関する方程式 $ax^2 - (a-1)x - (a^2 - 1) = 0$ ($a \neq 0$) の1つの解が -1 のとき、 a の値と他の解を求めよ。 ($a = 2, x = \frac{3}{2}$)
- [3] 二次方程式 $ax^2 - bx + 6 = 0$ がある。この方程式の1つの解が2で、 $b - a$ の値が4であるとき、 a, b の値と、もう一つの解を求めよ。 ($a = 1, b = 5, x = 3$)
- [4] 二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の二つの解が、方程式 $x^2 + x - 6 = 0$ の二つの解よりそれぞれ3大きい。 a, b の値を求めよ。 ($a = -5, b = 0$)
- [5] 次の方程式を解きなさい。
 (1) $\frac{x^2}{3} - \frac{7}{6}x + \frac{1}{2} = 0$ (2) $10x^2 = (3x - 5)(2x - 1) - 15$
 (3) $0.1x^2 + 0.4x = 1.2$ (4) $6x^2 - 7x + 2 = 0$
 ヒント： 敢えて計算問題を取り上げたのは、検算 の習慣を付けるためである。

- [6] 二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ について、
 (1) 二つの解 $A, B (A > B)$ とするとき、 A, B を a, b, c で表せ。
 (2) $A + B, A \cdot B$ を a, b, c で表せ。
 (3) $2x^2 + 3x + 4 = 0$ の2つの解を A, B とするとき、 $A + B, A \cdot B$ の値を(2)の結果を用いて求めよ。
- [7] 二次方程式 $3x^2 - 6x + 1 = 0$ の2つの解を A, B とするとき、次の値を求めよ。
 (1) $A + B$ (2) AB (3) $A^2 + B^2$ (4) $(A - B)^2$
 (5) $(1 - A)(1 - B)$ (6) $\frac{B}{A} + \frac{A}{B}$
 ヒント： 解と係数の関係から(1),(2)に答え、後はいずれも A, B についての対称式であることを利用する。

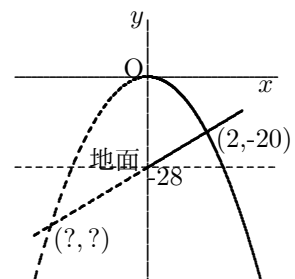
(1)2 (2) $\frac{1}{3}$ (3) $\frac{10}{3}$ (4) $\frac{8}{3}$ (5) $-\frac{2}{3}$ (6)10

- [8] 二次方程式 $x^2 - 14x - 1 = 0$ の2つの解を $a, b (a < b)$ とするとき、 $ab = \square$ で、 $a^{15}b^{17} + a^{12}b^{10} = \square$ である。(大阪星光学院高)
 $a + b = 14, ab = -1$ 。 $(b - a)^2 = (a + b)^2 - 4ab = 14^2 - 4 \times (-1) = 200, b - a > 0$ より、 $b - a = 10\sqrt{2}$ 。 $a^{15}b^{17} + a^{12}b^{10} = (ab)^{10} \{ (ab)^5 b^2 + a^2 \} = -b^2 + a^2 = (a + b)(a - b) = 14 \times (-10\sqrt{2}) = -140\sqrt{2}$

2 二次方程式の応用問題についても触れておこう。

- [1] 「地上28mのところにあったエレベーターのロープが切れた。一方別のエレベーターはその瞬間秒速4mで上昇し始めた。2つのエレベーターの高さが一致するのは何秒後か。」

空気抵抗などを無視するとエレベーターの加速度は毎秒毎秒約10mとする。地上28mを高さ0m、落下を始めた時刻を0秒とすると、 x 秒で落下しているエレベーターの高さは $y = -5x^2$ となる。一方上昇するエレベーターの高さは $y = 4x - 28$ である。したがって、2つのエレベーターが同じ高さとなる x は二次方程式 $-5x^2 = 4x - 28$ をみたく。 $x = 2, -2.8$ となる。 $x > 0$ だから $x = 2$ である。よって2秒後に同じ高さになる。



2つのことに注意を向けてほしい。その一つは、中学では一般の二次関数を取り扱わない。したがって、二つ以上の一般の二次関数の問題は中学の範囲を超えるが、二次関数が一つだけ出てくる問題は(7.7)で考えたように、適当な平行移動によって2乗に比例する関数に変換できる。いいかえれば、座標の原点を適当に選ばなければ、2乗に比例する関数とならず、取り扱いの範囲を超える。

もう一つ、この方程式のように、多くの場合二次方程式の解は2つある。題意に適した解を

選ぶことが必要である。この問題では、 $x \geq 0, y \geq -28$ である。それでは、選ばれなかった $x = -2.8$ は何を意味しているのだろうか。それは、 $y = -5x^2, y = 4x - 28$ の解であるのだが、2つのエレベーターが会うという現実、すなわち $x \geq 0, y \geq -28$ の条件を満たさないというだけで排除された解である。こうした解を「無縁解」ということもある。無縁解は全く意味がないわけではなく、エレベーターが放り上げられて、地上 28m に達して落下を始めた。もう一方のエレベーターも地下かなり深いところから秒速 4m で上昇し、ちょうど $t = 0$ で地上に達していたとすると、2つのエレベーターは $t = -2.8$ 秒で同じ高さになっていたことになる。「無縁」とは全く意味がないわけではなく、問題をより広く、深く考察する重要な部分になっている。

- [2] 単価を x 割やすくすると、売り上げ個数が、 $2x$ 割増加する商品がある。次の問に答えよ。
- (1) 単価 a 円するとき、売り上げ個数が b 個であると、単価を x 割りやすくしたときの総売上げ金額を a, b, x を用いて表せ。
- (2) 総売上金額を、割引前のそれより 1 割増やすには、何割やすくすればよいか、分のくらいまで求めよ。ただし、5 割より大きい割引はないとする。

$$\left((1) \quad ab\left(1 - \frac{x}{10}\right)\left(1 + \frac{x}{5}\right) \text{円}, \quad (2) \quad 3.6 \text{割または} 1.4 \text{割} \right)$$

- [3] 以下は 19 年度の灘高の入試問題だ。

「 a を定数とする。 x の二次方程式

$$x^2 - 2ax + a + 8 = 0 \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 - (a + 8)x + 8a = 0 \cdots \textcircled{2}$$

がある。 $\textcircled{1}$ の解を p, q , $\textcircled{2}$ の解を r, s とすると、 p, q, r, s を小さい順に並べると、隣り合う 2 つの数の差がいずれも等しくなった。 a の値を全て求めると である。」

とりあえず、 $\textcircled{1}$, $\textcircled{2}$ を解かねばならない。

$$\textcircled{1} \quad \text{解の公式を用いて,} \quad x = a \pm \sqrt{a^2 - a - 8}$$

$$\textcircled{2} \quad \text{因数分解して,} \quad x = a, 8$$

問題は、この 4 つの解を小さい順に並べると、「それぞれ隣り合う 2 つの数の差がいずれも等しくなる」をどう表現するかである。とりあえず分るものだけ並べてみる。

$$a - \sqrt{a^2 - a - 8}, a, a + \sqrt{a^2 - a - 8}$$

幸いなことに、この 3 つは、隣り合う 2 つの差は、同じ $\sqrt{a^2 - a - 8}$ である。したがって、第 4 の解 $x = 8$ は、この並びの両端のどちらかしかありえない。

8 が左端に来るとする。

$$\begin{aligned} \{a - \sqrt{a^2 - a - 8}\} - 8 &= a - \{a - \sqrt{a^2 - a - 8}\} \\ a - 8 &= 2\sqrt{a^2 - a - 8} \quad a^2 + 4a - 32 = 0 \quad a = -8, 4 \end{aligned}$$

どちらも条件 ($8 < a$) に合わない。

8 が右端に来るとする。

$$\begin{aligned} \{a + \sqrt{a^2 - a - 8}\} - a &= 8 - \{a + \sqrt{a^2 - a - 8}\} \\ 8 - a &= 2\sqrt{a^2 - a - 8} \quad a = -8, 4 \end{aligned}$$

$$a = -8 \text{ のとき, } -16, -8, 0, 8$$

$$a = 4 \text{ のとき, } 2, 4, 6, 8$$

よって、 $a = -8, 4$

塾には、二次方程式、二乗に比例する関数に慣れるための系統的なプリントが多数用紙されている。それらを利用してほしい。

7.4 その他の関数

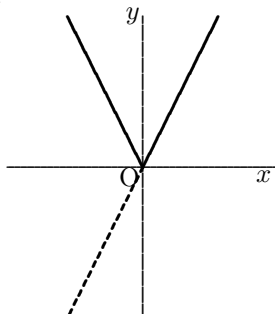
これまで、比例、反比例、一次関数、二次関数、無理関数、一部の分数関数などを学習した。ここでは、その他の関数を調べる。

7.4.1 絶対値、ガウス記号を含む関数

絶対値を含む関数

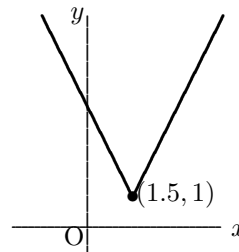
$$y = |2x|$$

$$(y = 2|x|)$$

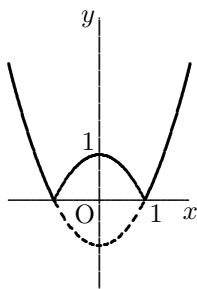


$$y = |2x - 3| + 1$$

$y = |2x|$ のグラフを
 x 軸方向に 1.5,
 y 軸方向に 1
 だけ平行移動したグラフ

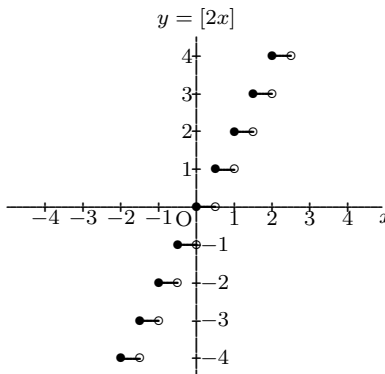
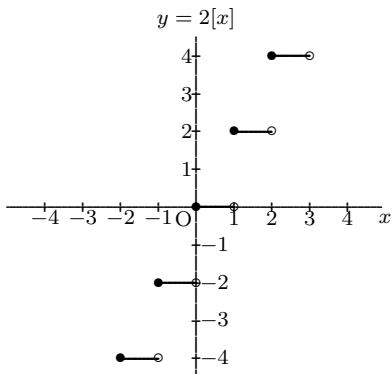
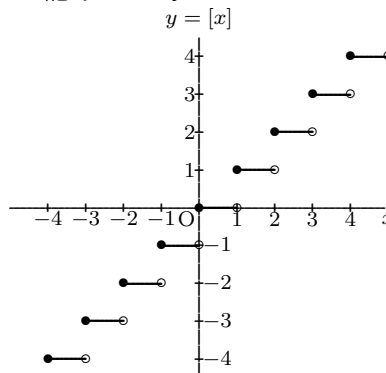


$$y = |x^2 - 1|$$



x を越えない最大の整数を $[x]$ と表す。 $[]$ をガウス記号という。

$$[x] = \begin{cases} \dots\dots\dots \\ 2 & (2 \leq x < 3) \\ 1 & (1 \leq x < 2) \\ 0 & (0 \leq x < 1) \\ -1 & (-1 \leq x < 0) \\ -2 & (-2 \leq x < -1) \\ \dots\dots\dots \end{cases}$$



7.4.2 三次関数

三次関数を

$$y = f(x), \quad f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad a \neq 0 \tag{7.12}$$

とする。まず、 $y = f(x)$ のグラフは点 $M(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ に関して、対称なグラフであることを証明する。
 グラフ上の任意の点 (X, Y) の点 M に関して対称な位置を (x, y) とすると

$$Y = f(X) \tag{7.13}$$

$$\frac{X+x}{2} = -\frac{b}{3a}, \quad \frac{Y+y}{2} = f(-\frac{b}{3a}) \tag{7.14}$$

である。したがって、 $Y = f(X)$ に、

$$X = -\frac{2b}{3a} - x, \quad Y = 2f(-\frac{b}{3a}) - y \tag{7.15}$$

を代入して、

$$2\{a(-\frac{b}{3a})^3 + b(-\frac{b}{3a})^2 + c(-\frac{b}{3a}) + d\} - y = a(-\frac{2b}{3a} - x)^3 + b(-\frac{2b}{3a} - x)^2 + c(-\frac{2b}{3a} - x) + d$$

これより、

$$y = ax^3 + bx^2 + cx + d \tag{7.16}$$

となり、点 $M(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ が対称の中心であることが証明された。

対称の中心 M が原点になるように、すなわち、グラフを $(\frac{b}{3a}, -f(-\frac{b}{3a}))$ だけ平行移動する。

平行移動は

$$x \rightarrow x - \frac{b}{3a}, \quad y \rightarrow y + f(-\frac{b}{3a}) \tag{7.17}$$

の置き換えを行えばよい。したがって、

$$y + f(-\frac{b}{3a}) = a(x - \frac{b}{3a})^3 + b(x - \frac{b}{3a})^2 + c(x - \frac{b}{3a}) + d$$

である。これを整理すると、

$$y = x^3 + (c - \frac{b^2}{3a})x \tag{7.18}$$

となる。ここで、

$$e = c - \frac{b^2}{3a} \tag{7.19}$$

とおくと、

$$y = g(x), \quad g(x) = ax^3 + ex \tag{7.20}$$

が得られる。すなわち一般の三次関数のグラフは、平行移動によって、

x の 3 乗のグラフと比例のグラフを加え合わせたグラフ になる。

(7.20) は、原点の傾きが e であることを示しており、したがって、もとの三次関数 (7.12) の対称の中心 $(-\frac{b}{3a}, f(-\frac{b}{3a}))$ における接線の傾きは e である。

$y = g(x)$ のグラフが原点以外で x 軸を切るかどうかを調べて見る。

$$g(x) = ax^3 + ex = 0 \quad x(ax^2 + e) = 0$$

これが $x = 0$ 以外の解を持つ条件は

$$ae < 0 \quad \text{このとき, } x = \pm\sqrt{-\frac{e}{a}} \tag{7.21}$$

である。

また、グラフが近くの点より大きくなっている (極大) 点、小さくなっている (極小) 点は、関数 $y = g(x)$ の接線の傾きが 0 の点だ (これは、二次関数のところで学んだ) から、

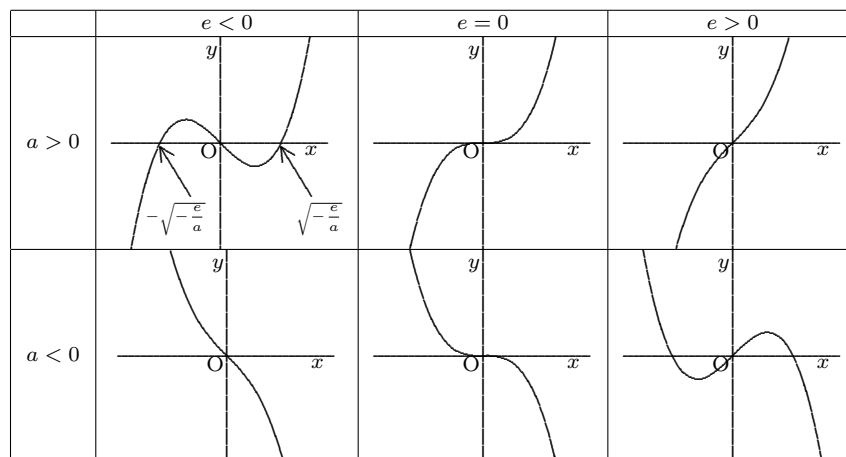
$$3ax^2 + e = 0, \quad x = \pm\sqrt{-\frac{e}{3a}} \quad \text{そのときの値は } g(\pm\sqrt{-\frac{e}{3a}}) \text{ となる。}$$

さらに、三次方程式 $f(x) = 0$ の解は、 $y = f(x)$ と $y = 0$ の交点の x 座標である。

この 2 つのグラフを $(\frac{b}{3a}, -f(-\frac{b}{3a}))$ だけ平行移動して考えると、 $ae < 0$ の場合、方程式が 3 つの解を持つ条件は

$$g(\sqrt{-\frac{e}{3a}}) < -f(-\frac{b}{3a}) < g(-\sqrt{-\frac{e}{3a}})$$

であることがわかる。三次方程式 $f(x) = 0$ は、いずれの場合も最低 1 つの解 (実数解) を持っており、十分精度よくそれを求めることができれば、 $f(x)$ をそれに対応した因数で除すことによって得られる二次式は精度よく議論することができる。高校では、三次方程式の解の公式 (カルダンの公式) を勉強してほしい。

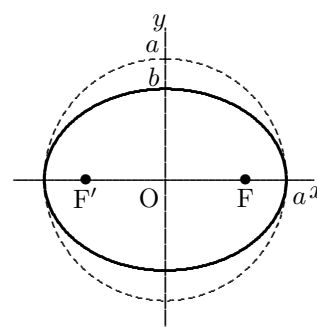


7.4.3 二次曲線

放物線 (parabola), 楕円 (ellipse), 双曲線 (hyperbola) を二次曲線と言う。放物線についてはすでにかなり詳しく書いたのだから、ここでは、楕円, 双曲線について簡単に記述する。

楕円

xy 平面上の, 原点を中心とする半径 a の円を考える。これを x 軸の周りに少し傾けた (回転した) とする。これを xy 平面に垂直な方向 z 軸方向から見る (射影する) と細長い円となる。これが楕円だ。元の円の方程式を $x^2 + y^2 = a^2$ とすると, 楕円は方程式 $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $a > b$ で表される図形となる。 $a = b = r$ の場合が円である。グラフは $x^2 + y^2 = a^2$ を y 軸方向だけ $\frac{b}{a}$ 倍に縮尺した図形となる。従って, 楕円の面積は $\pi a^2 \times \frac{b}{a} = \pi ab$ である。



楕円には2つの焦点 F, F' があり, x 座標は $\pm\sqrt{a^2 - b^2}$ である。楕円は2つの焦点からの距離の和が一定 ($2a$) の点の集まりである。これを確かめておこう。

2点 $F'(-c, 0), F(c, 0)$ からの距離の和が $2a$ の点 $P(x, y)$ の集まりを考える。

$PF' + PF = 2a$ より

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a,$$

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} \text{ の両辺を平方して}$$

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx, \quad \text{さらに平方して,}$$

$$(a^2 - c^2)x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

したがって, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2 - c^2} = 1$, $b = \sqrt{a^2 - c^2}$ とおくと

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

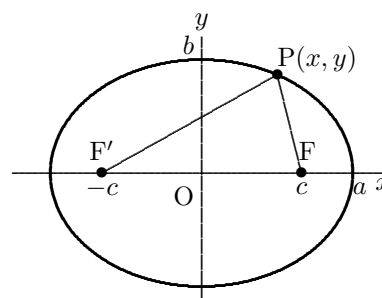
楕円上の点 $P(p, q)$ における接線の傾き m は, 連立方程式

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad y - q = m(x - p) \quad \text{ただし, } \frac{p^2}{a^2} + \frac{q^2}{b^2} = 1$$

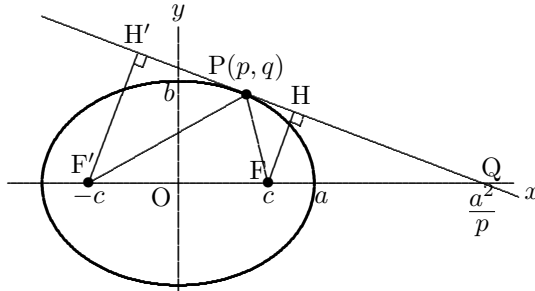
が重解 (p, q) を持つ条件 (二次方程式の判別式が0) より, $m = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p}{q}$ となる。

したがって, 接線の方程式は, $y - q = -\frac{b^2}{a^2} \cdot \frac{p}{q}(x - p)$ よって, $\frac{px}{a^2} + \frac{qy}{b^2} = 1$

となる。点 $P(p, q)$ における接線が x 軸と交わる点 Q の x 座標は, $x = \frac{a^2}{p}$ である。



$$\begin{aligned}
 FP^2 - F'P^2 &= \{(p-c)^2 + q^2\} - \{(p+c)^2 + q^2\} \\
 &= -4pc \\
 FP + F'P &= 2a \\
 \text{より, } FP &= a - \frac{c}{a}p, \quad F'P = a + \frac{c}{a}p
 \end{aligned}$$



点 F, 点 F' から接線への垂線の足をそれぞれ H, H' とすると,

$$FH = \frac{\left| \frac{pc}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{a} \left| a - \frac{c}{a}p \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}} \quad F'H' = \frac{\left| -\frac{pc}{a^2} - 1 \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}} = \frac{\frac{1}{a} \left| a + \frac{c}{a}p \right|}{\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}}$$

したがって, $FP:FH = F'P:F'H' = 1 : \frac{1}{a}$

$$\sqrt{\left(\frac{p}{a^2}\right)^2 + \left(\frac{q}{b^2}\right)^2}$$

(直角三角形の合同条件に対応した相似条件に) よって $\triangle FPH \sim \triangle F'PH'$ したがって, $\angle FPH = \angle F'PH'$ これは, F(F') から出た光は回転楕円体の内面で反射し, F'(F) を通ることを意味する。

双曲線

一般に, 「2 定点 (焦点) からの距離の差が一定である点の集まりは双曲線である」。

2 点 $(-c, 0), (c, 0)$ からの距離の差が $2a$ の点 $P(x, y)$ は

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

を満たす。簡単な計算から,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{c^2 - a^2} = 1$$

が得られる。 $b^2 = c^2 - a^2$ とおくと,

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

これが双曲線の方程式である。

y について解くと, $y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 - \left(\frac{a}{x}\right)^2}$ となり, $x \rightarrow \pm\infty$ のとき, $y = \pm \frac{b}{a}x$ に近づく。これを漸近線ぜんしんせんという。

また, 2 点 $(0, -c), (0, c)$ からの距離の差が $2b$ の点 $Q(x, y)$ は,

$$\sqrt{x^2 + (y+c)^2} - \sqrt{x^2 + (y-c)^2} = 2b$$

を満たし, $a^2 = c^2 - b^2$ とおくと,

$$-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

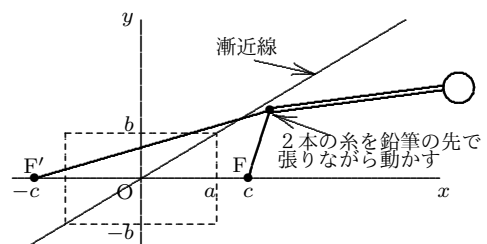
となる。これも双曲線で, 図では破線で示してある。

y について解くと, $y = \pm \frac{b}{a}x\sqrt{1 + \left(\frac{a}{x}\right)^2}$ となり, $x \rightarrow \pm\infty$ のとき, $y = \pm \frac{b}{a}x$ に近づき, これは, 既に記した漸近線と一致する。

$a = b$ の場合は, 漸近線は $y = \pm x$ で互いに直交する。こんな双曲線を直角双曲線という

さて, $\sqrt{(x+c)^2 + y^2} - \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$ にしたがって, 双曲線 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, b = \sqrt{c^2 - a^2}$ を画いてみよう。

座標軸を画き, 2つの焦点 $F'(-c, 0), F(c, 0)$ を定め, 長めの糸を用意し, 両端を 2 点 $F'(-c, 0), F(c, 0)$ に固定し, その両端から点 $(a, 0)$ に糸を張り, 残りの糸を 2 重にして端の部分を経のある結び目をつけておく。結び目を一方の手で引っ張り, 他方の手で二本の重なった糸の結び目でないところを鉛筆で $(a, 0)$ から滑らしながら, 第 1 象限のグラフを描く。他の象限も同様に描く。両手を上手く使えば, 一人でも描けないことはない。



第8章 受験のための数学チェックポイント

1 式, 方程式の計算

- [1] 式の特徴をつかむ, 特徴の順位づけ
 - 等式, 不等式, 恒等式, 方程式
 - 1次式, 2次式, 分数式
 - 整数, 有理数, 無理数
 - 公式の利用
- [2] 検算 (完全をめざして)
 - 式の計算 (1次式, 2次式, 分数式 etc)
代入, 係数比較
 - 因数分解
展開, 代入
 - 方程式
代入
 - 不等式
境界値の代入によるチェック
代入による不等号のチェック
数の変域 (整数, 正負, 等) チェック

2 文章題

- [1] 方程式, 不等式
 - 未知数の決定 … 単位?
 - 解を求める, 検算
 - 題意に適しているか,
問いに対する答えか
- [2] 関数, グラフ, 図形などへの転換
 - 視覚化による問題の整理

3 関数, グラフ

- [1] 関数, グラフ
 - 公式の徹底利用 (公式プリント)
 - 方程式との対応
 - 座標, 傾きなどの未知数導入
 - 図形の知識の援用
- [2] 正確なグラフによる表現
 - 計算結果のグラフによるチェック
 - グラフによる結果予想

4 図形

- [1] 図形の証明
 - 仮定と結論の整理
仮定, 結論を図に書き込む

- 予想して証明
結論からのお迎え
- どんずまりのとき
関係する定理の網羅

[2] 図形の計量

- 長さ · 三平方, 二等辺三角形, 合同, 相似, 接線の長さ, 平行四辺形の対辺, 長方形の対角線, 平行線間の距離
- 角, 角の移動 · 平行線, 二等辺三角形, 弧 · 中心角 · 円周角, 接弦定理, 円に内接する四角形
- 面積, 体積の公式

[3] 特殊な図形が表れていないか

- 30° , 45° , 60° , 90° etc
- 中線, 角の2等分線, 垂線, 平行線
- 三角定規, 二等辺三角形, 直角三角形, 台形, 平行四辺形, ひし形, 長方形, 正多角形, 正多面体
- 円にかかわる諸性質
- $3:4:5$, $5:12:13$, $1:2:\sqrt{3}$, $1:1:\sqrt{2}$

[4] 特に、空間図形では

- 直線と面の垂直
- 平行面の面による切断
- 最短距離, 曲面の計量は展開図
- 面積比は相似比の2乗, 体積比は相似比の3乗